UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

MÉTODOS GEOMÉTRICOS EN PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO SINGULARES: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

AUTORA: MARINA DELGADO TÉLLEZ DE CEPEDA

DIRECTOR: ALBERTO IBORT LATRE

LEGANÉS, 2004

MÉTODOS GEOMÉTRICOS EN PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO SINGULARES: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

Memoria de Tesis Doctoral presentada por
Marina Delgado Téllez de Cepeda
Licenciada en Ciencias Físicas
para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por
Alberto Ibort Latre
Catedrático de Matemática Aplicada.

Mayo de 2004.

Para Alberto

AGRADECIMIENTOS

Después de terminar este trabajo, que no ha sido fácil para mi, quiero agradecer a aquellas personas que me han apoyado de una manera especial durante todo este tiempo.

En primer lugar quiero agradecer especialmente a mi tutor y maestro Alberto Ibort todo lo que me ha ayudado y enseñado durante todos estos años. Así como las ideas aportadas y el seguimiento continuo del avance de las mismas. También quiero agradecerle el tiempo invertido y el esfuerzo dedicado, sin los cuales este trabajo no habría visto la luz.

También me han sido de gran ayuda las reuniones científicas mantenidas con el Profesor Hernán Cendra, Thalía Rodríguez y David Martínez.

He tenido la suerte de estar en un departamento con unos compañeros maravillosos, que me han ayudado con su alegría y sus bromas. Quiero agradecerles a todos ellos que hayan estado ahí. De manera especial a Ángeles, Juany, Jaime, Pilar, Pedro, Paco, Nona y Aitor.

Luego, aunque no les haya podido ver estos años tanto como haya querido, a Borja, Ricardo y Montse, mis queridos compañeros de facultad.

También agradecer a Loren, Gema, Esteban y Luis todos los buenos momentos que hemos pasado juntos, su amistad ha sido fundamental durante todo este tiempo.

A mi familia, a quién debo demasiado como para poder expresarlo con palabras, que ha estado a mi lado en todo momento, empujándome a mejorar en mi vida, con un inmenso cariño.

Por último, la persona que más ha sufrido este tramo de mi vida, y que ha dado sentido a todo lo que hago. Ese ha sido Alberto, que ha estado conmigo y me ha dado esa fuerza especial para realizar todo este trabajo.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Teoría Geométrica de Control Óptimo y teorema de Pontryagin **11**

2.1. Axiomas para una Teoría Geométrica de Control Óptimo 11

2.1.1. El espacio de estados y de controles 11

2.1.2. Ecuación de estado 12

2.1.3. Funcional Objetivo 13

2.2. El marco presimpléctico para la Teoría Geométrica de Control Óptimo 14

2.2.1. Marco geométrico lagrangiano a la Skinner y Rusk 14

2.2.2. El espacio de fases total y sus proyecciones naturales. La distribución vertical 17

2.2.3. El espacio de coestados y el levantamiento hamiltoniano . 18

2.2.4. El formalismo presimpléctico. La ecuación Dinámica 20

2.2.5. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dinámica. La subvariedad de las ligaduras primarias 20

2.2.6. Problemas de control óptimo regulares. El sistema hamiltoniano equivalente (M_1, Ω_1, H_1) 25

2.3. Formulación lagrangiana del problema de Control Óptimo regular 27

2.4. El marco analítico de la Teoría Geométrica de Control Óptimo. El principio de máximo de Pontryagin 30

2.4.1. El principio de máximo de Pontryagin y el cálculo de variaciones 30

2.4.2. Variedades de Hilbert de curvas en variedades riemannianas 36

2.4.3. Teorema de los multiplicadores de Lagrange 39

2.4.4. La variedad de Hilbert de curvas en el espacio de estados y de controles 45

2.4.5. Equivalencia del problema de control óptimo regular con la formulación presimpléctica de la teoría 47

3. Teoría Geométrica de Control Óptimo Singular 51
3.1. La geometría de las ecuaciones diferenciales implícitas 51
3.1.1. Espacios de jets y ecuaciones diferenciales 53
3.1.2. Puntos integrables, regulares, subregulares y singulares de ecuaciones diferenciales 55
3.1.3. El algoritmo de ligaduras recursivo clásico 58
3.1.4. Ecuaciones cuasilineales: Índice de Kronecker y estabilidad del algoritmo de ligaduras 60
3.1.5. Ecuaciones cuasilineales presimplécticas 66
3.2. Teoría de Control Óptimo Singular como una teoría de ecuaciones implícitas 67
3.2.1. Aplicación del algoritmo recursivo clásico a las ecuaciones del principio del máximo de Pontryagin 67
3.2.2. Teorema del embedding coisótropo y el algoritmo de ligaduras 71
3.2.3. Aplicación a la Teoría de Control Óptimo: la formulación hamiltoniana del algoritmo de ligaduras 72
3.3. El algoritmo de ligaduras para el problema de control óptimo LQ y su implementación numérica 83
3.3.1. El algoritmo de ligaduras lineal para problemas LQ singulares 83
3.3.2. Implementación del algoritmo numérico 88
3.3.3. Algoritmo de ligaduras lineal para calcular las ligaduras de primera y segunda clase 93
3.3.4. Implementación numérica del algoritmo 97
3.3.5. Algunos ejemplos sencillos. Cálculo exacto de las ligaduras 107
3.3.6. Experimentos numéricos sobre la estabilidad del algoritmo de ligaduras 113

4. Problemas de control óptimo singular generalizados 127
4.1. El algoritmo recursivo subregular 127
4.1.1. Ejemplos de ecuaciones singulares con puntos integrables no resolubles a través del algoritmo recursivo subregular . 129
4.2. Un ejemplo de sistema singular genérico: el frunce 130
4.3. Un ejemplo de dinámica singular: frenado óptimo 139
4.3.1. Un modelo simple para el frenado óptimo 139
4.3.2. Resolución del problema de frenado óptimo con el algoritmo de ligaduras 141
4.3.3. Un modelo vectorial de frenado óptimo 146
4.3.4. Simulaciones numéricas 148
4.4. El principio del máximo de Pontryagin para sistemas cuasilineales implícitos 150

4.4.1. Principio de máximo de Pontryagin para sistemas de control óptimo cuasilineales implícitos 152
4.4.2. Descripción presimpléctica del principio de máximo de Pontryagin para problemas cuasilineales implícitos 154
4.4.3. Una generalización de los fibrados cotangentes 157
4.4.4. Algoritmo de las ligaduras para el problema de control óptimo implícito 158

5. Conclusiones y problemas abiertos **161**
5.1. Conclusiones 161
5.2. Algunos problemas abiertos 163

Bibliografía **165**

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de la Teoría de Control es determinar el comportamiento de un sistema dinámico por medio de acciones externas de forma que se cumplan ciertas condiciones prefijadas como, por ejemplo, que haya un extremo fijo, los dos, que ciertas variables no alcancen algunos valores u otro tipo de situaciones más o menos complicadas. En este trabajo, por concreción, nos vamos a centrar en el caso en el que los dos estados extremos, el estado inicial y el final, son fijos, aunque otras situaciones más generales tienen un tratamiento similar. La ecuación que describe la evolución de los estados para un problema de este tipo es un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x(t), u(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

donde x^i representa las variables que describen el estado del sistema y u^a las variables que describen las acciones externas o controles. En la Teoría de Control Óptimo, además, queremos que el sistema verifique una condición adicional, que consiste habitualmente en minimizar (o maximizar) un cierto funcional, es decir, querríamos encontrar trayectorias $\gamma(t) = (x(t), u(t))$ suficientemente regulares, por ejemplo, C^1 a trozos, con extremos fijos en el espacio de estados, $x(0) = x_0$ y $x(T) = x_T$, que satisfagan la ecuación de control (1.1) y que además minimicen el siguiente funcional, llamado también funcional objetivo o de coste, sobre un cierto espacio de trayectorias admisibles:

$$S(\gamma) = \int_0^T L(x(t), u(t))\, dt. \tag{1.2}$$

Las trayectorias $\gamma(t)$ que verifican todas estas condiciones se dirán optimales.

Para resolver este problema y otros asociados naturalmente a él, tales como la estabilidad de las soluciones obtenidas, se han desarrollado un amplio abanico de ideas, técnicas y resultados matemáticos. Además de herramientas analíticas y numéricas, que han gozado de un gran predicamento, cada vez resulta más importante el punto de vista geométrico en la Teoría de Control. La introducción

de un punto de vista geométrico en la Teoría de Control fue iniciada seguramente por el propio L. Pontryagin y sus seguidores [90, 3, 4] y definitivamente por R. Brockett en el estudio de problemas de control en esferas y grupos de Lie [11, 12, 13, 14, 15].

Así, la Teoría de Control se puede formular en términos geométricos y obtener resultados intrínsecos. Éste será el objetivo del capítulo 2, aplicar los métodos de la geometría para describir intrínsecamente la Teoría de Control Óptimo. Para ello estableceremos un marco axiomático suficientemente general y, argumentando por analogía con la Mecánica Lagrangiana, mostraremos la formulación presimpléctica de la Teoría de Control Óptimo. Esta formulación está inspirada en la formulación de Skinner y Rusk de la Mecánica Clásica [96] y ha sido utilizada ya entre otros por E. Martínez y C. López [78, 77], M. C. Muñoz–Lecanda y N. Román–Roy [87], Guerra [54], S. Martínez [85] y M. Delgado y A. Ibort [33, 34].

La solución del problema de control óptimo enunciado antes fue obtenida de manera muy general por L. Pontryagin y sus colaboradores [90] y está dada por el conocido como principio del máximo de Pontryagin, enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 1.0.1 (Principio del máximo de Pontryagin) *[90] La curva $\gamma(t) = (x(t), u(t))$, $t \in [0, T]$, absolutamente continua, es una trayectoria optimal si existe un levantamiento de $x(t)$ al espacio de coestados, $(x(t), p(t))$, tal que se satisfagan las ecuaciones de Hamilton,*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{1.3}$$

y tal que se cumpla:

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_v H(x(t), p(t), v), \qquad a.e.\ t \in [0, T],$$

donde H denota la función hamiltoniana

$$H(x, p, u) = p_i f^i(x, u) - L(x, u). \tag{1.4}$$

El principio de máximo de Pontryagin ha sido aplicado con éxito en gran variedad de problemas. Un ejemplo significativo de su uso lo constituyen las llamadas soluciones "bang–bang" al problema de control óptimo y ocurre, generalmente, si los controles están "limitados". Por razones físicas, tecnológicas o aún económicas, se imponen restricciones a priori sobre los controles del tipo $\|u\| < c_{\text{máx}}$. Si la ecuación de estados es lineal en los controles, esto es:

$$\dot{x}^i = f_0^i(x) + f_a^i(x) u^a$$

y el funcional a minimizar es, por ejemplo, alguna de las variables de estado o una función de ellas, pero no de los controles u^a:

$$S = \int_0^T L(x)\, dt,$$

el hamiltoniano de Pontryagin será $H(x,p,u) = p_i f_0^i(x) + p_i f_a^i(x) u^a - L(x)$, por lo que para (x,p) fijos el máximo de H se alcanza solamente en el borde del dominio de definición de los controles. Si tenemos únicamente un control u, el máximo de H se alcanza cuando $u(t) = u_{\text{máx}}$ si $p_i f^i(x) > 0$ y cuando $u(t) = u_{\text{mín}}$ si $p_i f^i(x) < 0$. Así, podemos desarrollar una estrategia optimal dependiendo del valor del signo de la función $\phi = p_i f^i(x)$, llamada en la literatura por este motivo función de "switching", y que consiste en este ejemplo concreto en la elección de los valores de u como:

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{máx}} & \text{si } \phi(x,p) > 0 \\ u_{\text{mín}} & \text{si } \phi(x,p) < 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Si partimos de un punto (x_0, p_0) en $t = 0$ tal que $\phi(x_0, p_0) > 0$, la estrategia optimal consiste en resolver las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{x}^i = f_0^i(x) + f^i(x)\, u_{\text{máx}} \tag{1.6}$$

$$\dot{p}_i = -p_j \frac{\partial f_0^j}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} u_{\text{máx}} - \frac{\partial L}{\partial x^i}(x). \tag{1.7}$$

Seguimos la trayectoria $(x(t), p(t))$ resultante hasta que $x(T) = x_T$ ó $\phi(x(t), p(t))$ cambie de signo. Si ocurre lo segundo, a partir de ese momento seguimos la trayectoria $(\widetilde{x}(t), \widetilde{p}(t))$ solución de las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= f_0^i(x) + f^i(x)\, u_{\text{mín}} \\ \dot{p}_i &= -p_j \frac{\partial f_0^j}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} u_{\text{mín}} - \frac{\partial L}{\partial x^i}(x). \end{aligned}$$

Si eventualmente $\widetilde{x}(T) = x_T$, hemos resuelto el problema, pero si $\phi(t)$ vuelve a cambiar de signo volveremos a las ecuaciones (1.6)-(1.7) y así sucesivamente.

Puede ocurrir que siguiendo esta estrategia $\widetilde{x}(T) \neq x_T$ y, entonces, el problema de control óptimo no tenga solución para ningún valor inicial (x_0, p_0). Podría modificarse esta estrategia permitiendo que $(x(t), p(t))$ esté contenido en el conjunto $\phi = 0$ durante un cierto intervalo de tiempo, definiendo lo que se denomina un arco singular.

Ahora bien, ¿qué ecuaciones debe verificar la curva $(x(t), p(t)) \in \{\phi = 0\}$ para que la trayectoria sea optimal? El principio de máximo de Pontryagin no nos da la respuesta a esta cuestión. Dedicaremos el capítulo 3 de esta memoria al estudio de la dinámica singular, esto es, de la dinámica inducida por las ecuaciones de

Hamilton (1.3) en el subconjunto $\{\,\phi = 0\,\}$. Discutiremos un ejemplo no trivial de dinámica singular no lineal en el capítulo 4; el problema de frenado óptimo de un vehículo y veremos que este análisis es relevante.

Otra circunstancia natural donde se debe imponer la condición $\phi = 0$ a priori consiste en el estudio de sistemas de control óptimo donde los controles no están acotados ($u \in \mathbb{R}^m$) y la dependencia de H en u^a es suficientemente regular para que la condición de máximo implique que $\partial H(x(t), p(t))/\partial u^a = 0$ (y posiblemente alguna derivada más en el caso de máximos degenerados). En este caso las trayectorias optimales siempre estarán contenidas en el subconjunto $M_1 = \{(x, p, u)|\ \phi_a = \partial H/\partial u^a = 0\}$. También se dará esta circunstancia si la función $H(x, p, u)$ tiene máximos locales en u en el interior del dominio de definición de los controles. La restricción de las ecuaciones de Hamilton al subespacio M_1 define, en general, una ecuación diferencial ordinaria implícita. Los puntos en los que dicha ecuación puede escribirse en forma normal diremos que son regulares y singulares en caso contrario. Así, el estudio de la dinámica en el subespacio M_1 se ve enormemente dificultado por la aparición de ecuaciones diferenciales implícitas con puntos singulares.

Una familia de sistemas particularmente interesantes por su simplicidad conceptual e innumerables aplicaciones son los sistemas LQ[1] o Lineal-Cuadráticos. Son aquellos en los que tanto el espacio de estados como el de controles son espacios lineales, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n,\ u = (u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{R}^m$. La función $f^i(x(t), u(t))$ es lineal en las variables y en los controles,

$$f^i(x(t), u(t)) = A^i_j x^j + B^i_a u^a$$

y la densidad $L(x(t), u(t))$ es cuadrática respecto de sus argumentos

$$L(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} P_{ij} x^i x^j + Q_{ia} x^i u^a + \frac{1}{2} R_{ab} u^a u^b.$$

Por lo tanto, las ecuaciones (1.1)-(1.2) tendrán la siguiente forma:

$$\dot{x}^i(t) = A^i_j x^j + B^i_a u^a \tag{1.8}$$

y

$$S(\gamma) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} P_{ij} x^i x^j + Q_{ia} x^i u^a + \frac{1}{2} R_{ab} u^a u^b \right) dt, \tag{1.9}$$

donde $A = (A^i_j) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $B = (B^i_a) \in \mathbb{R}^{(n,m)}$, $P = (P_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $Q = (Q_{ia}) \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ y $R = (R_{ab}) \in \mathbb{R}^{(m,m)}$. El problema general incluiría un término adicional de frontera en el funcional de coste, de la forma: $x'(T) F x(T)$, y las matrices A, B, P y Q dependientes del tiempo.

[1] Abreviatura del inglés: "Linear-Quadratic".

La aplicación inmediata del principio del máximo de Pontryagin nos conduce al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= A^i_{\ j}x^j + B^i_{\ a}u^a \\ \dot{p}_i &= -p_j A^j_{\ i} + P_{ij}x^j + Q_{ia}u^a \\ \phi_a &= p_i B^i_{\ a} - Q_{ia}x^i - R_{ab}u^b = 0, \end{aligned}$$

donde vemos inmediatamente que si la matriz R es invertible podemos despejar los controles u en función de las variables x y p a través de la ecuación

$$u^b = (R^{ab})\left(p_i B^i_{\ a} - Q_{ia}x^i\right), \text{ donde } R^{ab}R_{bc} = \delta^a_c, \tag{1.10}$$

denominada relación de retroalimentación optimal ("optimal feedback"), que matricialmente se escribiría:

$$u = R^{-1}(-Q^T x + B^T p).$$

Entonces, las ecuaciones para la dinámica quedan escritas en forma normal como

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BR^{-1}Q^T)\,x + (BR^{-1}B^T)\,p, \tag{1.11}$$

$$\dot{p} = Px - A^T p + Qu = (P - QR^{-1}Q^T)\,x + (-A^T + QR^{-1}B^T)\,p, \tag{1.12}$$

por lo que todos los puntos del problema son regulares y su solución nos determina la estrategia optimal $(x(t), u(t))$, única para datos iniciales dados. Nótese que los extremos de $p(t)$ pueden fijarse arbitrariamente y así lograr soluciones que terminen en x_T. Sin embargo, si R no es invertible la resolución del sistema anterior no es obvia. Tales sistemas, más generalmente los sistemas de ecuaciones cuasilineales implícitos de la forma

$$A \cdot \dot{x} = B \cdot x,$$

han recibido gran atención en la literatura por su sencillez y aplicaciones. El problema de fijar las condiciones iniciales de tal manera que exista una solución que pase por ella ha sido llamado el problema de la inicialización. Típicamente este problema ha sido atacado a través de la reducción a formas normales que pueden analizarse fácilmente y distintas variaciones sobre este esquema conceptual. Ver, por ejemplo, el uso de este punto de vista en Teoría de Control en Clements y Anderson [28], Dai [32], Bell y Jacobson [8] y Willems, Kitapçi y Silverman [105]. También en la Teoría General de Ecuaciones Implícitas, comúnmente llamadas DAEs[2] en la literatura especializada, ver por ejemplo Campbell [16, 17], Kunkel y Mehrmann [68], etc.

En esta tesis abordaremos el estudio de la dinámica singular desde un punto de vista diferente, que tiene la ventaja de no estar sometido a condiciones de

[2]Acrónimo del inglés: "Differential-Algebraic Equations".

linealidad, y es perfectamente aplicable a problemas no lineales. La aproximación que proponemos proviene directamente de la formulación presimpléctica del problema de control óptimo y que, en la literatura Físico–Matemática, se denomina "método de las ligaduras de Dirac" o "algoritmo presimpléctico de ligaduras" en su formulación más moderna. El origen histórico del procedimiento se encuentra en el problema de la cuantización de sistemas lagrangianos singulares, como aquellos que aparecen en teorías físicas con invariancia gauge tales como el electromagnetismo o la gravitación. P. A. M. Dirac lo resolvió, al menos formalmente, a través de la formulación de un procedimiento para extraer un subespacio, del espacio de fases de la teoría, equipado con un corchete de Poisson susceptible de ser cuantizado canónicamente utilizando un adecuado principio de correspondencia [37, 38]. La idea de Dirac fue sometida a un intenso escrutinio y a un proceso de depuración y estilización matemática que, en cierto modo, termina con el trabajo de Gotay y Nester [45, 46, 47] cuando en 1978 establecen una formulación intrínseca y matemáticamente sólida del procedimiento de Dirac y que es comúnmente conocida como el algoritmo PCA [3]. Ver, por ejemplo, [84], [23] y las referencias contenidas en ellos para tener una versión panorámica de este problema. A partir de este momento, además de explorar las aplicaciones de estas ideas se producen diversos intentos de extender la teoría a situaciones más complejas o con un origen diverso, así, se desarrollan técnicas de proyectores [59, 73, 74, 75, 76], se extiende la teoría a ecuaciones cuasilineales [49, 50, 51, 53, 87] e incluso a ecuaciones implícitas con toda generalidad a través de la formulación más depurada desde un punto de vista geométrico realizada por Marmo, Mendella y Tulczyjew [84].

Simultáneamente, en el contexto de la Teoría de Sistemas y sus aplicaciones a la ingeniería, se estaban estudiando desde puntos de vista diversos ecuaciones diferencial-algebraicas [102, 103], esto es, ecuaciones diferenciales sometidas a ligaduras o condiciones algebraicas. El fracaso de los métodos numéricos convencionales en el estudio de las DAEs determinó que se iniciara un estudio más profundo de su estructura y ya en 1984 Rheinboldt propone avanzar en su estudio geométrico [93]. Luego siguen muchos otros investigadores, Reich [92], etc., y entre los diferentes procedimientos analizados para su estudio destaca la propuesta desarrollada finalmente por Rabier y Reinbholt en 1994 [91], que consiste en un procedimiento algorítmico básicamente equivalente a la formulación general de Marmo, Mendella y Tulczyjew del algoritmo de ligaduras de Dirac.

La posibilidad de usar este enfoque conceptual y el algoritmo de ligaduras para el estudio de problemas de control óptimo singular resultaba muy natural y así se menciona por primera vez en la literatura especializada de pasada en el libro de Jurdjevic [61], página 299, aunque es presentado por primera vez por E. Martínez y C. López-Lacasta [77, 78]. Posteriormente, este algoritmo fue utilizado por Guerra en su tesis doctoral para el estudio de sistemas LQ singulares [54]. Resulta en cierto modo chocante que, a pesar de lo natural de las ideas

[3] Acrónimo del inglés: "Presymplectic Contraint Algorithm".

involucradas y de su larga historia, esta aproximación al problema de control singular no haya tenido lugar antes. El punto de vista dominante en el estudio de problemas de control óptimo singulares hasta hoy mismo lo constituye la Teoría de Perturbaciones Singulares (ver por ejemplo: [64, 65, 79] y sus referencias). Desgraciadamente, para problemas con singularidades no triviales, como las que veremos más adelante, la Teoría de Perturbaciones Singulares no proporciona respuestas satisfactorias. Efectivamente, si partimos de un problema singular para poder tratarlo a través de la Teoría de Perturbaciones Singulares debemos convertirlo en un problema regular ε–próximo al problema singular. En algunos casos simples tal regularización del problema se puede introducir a mano, ya que resulta evidente como hacerlo, pero en problemas complejos tal procedimiento no se conoce todavía. En el caso de lagrangianos singulares una respuesta a este problema bajo ciertas condiciones fue dada en [57]. Por otro lado, si partimos de un problema que se encuentra muy próximo a ser singular y decidimos tratarlo como una perturbación singular, tendremos que decidir cuál es el problema singular al que se encuentra próximo y una vez establecido éste, para poder determinar la dinámica lenta, deberemos estudiar la consistencia de la dinámica reducida, esto es, deberemos aplicar el algoritmo de ligaduras de una u otra forma. En este sentido la teoría del algoritmo de ligaduras que describiremos aquí se puede considerar también como un ingrediente necesario en una futura Teoría de Perturbaciones Singulares Global que extendiese el trabajo de N. Fenichel [41] y que ya fue iniciado por [33].

En este trabajo, por tanto, revisamos el algoritmo de ligaduras desde sus fundamentos deteniéndonos en las distintas formulaciones que adopta éste para ecuaciones cuasilineales, presimplécticas y lineales, ya que, dependiendo de las circunstancias, aprovecharemos la formulación más adecuada para su aplicación y desarrollo especializado. Así, por ejemplo, para sistemas LQ se elabora una nueva versión lineal del algoritmo que está adaptada a su uso computacional, proporcionando una familia de algoritmos y programas que resuelven el problema completamente con unas características numéricas heurísticamente estables. Desarrollamos también un algoritmo derivado del algoritmo general que está particularmente bien adaptado para el tratamiento de sistemas singulares genéricos y que denominaremos algoritmo subregular. Por otro lado, utilizamos una formulación apropiada del algoritmo para mostrar la relación existente entre el índice de Kronecker de la Teoría Ordinaria de DAEs y el número de pasos que necesita el algoritmo de ligaduras para estabilizarse. El capítulo 3 de la memoria se dedica a establecer los resultados e ideas básicas necesarias sobre la Teoría de Ecuaciones Implícitas desde un punto de vista geométrico y a desarrollar las distintas adaptaciones del algoritmo general de ligaduras. Se presenta un algoritmo lineal de ligaduras apropiado para el estudio de sistemas LQ singulares y se exponen distintos experimentos numéricos que muestran la estabilidad del algoritmo.

En el capítulo 4 se aborda el estudio de diversos problemas de control óptimo singular para los que no se verifican las condiciones técnicas de aplicabilidad del

algoritmo de ligaduras general, bien porque los distintos subconjuntos que se obtienen al aplicar el algoritmo tienen a su vez singularidades, como es el caso de los sistemas genéricos "catastróficos" de los que se analiza con detalle el frunce, o bien porque la dinámica no es singular *per se*, sino que se debe considerar como tal al implementar una cierta estrategia optimal. Este es el caso de los problemas de frenado óptimo para los que además puede darse que los subconjuntos obtenidos no sean de nuevo variedades diferenciables y aparezcan singularidades. Describiremos brevemente uno de tales sistemas y mostraremos, además, simulaciones numéricas que refrendan la bondad de las ideas utilizadas. Finalmente, consideramos un tipo de sistemas de control óptimo generalizados para los cuáles no es posible aplicar el principio de máximo de Pontryagin. En estos sistemas la ecuación de estado es implícita y, por ejemplo, en el caso cuasilineal tiene la forma:

$$A(x) \cdot \dot{x} = B(x).$$

El punto de vista de Pontryagin [90] para la solución de los problemas de control óptimo consiste en sustituir el problema original (1.1)-(1.2) por un problema equivalente de la forma:

$$\dot{x}^i = f^i(x(t), u(t)), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

donde la ecuación para $i = 0$ está dada por

$$\dot{x}^0 = L(x(t), u(t)).$$

Así, el problema de minimizar S se convierte en determinar las trayectorias integrales de nuestro sistema tales que, en el conjunto de valores alcanzados en tiempo T en $\mathbb{R}^{n+1}$, proyecten sobre el valor mínimo en el eje x^0. La existencia de tales trayectorias se prueba mostrando la convexidad del conjunto de valores alcanzados a tiempo T y relacionándolo con el máximo de la constante del movimiento para dicha dinámica $H_P = \sum_0^n p_i f^i(x, u)$. Esta idea ha sido recientemente analizada cuidadosamente desde un punto de vista geométrico por
B. Langerock [69, 70, 71].

Resulta evidente que tal estrategia no puede usarse si queremos obtener un principio que generalice el principio de máximo de Pontryagin para un problema de control óptimo cuya ecuación de estado es implícita. En este punto, el único camino practicable es utilizar un teorema tipo multiplicadores de Lagrange y tratar la ecuación de estado como una condición del problema en el espacio de trayectorias e incorporarla al funcional objetivo vía los "multiplicadores" adecuados. Esta idea, usada con tan gran perspicacia por Lagrange, Euler y todos los practicantes de la Mecánica, adolece de una dificultad técnica para hacerla matemáticamente rigurosa. Efectivamente, su extensión a espacios funcionales se hace particularmente delicada (en dimensión finita es trivial), ya que requiere que los espacios, funciones, etc. involucrados verifiquen las adecuadas propiedades

analítico–geométricas; básicamente que las variedades sean de Hilbert y las subvariedades a las que restringimos la función a minimizar estén definidas como ceros de funciones C^1 entre variedades de Hilbert. En el capítulo 2 mostramos cómo puede lograrse un resultado semejante al principio de máximo utilizando una formulación débil del teorema de los multiplicadores de Lagrange, que no requiere tantos artificios técnicos, aunque resulta imprescindible la construcción del espacio de curvas de clase de Sobolev k en una variedad riemanniana para poder utilizar el teorema. Con esta formulación del teorema de los multiplicadores probamos que la condición de extremalidad para curvas de clase de Sobolev H^1 es equivalente a las ecuaciones del principio de máximo de Pontryagin para soluciones normales para una clase de puntos críticos que denominaremos ordinarios. Gracias a esta aproximación somos capaces de derivar en el capítulo 4 un principio de máximo, esto es, un conjunto de ecuaciones diferenciales presimplécticas hamiltonianas a satisfacer por las curvas optimales, para los sistemas de control óptimo implícitos, además de caracterizar el caso regular y singular y proponer una extensión del algoritmo de ligaduras para los problemas singulares. Añadimos, por compleción, la formulación completa del teorema de los multiplicadores de Lagrange que sería necesaria para estudiar estos problemas desde ese punto de vista.

Capítulo 2

Teoría Geométrica de Control Óptimo y teorema de Pontryagin

En este capítulo establecemos los fundamentos de una Teoría Geométrica de Control Óptimo en forma axiomática. Posteriormente, establecemos por analogía con la formulación de Skinner y Rusk de la Mecánica Lagrangiana un nuevo marco presimpléctico para dicha teoría. Estudiamos la caracterización de los extremos del funcional objetivo sometido a las ligaduras impuestas por la ecuación de control y probamos las generalizaciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange adecuados. Mostramos, finalmente, que una clase de extremales reproducen exactamente las condiciones de las curvas optimales normales del principio de máximo de Pontryagin.

2.1. Axiomas para una Teoría Geométrica de Control Óptimo

2.1.1. El espacio de estados y de controles

El espacio de estados es el objeto geométrico que describe las variables que caracterizan los distintos estados del sistema.

Axioma 2.1.1 *El espacio de estados o de configuración de un sistema de control es una variedad diferenciable de dimensión finita, con o sin borde, y los controles constituyen las fibras de un fibrado afín sobre ella.*

A la variedad diferenciable de los estados la denotamos como P y sus coordenadas locales las denotamos como $x^i,\ i = 1 \dots n$, donde n es la dimensión de P. Al espacio total de estados y controles lo denotamos por C y sus coordenadas $(x^i, u^a),\ a = 1, \dots, m$. Denotaremos como $\pi \colon C \longrightarrow P$ la proyección de la fibración de C sobre P.

No todos los sistemas de control óptimo se pueden describir de esta forma. Otra situación más general que podríamos tener en cuenta es, por ejemplo, variedades diferenciables a trozos (por ejemplo, en forma de zig-zag). Sin embargo, para nuestros propósitos tiene sentido asumir el axioma 2.1.1, ya que perseguimos una comprensión geométrica, esto es, global, de ciertos problemas en Teoría de Control Singular. Considerar situaciones más generales, donde las complicaciones analíticas fueran mayores, no haría, quizás, sino oscurecer el análisis.

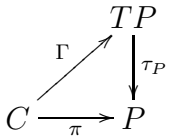
Como generalmente los controles van a ser fuerzas externas aplicadas dependiendo del estado, las variables de control las podemos modelar utilizando la idea geométrica de fibrado; generalmente, este fibrado va a ser un fibrado vectorial o afín, es decir, la fibra sobre un punto arbitrario va a ser un espacio vectorial o afín. Por lo tanto, tendremos un fibrado con espacio total que denotamos como C sobre el espacio base P y una aplicación de proyección $\pi\colon C \longrightarrow P$. Las variables de control, es decir, las coordenadas locales a lo largo de las fibras $\pi^{-1}(x)$ de π, las denotamos como $u^a,\ a = 1, \ldots, m$. La fibra $C_x = \pi^{-1}(x)$ constituye el conjunto de controles que actúan en el punto x del espacio de estados.

La suposición que hemos hecho en este trabajo sobre la estructura de fibrado afín del espacio de estados y controles, permite simplificar el problema y centrar el estudio en sus aspectos geométricos más importantes. En general, no es cierto que tengamos un conjunto no acotado de controles sino que, en muchas situaciones prácticas, vamos a tener unos límites para los controles y el conjunto de controles en cada punto va a estar acotado. Estas condiciones complican el problema; hay que estudiar extremos no locales, ya que estos también pueden maximizar el hamiltoniano, tal y como ya indicamos en la introducción, pero con la simplificación propuesta centramos el estudio en los puntos del interior.

2.1.2. Ecuación de estado

La dinámica del sistema es descrita a través de las relaciones físico/mecánicas entre las variables que describen el fibrado de control y sus derivadas. Dichas ecuaciones típicamente son ecuaciones diferenciables de primer o segundo orden y dependen de los controles como parámetros. La formulación geométrica de estas ideas es debida a E. Martínez [83] y se apoya en la noción de cálculo diferencial a lo largo de aplicaciones, ampliamente desarrollada en el ámbito de la Mecánica [81, 82, 22, 24].

Axioma 2.1.2 *La ecuación dinámica de un sistema de control, también llamada ecuación de estado o de control, está descrita por un campo vectorial en el fibrado de los estados y controles a lo largo de la proyección π, i.e., el campo vectorial es una aplicación $\Gamma\colon C \longrightarrow TP$ tal que $\tau_p \circ \Gamma = \pi$ y que en coordenadas tiene la expresión $\Gamma = f^i(x,u)\partial/\partial x^i$.*



Cuando tratemos de extender la dinámica al espacio total de estados y controles (§ 2.2) veremos que la dinámica del sistema va a estar definida por un campo vectorial presimpléctico hamiltoniano.

No hemos tenido en cuenta la situación en que las variables puedan ser estocásticas. Físicamente es más realista el considerarlas de esta forma, pero introducen dificultades analíticas considerables cuya geometría no estamos en condiciones de dilucidar en este momento. Ver también, por ejemplo, a este respecto los trabajos de Brockett [15].

2.1.3. Funcional Objetivo

El funcional objetivo en un problema de control óptimo es la función a minimizar y, en general, es un funcional local definido en un cierto espacio de curvas.

Axioma 2.1.3 *El funcional objetivo S de un problema de control óptimo está definido mediante una densidad lagrangiana $L\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir,*

$$S = \int_0^T L(x,u)\,dt,$$

y es una función diferenciable en un cierto espacio de curvas admisibles en C.

La función lagrangiana puede depender explícitamente del tiempo, $L = L(x,u,t)$, aunque no vamos a considerar explícitamente ese caso de nuevo para mantener la sencillez de la exposición.
El funcional objetivo va a estar definido en un espacio de curvas, subconjunto de

$$\Omega(0,T;x_0,\Sigma) = \{\gamma\colon [0,T] \longrightarrow C |\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(T) \in \Sigma\},$$

donde Σ es una subvariedad de P. Dependiendo de cómo sea Σ tendremos distintas situaciones interesantes, entre éstas cabe destacar las siguientes:

- Problema de extremos fijos: $\Sigma = \{x_T\}$, aquí ambos extremos vienen fijados.
- Problema de extremo final libre $\Sigma = P$.

El espacio de curvas se escoge en cada problema tanto para adecuarse a las características propias como para garantizar las propiedades de diferenciabilidad que exigimos en el axioma 2.1.3. Veremos ejemplos de estas elecciones en § 2.4.

2.2. El marco presimpléctico para la Teoría Geométrica de Control Óptimo

2.2.1. Marco geométrico lagrangiano a la Skinner y Rusk

Una vez establecidos los axiomas para una Teoría Geométrica de Control Óptimo, vamos a desarrollar una formulación donde las soluciones al problema adquieran una descripción geométrica particularmente simple en términos de geometría presimpléctica. Para ello nos vamos a inspirar en el formalismo a la Skinner y Rusk de la Mecánica que describimos a continuación, véanse los trabajos [77], [96] y [85]. Utilizamos los resultados conocidos de la Mecánica Lagrangiana para introducir la geometría básica que vamos a utilizar posteriormente.

Consideremos un sistema lagrangiano cuyo espacio de configuración sea una variedad diferenciable P. La función lagrangiana de este sistema autónomo va a ser una función C^∞, $L\colon TP \longrightarrow \mathbb{R}$, donde TP denota el espacio de velocidades del sistema, es decir, el espacio de configuraciones y velocidades generalizadas, con coordenadas locales (x^a, v^a), $a = 1, \ldots, n$. Las trayectorias clásicas de este sistema, dadas por el principio de mínima acción de Hamilton, van a ser aquellas curvas que, dados dos puntos fijos x_0, x_T y tiempos 0, T, hacen extremal el funcional de acción:

$$S(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), v(t))\, dt,$$

que está definido, por ejemplo, en el espacio de curvas diferenciables a trozos $\gamma\colon [0,T] \longrightarrow P$, tales que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(T) = x_T$ y $\dot\gamma(t) = v(t)$. La solución, si existe, viene dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange de L. Si L es regular, es decir, si la matriz $W_{ab} = \partial^2 L/\partial v^a \partial v^b$ es invertible, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^a}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^a}, \quad a = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

definen un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, ya que podemos invertir la matriz W y obtener:

$$\frac{dx^a}{dt} = v^a, \qquad \frac{dv^a}{dt} = F^a(x, v), \quad a = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

donde

$$F^a(x,v) = W^{ab}\left(\frac{\partial L}{\partial x^b} - v^c \frac{\partial^2 L}{\partial x^c \partial v^b}\right); \quad W^{ab}W_{bc} = \delta^a_c.$$

La dinámica asociada al lagrangiano L viene definida, así, por el campo vectorial Γ en TP que en coordenadas locales x^a, v^a resulta ser:

$$\Gamma = v^a \frac{\partial}{\partial x^a} + F^a(x,v)\frac{\partial}{\partial v^a}.$$

Tratemos este problema como un problema de control óptimo. La primera ecuación del sistema (2.2), $\dot{x}^a = v^a$, va a jugar el papel de una ecuación de control o de estado en el espacio de estados P, donde los controles van a ser las velocidades generalizadas v^a. Como además se tiene que cumplir el principio de mínima acción, el funcional de acción va a ser aquí el funcional objetivo a minimizar. Por lo tanto, encontrar la dinámica asociada a este lagrangiano L es equivalente a encontrar las trayectorias extremales del problema de control con el funcional objetivo S, tiempo fijo y extremos fijos x_0, x_T.

Consideramos el espacio de velocidades y de momentos simultáneamente. El espacio de momentos o de "coestados" es el fibrado cotangente T^*P de P; este espacio tiene una 2–forma simpléctica canónica ω_P, que en las coordenadas locales x^a, p_a es $\omega_P = dx^a \wedge dp_a$. Por lo tanto, el espacio total que nos interesa es la suma de Whitney del espacio tangente y el cotangente, $M = TP \oplus T^*P$, con coordenadas locales (x^a, v^a, p_a). Este espacio M tiene varias proyecciones naturales. $\pi\colon TP \oplus T^*P \longrightarrow P$ es la fibración natural sobre P definida por $\pi(x, v, p) = x$. Las aplicaciones $pr_1\colon TP \oplus T^*P \longrightarrow TP$ y
$pr_2\colon TP \oplus T^*P \longrightarrow T^*P$ definidas por $pr_1(x, v, p) = (x, v)$ y $pr_2(x, v, p) = (x, p)$, respectivamente, proyectan $TP \oplus T^*P$ en el espacio de velocidades y en el espacio de momentos respectivamente.

La forma simpléctica ω_P induce mediante el pull-back a lo largo de pr_2 una forma presimpléctica en M, $\Omega = pr_2^*\omega_P$. La representación matricial de Ω en la base dx^a, dv^a y dp_a es la siguiente:

$$(\Omega) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & -I \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La distribución característica, $\ker\Omega$, de esta forma presimpléctica Ω, es decir, el conjunto de vectores Z tal que $i_Z\Omega = 0$, está formada por los campos vectoriales "verticales"[1] $\partial/\partial v^a$.
En M hay una función bien definida, el hamiltoniano,

$$H(x, v, p) = \langle p, v\rangle - L(x, v),$$

definido de la misma forma que el hamiltoniano de Pontryagin en la presentación estándar de la Teoría de Control Óptimo. Nótese que el hamiltoniano H está definido incluso si L no es regular y la transformada de Legendre no es un difeomorfismo local.

Tenemos, por tanto, un sistema hamiltoniano presimpléctico, es decir, una variedad presimpléctica (M, Ω) con una función hamiltoniana H en M. Queremos resolver la ecuación

$$i_X\Omega = dH \tag{2.3}$$

[1]Los vectores de la distribución característica de Ω son verticales en el sentido de que están en el núcleo de $(pr_2)_*$, es decir, que son tangentes a las fibras de la fibración $pr_2\colon M \longrightarrow T^*P$.

para obtener los llamados campos vectoriales "dinámicos" determinados por el sistema y cuyas curvas integrales son las soluciones de la dinámica definida por H. Está claro que la ecuación anterior (2.3) tendrá solución si se cumple que $i_Z dH = 0$ para todo $Z \in \ker \Omega$. Por lo tanto, debemos restringir el espacio total M al subespacio M_1 definido por las siguientes funciones:

$$\phi_a^{(1)} = i_{\partial/\partial v^a} dH = \frac{\partial H}{\partial v^a} = 0, \quad a = 1, \ldots, n,$$

lo que es equivalente a

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a},$$

es decir, M_1 es el grafo de la transformada de Legendre $F_L \colon TP \longrightarrow T^*P$, $F_L(q, v) = (q, \partial L/\partial v)$.

Restringidos a este subespacio M_1, la ecuación (2.3) tendrá soluciones de la forma

$$X = v^a \frac{\partial}{\partial x^a} + C^a \frac{\partial}{\partial v^a} + \frac{\partial L}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial p_a},$$

con el vector C^a satisfaciendo,

$$W_{ab} C^b = B_a,$$

donde

$$W_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b} \quad \text{y} \quad B_a = \frac{\partial L}{\partial x^a} + v^b \frac{\partial^2 L}{\partial v^b \partial x^a}.$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación dinámica (2.3) será única en M_1 si W es invertible, es decir, si el lagrangiano L es regular. En cuyo caso recuperamos las ecuaciones (2.2). Nótese finalmente que, en este caso, las ecuaciones del movimiento escritas en función de x, p y u resultan:

$$\dot{x}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial x^a}, \quad \phi_a^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0, \qquad a = 1, \ldots, n,$$

coincidentes con las condiciones expresadas en el principio del máximo de Pontryagin (1.3).

Hay que destacar que hay algunas diferencias conceptuales importantes entre la Teoría de Control Óptimo y la Mecánica Lagrangiana. En ésta, el espacio de estados es un fibrado tangente TP en todos los casos; en la Teoría de Control, sin embargo, va a ser una variedad diferenciable P que no tiene por qué ser el tangente de otra variedad, esto es, la Teoría de Control Óptimo es más general. Por tanto, el concepto de estado es distinto en ambas teorías.

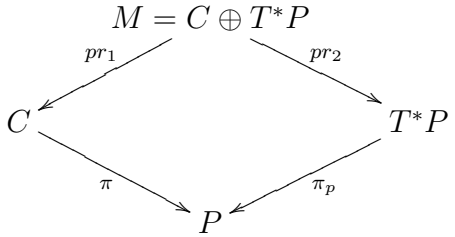
En la Mecánica Lagrangiana la dinámica viene definida no sólo por la ecuación (1.1), ($\dot{x} = v$), sino por ambas ecuaciones: (1.1)-(1.2), la de control y la ecuación del funcional objetivo. Además, en la Mecánica Lagrangiana no hay control, ya que el sistema se mueve siempre con el principio de mínima acción (más precisamente las soluciones han de ser extremales del funcional objetivo) dictado por

la naturaleza, luego en este sentido no es un problema de control, puesto que en la Teoría de Control se pretende "controlar" un sistema para que realice lo que queremos. En el caso general de control óptimo, la dinámica viene definida únicamente por la ecuación $\dot{x} = f(x, u)$. La otra ecuación (1.2) es independiente, ya que está impuesta externamente.

Por tanto, la Mecánica Lagrangiana, aunque formalmente puede ser tratada como un problema de control, no la podemos considerar realmente como un problema de control, ya que en éstos lo que se busca es poder controlar el sistema desde fuera. Aquí el sistema ha de cumplir el principio físico de mínima acción. Partiendo de un estado inicial el estado final está completamente determinado y, por lo tanto, no hay nada que controlar. Estamos utilizando las ecuaciones de control para resolver el problema de forma distinta a la usual, ya que, tomando un sistema de control equivalente, es decir, un problema donde $f(x, v) = v$, y L, el lagrangiano de la Mecánica, con las mismas ecuaciones y condiciones de contorno, el resultado obtenido sería matemáticamente el mismo.

2.2.2. El espacio de fases total y sus proyecciones naturales. La distribución vertical

Tal y como sugiere la anterior discusión sobre la descripción geométrica de la Mecánica Lagrangiana como un problema de control óptimo, el espacio de fases de control, que denotaremos de nuevo por M, lo construimos como el pull-back del fibrado C a lo largo de π_P, la proyección natural del fibrado cotangente $\pi_P \colon T^*P \longrightarrow P$, así $M = \pi^*(T^*P)$, o, equivalentemente como el pull-back del fibrado cotangente a P, también llamado espacio de coestados T^*P, a lo largo de π, $M = \pi_P^*(C)$. En ambos casos, el espacio M se puede describir como el conjunto de puntos (ξ, α), $\xi \in C$, $\alpha \in T^*P$ que verifican $\pi(\xi) = \pi_P(\alpha)$. El espacio M no es más que la suma de Whitney de la variedad C y la variedad cotangente de P, $M = C \oplus T^*P$. Las coordenadas canónicas en la variedad $(2n + m)$–dimensional M las denotamos como (x^i, p_i, u^a). Tenemos, además, dos proyecciones naturales $pr_1 \colon M \longrightarrow C$, $pr_1(x^i, p_i, u^a) = (x^i, u^a)$ y
$pr_2 \colon M \longrightarrow T^*P$, $pr_2(x^i, p_i, u^a) = (x^i, p_i)$, y la relación entre todas estas aplicaciones se recoge en el siguiente diagrama conmutativo:



Con respecto a pr_2, M es un fibrado sobre T^*P cuyas fibras son los espacios de controles mientras que, con respecto a pr_1, M es un fibrado sobre C con fibras los espacios de coestados.

El espacio M está equipado de forma natural con una 1–forma canónica, la 1–forma de Liouville θ, que en coordenadas locales (x^i, p_i, u^a) tiene la expresión $\theta = p_i dx^i$ y que de manera intrínseca está definida por:

$$\theta(\xi, \alpha_x)(U) = \langle \alpha_x, (\pi \circ pr_1)_*(U) \rangle = \langle \alpha_x, (\pi_P \circ pr_2)_*(U) \rangle, \quad \forall U \in T_{(\xi,\alpha_x)}M. \tag{2.4}$$

Donde, en la parte derecha de la ecuación (2.4), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad natural entre TP y T^*P. Asociada a esta 1–forma tenemos la 2–forma presimpléctica canónica Ω en M,

$$\Omega = -d\theta, \tag{2.5}$$

que en coordenadas locales es:

$$\Omega = dx^i \wedge dp_i.$$

Esta estructura coincide con la estructura presimpléctica Ω en M inducida mediante el pull-back a lo largo de pr_2 de ω_P, es decir,

$$\Omega = pr_2^* \omega_P. \tag{2.6}$$

La expresión en coordenadas locales de Ω es exactamente la misma que la de ω_P, $\Omega = dx^i \wedge dp_i$, y tiene rango constante igual a $2n$. Esta 2–forma cerrada Ω es degenerada. Su distribución característica $\ker \Omega$, que denotamos por K, está generada por los "campos vectoriales de control", $\partial/\partial u^a$, $a = 1, \ldots, m$,

$$K = \mathrm{Lin} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^a}, \quad a = 1, \ldots, m \right\}.$$

2.2.3. El espacio de coestados y el levantamiento hamiltoniano

De acuerdo con el axioma 2.1.2, la ecuación de estado es un campo vectorial en C a lo largo de la proyección $\pi \colon C \longrightarrow P$. Podemos extender de manera natural dicha ecuación a M.

Hay dos maneras equivalentes de definir el levantamiento cotangente de un campo vectorial X en una variedad diferenciable P, con coordenadas locales x^i, $X = f^i \partial/\partial x^i$, a un campo vectorial hamiltoniano en el espacio cotangente T^*P, con coordenadas locales (x^i, p_i).

Por un lado, podemos definir una función hamiltoniana, lineal en las coordenadas p_i, del modo siguiente [1]:

$$P_X(x, p) = p_i f^i(x) = \langle p, X(x) \rangle,$$

de tal forma que el campo vectorial hamiltoniano X_{P_X}definido por este hamiltoniano:

$$X_{P_X} = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

tiene la expresión local:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial P_x}{\partial p_i} = f^i(x) \tag{2.7}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial P_x}{\partial x^i} = -p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}, \tag{2.8}$$

siendo esta última ecuación (2.8) denominada habitualmente la ecuación adjunta de la primera (2.7).

Por otro lado, podemos considerar el flujo φ_t de X, esto es, $d\varphi_t/dt = X \circ \varphi_t$, y extenderlo a T^*P como $T\varphi_t^*\colon T^*P \longrightarrow T^*P$, donde $T\varphi_t\colon TP \longrightarrow TP$ es la aplicación tangente a $\varphi_t\colon P \longrightarrow P$ y, finalmente, definir
$\Phi_t := T\varphi_{-t}^*\colon T^*P \longrightarrow T^*P$, que nos proporciona un flujo en el espacio cotangente. El flujo Φ_t verifica claramente que:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = X_{P_X} \circ \Phi_t$$

y, por tanto, las curvas integrales de X_{P_X} se obtienen a partir de Φ_t. Esto es, si $(x(t), p(t))$ es el punto en T^*P solución de las ecuaciones (2.7)-(2.8) con valores iniciales (x_0, p_0) a tiempo t, entonces $(x(t), p(t)) = \Phi_t(x_0, p_0)$.
Si tenemos además un potencial $V(x)$ podemos definir un hamiltoniano del siguiente modo:

$$H(x,p) = P_x(x,p) + V(x) = p_i f^i(x) + V(x)$$

y podemos considerar el campo vectorial asociado a este hamiltoniano,
$X_{P_x+V} = X_H$.

En el caso de control óptimo tanto la ecuación de control, $\dot{x}^i = f^i(x,u)$, como el potencial, $V = V(x,u) = -L(x,u)$, dependen de unos parámetros (los controles u) y podemos definir el hamiltoniano H en M como
$H = H(x,p,u) = p_i f^i(x,u) - L(x,u)$ que dependería a su vez de los controles u.

Si no hubiera dependencia en los controles, tendríamos que el campo vectorial hamiltoniano X_H correspondiente a la función hamiltoniana H sería el levantamiento hamiltoniano del campo vectorial $X = f^i\partial/\partial x^i$. Si ω_P es la 2–forma canónica en T^*P, se tendría

$$i_{X_H}\omega_P = -dH$$

y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes al hamiltoniano H tendría la forma:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f^i(x,u), \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} - \frac{\partial V}{\partial x^i},$$

y concluiríamos que la curva $\gamma(t) = (x(t), u(t))$ es una "trayectoria optimal" si existe un levantamiento de $x(t)$ al espacio de coestados T^*P que satisfaga las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

Sin embargo, la dependencia en los controles complica ligeramente esta presentación.

2.2.4. El formalismo presimpléctico. La ecuación Dinámica

En el espacio de fases total M de un problema de control óptimo tenemos, por tanto, la función canónica hamiltoniana H definida como

$$H(x, p, u) = \langle \theta_{(x,p,u)}, \Gamma(x, u) \rangle - L(x, u) = p_i f^i(x, u) - L(x, u), \tag{2.9}$$

donde θ denota la 1–forma canónica de Liouville en M. Este hamiltoniano coincide con el definido por Pontryagin en la presentación estándar de la Teoría de Control Óptimo (1.4). La tripleta (M, Ω, H) define un sistema hamiltoniano presimpléctico cuya dinámica viene dada por todos los campos vectoriales Γ_C en M que satisfacen la ecuación dinámica:

$$i_{\Gamma_C}\Omega = dH. \tag{2.10}$$

2.2.5. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dinámica. La subvariedad de las ligaduras primarias

Como hemos visto en el apartado anterior Ω es degenerada y tiene núcleo distinto de cero; existirán soluciones Γ_C a la ecuación (2.10) si y sólo si

$$i_Z(dH) = 0, \quad \forall Z \in \ker \Omega = K.$$

Con la base $Z_a = \{\partial/\partial u^a\}$ para el núcleo K, la condición previa se convierte en:

$$\phi_a^{(1)} := i_{Z_a}(dH) = Z_a(dH) = \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0, \quad a = 1, \ldots, m,$$

y, por lo tanto, sólo habrá soluciones a la ecuación $i_{\Gamma_C}\Omega = dH$ en el subconjunto M_1 de M definido por:

$$M_1 = \left\{ (x, u, p) \in M \;\middle|\; \phi_a^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial u^a} = p_i \frac{\partial f^i}{\partial u^a} - \frac{\partial L}{\partial u^a} = 0 \right\}. \tag{2.11}$$

A las funciones $\phi_a^{(1)}$ las vamos a denominar ligaduras de primer orden o primarias de acuerdo con la terminología usual.

Puede ocurrir que este subconjunto M_1 no sea una subvariedad diferenciable. Sin embargo, tenemos que:

Lema 2.2.1 *M_1 es una subvariedad diferenciable $\iff$ $\mathbf{0}$ es un valor regular de la aplicación $\Phi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi = \{\phi_a^{(1)}\}$, $a = 1, \ldots, m$ $\iff$ $T\Phi_\xi$ es una aplicación sobreyectiva $\forall \xi \in \Phi^{(-1)}(\mathbf{0})$, es decir, la matriz*

$$T\Phi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right]$$

tiene rango máximo $\forall \xi \in M_1$.

Por otro lado, tenemos el conocido resultado sobre los valores críticos (no regulares) de una aplicación.

Lema 2.2.2 (Lema de Sard) *El conjunto de valores críticos de una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables es un conjunto de medida nula.*

Gracias al lema de Sard sabemos que si tenemos un valor crítico c_0 de una aplicación diferenciable, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, c$ tal que $|c - c_0| < \varepsilon$ y c es un valor regular de Φ, es decir, que tan cerca como queramos del valor crítico tenemos un valor regular de la aplicación.

Podemos construir la siguiente forma cuadrática a lo largo de la fibración vertical de $pr_2|_{M_1}$ definida localmente como

$$W = W_{ab} du^a \otimes du^b, \tag{2.12}$$

siendo $W_{ab} = \partial^2 H / \partial u^a \partial u^b$. La forma cuadrática W es un objeto intrínseco, es decir, que no depende de las coordenadas, puesto que es la derivada fibrada o vertical segunda de una función [7].

Con esta forma cuadrática establecemos ya la definición de regularidad desde el punto de vista de control óptimo.

Definición 2.2.1 *El problema de control óptimo definido por las ecuaciones (1.1) y (1.2) se dice regular en el punto $\xi_0 = (x_0, p_0, u_0)$ si la forma cuadrática W es regular en dicho punto. Diremos que el problema (P, C, Γ, L) es regular si W es regular en todo punto de la subvariedad M_1, en otro caso diremos que el problema es singular en el sentido de control óptimo.*

Entonces, tenemos que si $\mathbf{0}$ es un valor crítico de $\Phi \Longrightarrow$ W es no invertible y, por tanto, hay puntos en M_1 singulares en el sentido de control óptimo. Por otro lado, si los puntos de M_1 no son singulares en el sentido de control óptimo $\Longrightarrow \mathbf{0}$ es un valor regular para Φ.

Entonces, la pregunta es la siguiente: ¿Existe un sistema de control óptimo próximo al original de manera que $\mathbf{0}$ sea un valor regular y no altere la naturaleza de la singularidad como problema de control óptimo? La respuesta es que sí. Si tenemos el problema de control óptimo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ S &= \int_0^T L(x,u)\,dt, \end{aligned}$$

el hamiltoniano de Pontryagin es, como hemos definido previamente,

$$H = pf(x,u) - L(x,u)$$

y, por lo tanto, las ligaduras primarias quedan

$$\Phi = \frac{\partial H}{\partial u} = p\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial u}.$$

La derivada de esta aplicación es la siguiente:

$$T\Phi = \left[p\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u},\ \frac{\partial f}{\partial u},\ p\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\right].$$

Si esta aplicación no tiene rango máximo en un punto dado, podemos perturbar el problema de partida de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f_\varepsilon(x,u) = f(x,u) + \varepsilon\rho(u)Bu, \tag{2.13}$$

donde B es una matriz de rango máximo de tal forma que $\operatorname{rank}(\partial f_\varepsilon/\partial u)$ sea máximo en un punto dado (y, por tanto, en un entorno de él), además, el funcional objetivo no se modifica y $\rho(u)$ es una función "bump" con dominio en un disco de radio 1 en torno al punto crítico. Es importante señalar que no estamos cambiando la caracterización del problema como problema de control óptimo singular, puesto que la nueva matriz W_ε cumple que $W_\varepsilon = W,\ \forall\varepsilon$, ya que hemos introducido una perturbación lineal en los controles. Hemos probado por tanto el siguiente lema:

Lema 2.2.3 *Dado un problema de control óptimo (P, C, Γ, L) tal que $\xi_0 = (x_0, p_0, u_0)$ es un punto crítico para Φ y dado $\varepsilon > 0$ existe un problema de control óptimo $(P, C, \Gamma_\varepsilon, L)$ tal que ξ_0 es un punto regular para Φ_ε y $\|\Gamma_\varepsilon - \Gamma\|_\infty < \varepsilon$. Además, la naturaleza de ξ_0 como punto singular del problema de control óptimo no cambia.*

Por ejemplo, en los problemas LQ las ligaduras primarias son $\Phi = \phi^{(1)} = -x^TQ + p^TB - u^TR$, y la matriz $T\Phi$ queda de la forma siguiente:

$$T\Phi = \left[-Q,\ B^T, -R^T\right],$$

por lo tanto, tenemos:

- Si la matriz $T\Phi$ no tiene rango máximo y, por tanto, ninguna de las matrices $Q,\ B$ y R tiene rango máximo, entonces estamos ante un problema singular para la aplicación Φ. Nótese que puede ocurrir que Q, B y R no tengan rango máximo y $T\Phi$ sí. Por ejemplo:

$$T\Phi = \left[-Q,\ B^T, -R^T \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  y, por tanto, sería un problema regular.

- Si $T\Phi$ es de rango máximo pero W no, entonces estamos ante un problema regular con respecto a la aplicación Φ, pero es singular en el sentido de control óptimo.

Podríamos modificar el problema de otra manera para regularizarlo perturbando el lagrangiano como sigue:

$$L_\varepsilon = L(x,u) + \frac{1}{2}\varepsilon u^T u.$$

Claramente, cuando $\varepsilon \to 0$ se tiene que $L_\varepsilon \to L$, pero en este caso estamos eliminando también la singularidad de control óptimo, porque la matriz W_ε ahora es regular. Esta es básicamente la propuesta contenida en el análisis a través de perturbaciones singulares de problemas de control óptimo singulares, ver [64, 65, 66, 79], pero que presentan importantes dificultades como ya vimos en la introducción.

Hemos visto en el apartado anterior la condición necesaria para la existencia de dinámica. Sólo va a ocurrir en la subvariedad M_1. Vamos a ver ahora cómo tienen que ser los campos vectoriales Γ_C para que sus curvas integrales permanezcan en M_1. Si el campo vectorial lo escribimos de la manera siguiente:

$$\Gamma_C = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C^a \frac{\partial}{\partial u^a}, \tag{2.14}$$

al imponer que se cumpla la ecuación dinámica (2.10), se obtiene que

$$\dot{x}^i dp_i - \dot{p}_i dx^i = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial u^a} du^a,$$

de donde deducimos que las curvas integrales de Γ_C verifican las ecuaciones del principio del máximo de Pontryagin (1.3) como ya señalamos anteriormente:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f^i \tag{2.15}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u^a} = p_j \frac{\partial f^j}{\partial u^a} - \frac{\partial L}{\partial u^a} = 0. \tag{2.17}$$

Las soluciones de estas ecuaciones las llamaremos curvas optimales críticas. El campo vectorial Γ_C queda indeterminado al no aparecer las derivadas de los controles y su expresión es:

$$\Gamma_C = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} + C^a \frac{\partial}{\partial u^a}. \tag{2.18}$$

Entonces, en M_1 hay solución de la ecuación de la dinámica (2.10), pero no sabemos si los campos vectoriales Γ_C son paralelos a esta subvariedad, donde paralelo significa que cualquier trayectoria que parta de M_1 va a permanecer todo el tiempo posterior en la subvariedad M_1. Veremos más adelante que esta condición es necesaria para la consistencia de las ecuaciones (ver § 3.1.3). Para que esto se cumpla, tenemos que imponer que el campo deje invariante a la subvariedad, es decir, que aplicado a las ecuaciones que definen la subvariedad M_1 se anule:

$$\Gamma_C(\phi_a^{(1)}) = 0 \ \text{ en } M_1, \tag{2.19}$$

por lo tanto, en M_1 :

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_C(\phi_a^{(1)}) = f^i \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial u^a} + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial u^a} + C^b \frac{\partial^2 H}{\partial u^b \partial u^a} = \\ &= f^i \left(p_j \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial u^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial u^a} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f^i}{\partial u^a} + \\ &+ C^b \left(p_i \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^b \partial u^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^b \partial u^a} \right). \end{aligned}$$

Como ya indicamos previamente, diremos que el problema es regular si la siguiente matriz es invertible en cada punto de M_1:

$$W_{ab} = \left(p_i \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^b \partial u^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^b \partial u^a} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial u^a \partial u^b} = \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial u^b}. \tag{2.20}$$

Si W es invertible podemos obtener C^b como:

$$\begin{aligned} C^b &= -W^{ab} \left\{ f^i \left(p_j \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^i \partial u^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial u^a} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f^i}{\partial u^a} \right\} = \\ &= W^{ab} B_a, \end{aligned}$$

donde $W^{ab} W_{bc} = \delta^a_c$. En cuyo caso se tiene solución única y va a existir un campo vectorial dinámico Γ_C, único y bien definido en M_1, cuyas curvas integrales van a ser trayectorias extremales de S y tangente en todo punto a la subvariedad M_1. Podemos, además, despejar los controles de las ecuaciones $\phi_a^{(1)} = 0$, (2.11), que nos definen la subvariedad M_1 en función de las variables $(x, p) \in T^*P$, y así obtenemos un "feedback" optimal:

$$u^a = u^a(x, p), \tag{2.21}$$

con esta definición local de los controles, la introducimos en las ecuaciones del problema (1.1) y (1.2) y nos queda localmente un sistema en el fibrado cotangente a P, T^*P. Si la matriz W_{ab} no fuera invertible, podrían ocurrir dos cosas:

- rank(W) constante.
- rank(W) no constante.

La literatura sobre sistemas presimplécticos trata casi exclusivamente el primer caso o situaciones donde se suponen condiciones de regularidad que permiten avanzar en su análisis [86, 87, 45, 46, 47]. En esta memoria realizaremos suposiciones equivalentes, como se explicará en el siguiente capítulo donde se analizarán varios algoritmos de ligaduras que permiten determinar eventualmente una subvariedad final donde existe solución al problema propuesto. No habrá una solución optimal cuando el punto inicial o final no pertenezcan a la subvariedad final, pero en estos casos se pueden buscar soluciones "cuasioptimales", que son soluciones que en la parte de la subvariedad final siguen una trayectoria optimal y fuera de ésta siguen un camino de bajo coste. Veremos en el capítulo 4, § 4.3, un ejemplo de esta situación.

El segundo caso es más difícil de abordar, aunque se puede tratar con la Teoría General de Singularidades de Aplicaciones. Este problema es realmente el problema general y veremos algunos ejemplos e ideas para su tratamiento en el capítulo 4, § 4.1 y § 4.2.

2.2.6. Problemas de control óptimo regulares. El sistema hamiltoniano equivalente (M_1, Ω_1, H_1)

Hay una interpretación muy interesante de la noción de la regularidad de un sistema de control óptimo basada en la noción de singularidades de aplicaciones. La variedad M proyecta sobre T^*P mediante la aplicación de proyección $pr_2 \colon M \longrightarrow T^*P$. La subvariedad M_1, definida mediante las funciones de ligadura $\phi_a^{(1)}$, proyecta sobre T^*P al restringir la aplicación de proyección pr_2 a ésta. Vamos a denotar la restricción de pr_2 a M_1 como p_1, es decir, $p_1 = pr_2|_{M_1}$, y la inmersión de ésta en M como $i_1 \colon M_1 \longrightarrow M$, por tanto, $p_1 = pr_2 \circ i_1$. La subvariedad M_1 hereda, por tanto, una 2–forma cerrada $\Omega_1 = i_1^*\Omega$. Finalmente, si denotamos por W_1 la restricción de W a M_1, tenemos:

Lema 2.2.4

$$\ker \Omega_1 = \ker p_{1*} = TM_1 \cap K = \ker W_1.$$

Demostración. Demostramos la primera igualdad, $\ker \Omega_1 = \ker p_{1*}$:
$\Omega_1 = i_1^*\Omega = i_1^* pr_2^* \omega_P = (pr_2 \circ i_1)^* \omega_P = p_1^* \omega_P$ luego

$$\begin{aligned} U \in \ker\, \Omega_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad i_U(p_1^*\omega_P) = 0 \iff i_{(p_{1*}U)}\omega_P = 0 \iff p_{1*}U = 0 \iff \\ &\Longleftrightarrow \quad U \in \ker\, p_{1*}. \end{aligned}$$

Demostramos ahora la segunda igualdad. El núcleo de Ω_1 en un punto ξ viene dado por $T_\xi M_1 \cap K_\xi$, porque

$$\Omega_1(\xi)(v,.) = i_1^*\Omega(\xi)(v,.) = \Omega(i_1(\xi))(i_{1*}(v),.) = 0,$$

$$\ker\, p_{1*} = \{\, U \in T_\xi M_1 |\; p_{1*}(U) = 0 \,\} = T_\xi M_1 \cap \ker\,(pr_{2*}) = T_\xi M_1 \cap K_\xi.$$

Finalmente, calculamos esa intersección

$$\left\{ \begin{array}{ll} U \in T_\xi M_1 & \Longleftrightarrow\; d\phi_a^{(1)}(U) = 0,\; \forall\; a = 1, \ldots, m, \\ U \in K & \Longleftrightarrow\; U = C^a \frac{\partial}{\partial u^a}, \end{array} \right. ,$$

y, por tanto,

$$d\phi_a^{(1)}(U) = C^b \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial u^b} = C^b \frac{\partial^2 H}{\partial u^a u^b} = 0 \iff U \in \ker\, W_1.$$

□

Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El punto $\xi = (x, p, u) \in M_1$ es regular.*
2. $\det\, W_{ab}(\xi) \neq 0$.
3. $T_\xi M_1 \cap K_\xi = 0$.
4. *p_1 es un difeomorfismo local en ξ.*
5. *pr_2 es transversal a M_1 en ξ.*
6. *Ω_1 es de rango máximo en ξ.*
7. *p_1 define un simplectomorfismo local entre (M_1, Ω_1) y (T^*P, w_p) en ξ.*
8. *Existe una solución única maximal de la ecuación $i_\Gamma \Omega_1 = dH_1$ que pasa por ξ.*
9. *Existe una única curva optimal crítica a través de ξ.*

2.3. Formulación lagrangiana del problema de Control Óptimo regular

Los apartados 6 y 7 del Teorema 2.2.1 nos dicen que al proyectar localmente M_1 sobre T^*P en torno a un punto regular tenemos de nuevo la 2–forma ω_P y un hamiltoniano $h_1 = H(x, u(x,p), p) \equiv h_1(x,p)$. Por tanto, tenemos localmente un sistema hamiltoniano en (T^*P, ω, h_1). Si p_1 fuera un difeomorfismo global, en cuyo caso podríamos llamar a tales sistemas de control óptimo hiperregulares en semejanza de nuevo a la Mecánica Lagrangiana, entonces la transformada de Legendre inversa en T^*P definida por H llevaría el sistema hamiltoniano global antes definido a un sistema lagrangiano equivalente $(T^*P, \omega_P, h_1) \longrightarrow (TP, \omega_{\tilde{L}}, \tilde{L})$.

Veamos ahora la relación que existe entre la regularidad de la matriz W, la matriz de segundas derivadas del hamiltoniano respecto de p, $\partial^2 h_1/\partial p^2$, y la matriz de segundas derivadas del lagrangiano respecto de $\dot{x}$. Primero, calculamos la matriz de segundas derivadas de h_1 respecto de p en M_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial p_i} &= f^i + \left(p_k \frac{\partial f^k}{\partial u_a} - \frac{\partial L}{\partial u_a} \right) \frac{\partial u^a}{\partial p_i}, \\
\frac{\partial^2 h_1}{\partial p_j \partial p_i} &= \frac{\partial f^i}{\partial u^a}\frac{\partial u^a}{\partial p_j} + \left[\frac{\partial f^j}{\partial u^a} + \left(p_k \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^b \partial u^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial u^b \partial u^a} \right) \frac{\partial u^b}{\partial p_j} \right] \frac{\partial u^a}{\partial p_i} + \\
&+ \phi_a^{(1)} \frac{\partial^2 u^a}{\partial p_i \partial p_j} = 2 \frac{\partial f^i}{\partial u^a}\frac{\partial u^a}{\partial p_j} + W_{ab}\frac{\partial u^b}{\partial p_j}\frac{\partial u^a}{\partial p_i}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Como se tiene que verificar en M_1 que

$$\frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_i} + \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial u^b}\frac{\partial u^b}{\partial p_i} = 0,$$

tendremos que

$$W_{ab}\frac{\partial u^b}{\partial p_i} = -\frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_i} = -\frac{\partial f^i}{\partial u^a}.$$

Como la matriz W es invertible, podemos despejar $\partial u^b/\partial p_i$ de la ecuación anterior

$$\frac{\partial u^b}{\partial p_i} = -W^{ab}\frac{\partial f^i}{\partial u^a},$$

y obtener la expresión siguiente sustituyendo en (2.22):

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial p_j \partial p_i} = -\frac{\partial f^i}{\partial u^a} W^{ab} \frac{\partial f^j}{\partial u^b}.$$

Matricialmente esta ecuación quedaría de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial p^T \partial p^T} = -\frac{\partial f}{\partial u} W^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial u},$$

por lo tanto, observamos que para que $\partial^2 h_1/\partial p^T \partial p^T$ sea regular es condición necesaria que lo sea W.

Ahora vamos a calcular la matriz de segundas derivadas del lagrangiano respecto de $\dot{x}$. Partimos de las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0.$$

Tenemos que, debido a la relación de "feedback" optimal:

$$\widetilde{L} = p_i(x, \dot{x})\dot{x}^i - h_1(x, u(x, p(x, \dot{x})), p(x, \dot{x}))$$

y podemos escribir el lagrangiano en función de las coordenadas $(x, \dot{x})$. Procedemos a derivar respecto de $\dot{x}$ obteniéndose:

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{x}^i} = p_i(x, \dot{x}) + \dot{x}^j \frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial h_1}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^i} = p_i(x, \dot{x}),$$

como debía ocurrir. Derivando de nuevo

$$\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^j},$$

pero como tenemos que,

$$\dot{x}^i = \frac{\partial h_1}{\partial p_i} = f^i + \left(p_j \frac{\partial f^j}{\partial u^a} - \frac{\partial L}{\partial u^a} \right) \frac{\partial u^a}{\partial p_i}$$

$$1 = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(\frac{\partial h_1}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial^2 h_1}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^i},$$

y podremos despejar $\partial p_j/\partial \dot{x}^i$ de esta última fórmula si la matriz $\partial^2 h_1/\partial {p^T}^2$ es invertible

$$\frac{\partial p^T}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial p^T \partial p^T} \right)^{-1}.$$

Finalmente, la ecuación que buscábamos es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} = \frac{\partial p^T}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial p^T \partial p^T} \right)^{-1} = -\left(\frac{\partial f^T}{\partial u} \right)^{-1} W \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^{-1}.$$

Vemos de nuevo cómo nos aparece la matriz W. Si ésta es singular no podremos pasar al sistema lagrangiano equivalente, aunque también será necesario que la

matriz $\partial f/\partial u$ sea invertible para poder llegar hasta este punto, lo cual se puede lograr con una pequeña perturbación del sistema como hicimos en § 2.2.5 en la ecuación (2.13). Por tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema lagrangiano equivalente son

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}W^{-1}\frac{\partial f^T}{\partial u}\right)\left[p^T\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x}\right]. \tag{2.23}$$

Dos ejemplos sencillos

Veamos cómo quedan las matrices anteriores en algunos ejemplos sencillos. En el primer ejemplo sí podemos construir el sistema lagrangiano equivalente. La ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ L &= \frac{1}{2}\varepsilon^2(u_1^2+u_2^2),\end{aligned}$$

por tanto, el hamiltoniano es

$$H = p_1u_1 + p_2u_2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2(u_1^2+u_2^2).$$

Claramente, es un problema de control óptimo regular donde la matriz $W = -\varepsilon^2 I_2$, como $\partial f/\partial u = I_2$ la matriz

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial p^T \partial p^T} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible y comprobamos que se verifican los cálculos previos. Finalmente, comprobamos que podemos hallar la matriz

$$\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial \dot{x}^2} = \varepsilon^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es de nuevo invertible. Si ε se anula, entonces estas matrices son singulares y la última matriz no la podemos obtener.

Por último, mostramos un ejemplo donde la matriz W es regular, pero no podemos pasar de una formulación a otra porque la matriz $\partial f/\partial u$ es singular. La ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ L &= \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\varepsilon^2 u),\end{aligned}$$

el hamiltoniano es

$$H = p_2 x_2 + (2p_1 + p_2)u - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \varepsilon^2 u),$$

la matriz $W = -\varepsilon^2$ es de nuevo invertible y, por tanto, se obtiene un "feedback" optimal $u = (2p_1 + p_2)/\varepsilon^2$, pero no podemos pasar a la formulación lagrangiana equivalente porque la matriz

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial p^T \partial p^T} = -\frac{\partial f}{\partial u} W^{-1} \frac{\partial f}{\partial u}^T = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

no es invertible y no podemos obtener, por tanto, la matriz $\partial^2 \widetilde{L}/\partial \dot{x} \partial \dot{x}$.

2.4. El marco analítico de la Teoría Geométrica de Control Óptimo. El principio de máximo de Pontryagin

2.4.1. El principio de máximo de Pontryagin y el cálculo de variaciones

La formulación geométrica presentada anteriormente, § 2.2 y § 2.3, fue obtenida por mera analogía con la formulación presimpléctica de la Mecánica Lagrangiana tras realizar los cambios obvios. Sin embargo, la formulación geométrica de la Mecánica Lagrangiana se deriva directamente de un principio variacional, el principio de mínima acción de Hamilton. Podemos hacer algo semejante a partir de la formulación del problema de control óptimo con extremos fijos x_0, x_T.

Consideremos en el espacio P el conjunto de curvas C^∞, $\gamma \colon I \longrightarrow P$; $I = [0, T]$, con extremos fijos x_0, x_T; $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(T) = x_T$. Denotemos tal conjunto como $\Omega_{x_0,x_T}(P)$. Si estamos en un problema de control óptimo deberíamos considerar el espacio total de controles C que proyecta sobre P. En este espacio consideramos las curvas C^∞, $\widetilde{\gamma} \colon I \longrightarrow C$ tales que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma \in \Omega_{x_0,x_T}(P)$. De nuevo, denotaremos tal espacio de curvas como $\Omega_{x_0,x_T}(C)$. Dada una curva $\widetilde{\gamma} = (x(t), u(t)) \in C$, llamaremos una variación de $\widetilde{\gamma}$ a una familia de curvas σ alrededor de $\widetilde{\gamma}$ definidas como

$$\sigma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \longrightarrow C, \quad \sigma(s,t) \in C, \quad \sigma \in C^2,$$

y tal que $\sigma(0,t) = \widetilde{\gamma}(t)$ y $\pi(\sigma(s,0)) = x_0$; $\pi(\sigma(s,T)) = x_T$.

El vector tangente a lo largo de la curva $\widetilde{\gamma}(t)$ definido por σ es:

$$\delta\widetilde{\gamma}(t) := \frac{\partial}{\partial s}\sigma(s,t)\Big|_{s=0}.$$

Nótese que si escribimos $\delta\widetilde{\gamma} = (\delta x, \delta u)$, entonces $\delta x(0) = 0$; $\delta x(T) = 0$, mientras que las variaciones de los controles δu en los extremos son libres. Llamaremos al campo de vectores a lo largo de la curva $\widetilde{\gamma}$, un campo de variaciones de $\widetilde{\gamma}$ o una variación infinitesimal de $\widetilde{\gamma}$ (ver X. Gràcia, J. Marín–Solano, M. C. Muñoz–Lecanda [52] para una descripción más detallada de estas nociones).

Diremos que un funcional $S\colon \Omega_{x_0,x_T}(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\widetilde{\gamma}$ si para toda variación $\delta\widetilde{\gamma}$ existe una aplicación $dS_{\widetilde{\gamma}}$ lineal en $\delta\widetilde{\gamma}$ tal que para toda variación σ se tiene:

$$\frac{d}{ds}S(\sigma(s,t))\bigg|_{s=0} = dS_{\widetilde{\gamma}}(\delta\widetilde{\gamma})$$

y, además,

$$S(\sigma(s,t)) - S(\widetilde{\gamma}) = dS_{\widetilde{\gamma}}(\delta\widetilde{\gamma}) + R(\widetilde{\gamma}, \delta\widetilde{\gamma}),$$

con $R(\widetilde{\gamma}, \delta\widetilde{\gamma}) = O(\delta\widetilde{\gamma}^2)$ en el sentido de que si $|\delta\widetilde{\gamma}(t)| < \varepsilon$ y $|d\widetilde{\gamma}(t)/dt| < \varepsilon$, entonces $R < C\varepsilon^2$. Como veremos más adelante el funcional objetivo es diferenciable en este sentido y en el sentido un poco más riguroso del cálculo diferencial en variedades de Hilbert.

Podemos debilitar la condición de control óptimo requiriendo sólo que las curvas buscadas sean extremales del funcional y no mínimos estrictos, esto es, tales que $dS_{\widetilde{\gamma}} = 0$.

Calculando $dS_{\widetilde{\gamma}}$ para una variación cualquiera σ tenemos:

$$\begin{aligned} dS_{\widetilde{\gamma}}(\delta\widetilde{\gamma}) &= \frac{d}{ds}S(\sigma(s,t))\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}\int_0^T L(\sigma(s,t))\,dt\bigg|_{s=0} = \\ &= \int_0^T \frac{d}{ds}L(\sigma(s,t))\bigg|_{s=0} dt = \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i(t) + \frac{\partial L}{\partial u^a}\delta u^a(t)\right] dt. \end{aligned}$$

Si las variaciones δx y δu fueran realmente arbitrarias la conclusión seguiría inmediatamente del lema básico del cálculo de variaciones.

Lema 2.4.1 *Si la función continua f definida en $[0,T]$ verifica que*

$$\int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt = 0$$

para toda función φ, C^∞ en $[0,T]$, entonces $f = 0$.

Ahora bien, las curvas $\widetilde{\gamma}$ sobre las que deseamos hallar el mínimo de S verifican una condición adicional: la ecuación de estado $\dot{x} = f(x,u)$. Por tanto, si $\sigma(s,t)$ es una variación de la curva y verifica para todo s la ecuación de estado tendremos:

$$\frac{d}{dt}\pi \circ \sigma(s,t) = f(\sigma(s,t)), \quad \forall (s,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times I.$$

Derivando respecto a s e intercambiando las derivadas por el lema de Schwarz tendremos:

$$\frac{d}{dt}\delta x^i(t) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\delta x^j(t) + \frac{\partial f^i}{\partial u^a}\delta u^a(t), \tag{2.24}$$

que es la ecuación lineal satisfecha por las variaciones $(\delta x^i, \delta u^a)$ a lo largo de la curva $\widetilde{\gamma}$. Podremos escribir esta ecuación de otra manera más apropiada como sigue:

$$\left(\frac{d}{dt}\delta^i_j - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\delta x^j(t) - \frac{\partial f^i}{\partial u^a}\delta u^a(t) = 0. \tag{2.25}$$

Ahora bien, por razones que veremos de inmediato, podemos considerar d/dt como un operador que actúa en las variaciones infinitesimales δx^i y escribir

$$\frac{d}{dt}\delta x^i = \left(\frac{d}{dt}\delta x^i + \delta x^i\frac{d}{dt}\right) - \delta x^i\frac{d}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\delta^i_j, \delta x^j\right]_+ - \delta x^i\frac{d}{dt},$$

y la ecuación anterior (2.25) resulta:

$$\delta x^i\frac{d}{dt} + \delta x^j\frac{\partial f^i}{\partial x^j} + \delta u^a\frac{\partial f^i}{\partial u^a} = \left[\frac{d}{dt}\delta^i_j, \delta x^j\right]_+. \tag{2.26}$$

Podemos interpretar tanto esta ecuación (2.26) como las anteriores en el siguiente sentido. Si multiplicamos la ecuación (2.25) por una función $p_i(t)$ arbitraria, la ecuación sigue siendo cierta

$$p_i(t)\left(\frac{d}{dt}\delta^i_j - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\delta x^j - p_i(t)\,\frac{\partial f^i}{\partial u^a}\,\delta u^a = 0$$

y lo mismo ocurrirá en (2.26), donde tendremos

$$\delta x^i\frac{d}{dt}p_i + \delta x^j\frac{\partial f^i}{\partial x^j}p_i + \delta u^a\frac{\partial f^i}{\partial u^a}p_i = \left[\frac{d}{dt}\delta^i_j, \delta x^j\right]_+ p_i = \frac{d}{dt}(p_i\,\delta x^i). \tag{2.27}$$

Por tanto, hemos de buscar qué condiciones deben verificar $\partial L/\partial x^i$ y $\partial L/\partial u^a$ para que

$$\int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial u^a}\delta u^a\right)\,dt = 0 \tag{2.28}$$

siempre que δx^i, δu^a verifiquen la ecuación variacional (2.25) escrita anteriormente.

Obviamente, si se verifica que

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{dp_i}{dt} + p_j\frac{\partial f^j}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial L}{\partial u^a} = p_j\frac{\partial f^j}{\partial u^a} \tag{2.29}$$

para alguna función p, entonces:

$$\int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial u^a}\delta u^a\right) dt = \int_0^T \left[\left(\frac{dp_i}{dt} + p_j\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)\delta x^i + p_j\frac{\partial f^j}{\partial u^a}\delta u^a\right] dt = \\ = \int_0^T \frac{d}{dt}(p_i\delta x^i)\, dt = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones (2.29) constituyen una condición suficiente para que la curva $\widetilde{\gamma}(t)$ sea un extremal. Nótese que estas ecuaciones junto con la ecuación de estado son precisamente las ecuaciones del principio de máximo (1.3).

Sin embargo, el problema surge al tratar de probar si estas condiciones son necesarias y reproducir, así, el lema fundamental del cálculo de variaciones para esta situación y tener una demostración "directa" del teorema de Pontryagin. Tal lema no es trivial y su deducción y prueba nos va a ocupar en los próximos párrafos.

El primer paso para conseguir este objetivo consiste en escribir la ecuación (2.28) de manera más geométrica. Para ello observamos que podemos escribir (2.28) como:

$$0 = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial u^a}\delta u^a\right) dt = \left\langle \frac{\partial L}{\partial x^i}, \delta x^i \right\rangle_{L^2} + \left\langle \frac{\partial L}{\partial u^a}, \delta u^a \right\rangle_{L^2}, \qquad (2.30)$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ denota el producto L^2 en el espacio de funciones $\varphi\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2} = \int_0^T \varphi_i(t)\psi^i(t)\, dt.$$

Por otro lado, la ecuación (2.25) puede escribirse como

$$\mathfrak{L}(\delta x^i, \delta u^a) = 0,$$

donde $\mathfrak{L}$ es el operador lineal

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{d}{dt}\delta^j_i - \frac{\partial f^j}{\partial x^i}, -\frac{\partial f^j}{\partial u_a}\right)$$

actuando en el espacio de variaciones $(\delta x^i, \delta u^a)$. Si consideramos la ecuación (2.30) definida en dicho espacio la podemos escribir también como:

$$\big\langle (a,b), (\delta x^i, \delta u^a)\big\rangle = 0,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota ahora la suma directa de los productos internos en cada uno de los factores

$$\big\langle (a,b), (\delta x^i, \delta u^a)\big\rangle := \big\langle a, \delta x^i\big\rangle + \langle b, \delta u^a\rangle\,.$$

En dimensión finita el problema es trivial. Dado un espacio vectorial E con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, los vectores $\alpha \in E$ tales que $\langle \alpha, v \rangle = 0$ siempre que $\mathfrak{L}v = 0$, donde $\mathfrak{L}\colon E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, son aquellos tales que $\alpha \in (\ker \mathfrak{L})^{\perp}$. Alternativamente, dichos vectores pueden caracterizarse como sigue:

$$v \in \ker \mathfrak{L} \iff \langle p, \mathfrak{L}v \rangle = 0, \ \forall p \in F,$$

esto es,

$$\langle \mathfrak{L}^{+} p, v \rangle = 0, \ \forall p \in F.$$

Por tanto,

$$v \in \ker \mathfrak{L} \iff v \in (\mathrm{Ran}(\mathfrak{L}^{+}))^{\perp}.$$

Tenemos, así, que la solución del problema anterior está dada por los vectores $\alpha \in E$ tales que

$$\alpha \in (\mathrm{Ran}(\mathfrak{L}^{+}))^{\perp\perp} = \mathrm{Ran}(\mathfrak{L}^{+}),$$

esto es, tales que $\exists\, f \in F$ con $\alpha = \mathfrak{L}^{+} f$.

Por tanto, nuestro problema para determinar $(\partial L/\partial x^i, \partial L/\partial u^a)$ es el mismo con respecto a la variación $(\delta x^i, \delta u^a)$. Si llamamos $\mathcal{H}$ al espacio de las variaciones $(\delta x^i, \delta u^a)$ y $\mathfrak{L}\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ al operador

$$\mathfrak{L}(\delta x^i, \delta u^a) = \frac{d}{dt}\delta_i^j \delta x^i - \frac{\partial f^j}{\partial x^i}\delta x^i - \frac{\partial f^j}{\partial u^a}\delta u^a,$$

queremos hallar $\alpha = (\partial L/\partial x^i, \partial L/\partial u^a)$ tal que $\langle \alpha, (\delta x^i, \delta u^a) \rangle = 0$ para todo $(\delta x^i, \delta u^a)$ tal que $\mathfrak{L}(\delta x^i, \delta u^a) = 0$. La solución formal de acuerdo con el argumento anterior la constituyen los vectores α tales que existe $p \in \mathcal{K}$ con

$$\alpha = \mathfrak{L}^{+}(p).$$

Si de momento suponemos que $\mathcal{K} = L^2([0,t]; \mathbb{R}^n)$, un sencillo cálculo muestra que $\alpha = \mathfrak{L}^{+}(p)$ es equivalente a

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{dp_i}{dt} + p_j \frac{\partial f^i}{\partial x^i}; \quad \frac{\partial L}{\partial u_a} = p_j \frac{\partial f^j}{\partial u^a} \tag{2.31}$$

y, así, habríamos probado la necesidad de dichas ecuaciones.

Obviamente, la extensión a dimensión infinita del sencillo argumento anterior requiere precisar el marco geométrico y construir cuidadosamente sus ingredientes. Así, tendremos en primer lugar:

Lema 2.4.2 *Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert y sea $\mathfrak{L}\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ un operador lineal densamente definido. Entonces un vector $\alpha \in \mathcal{H}$ verifica $\langle \alpha, v \rangle = 0$ para todo v tal que $\mathfrak{L}v = 0$ si y sólo si*

$$\alpha \in \overline{(\mathrm{Ran}\mathfrak{L}^{+})}.$$

Demostración. Como $\mathfrak{L}$ está densamente definido en $\mathcal{H}$, existe el operador adjunto $\mathfrak{L}^+\colon \longrightarrow \mathcal{H}$ que satisface

$$\langle p, \mathfrak{L}v\rangle = \langle \mathfrak{L}^+ p, v\rangle,\ \forall v \in \mathrm{D}(\mathfrak{L}),\ \forall p \in \mathrm{D}(\mathfrak{L}^+).$$

Por tanto, $\langle \alpha, v\rangle = 0,\ \forall v \in \ker \mathfrak{L} \iff \alpha \in (\ker \mathfrak{L})^\perp$. Por otro lado, $v \in \ker \mathfrak{L} \iff v \in (\mathrm{Ran}\, \mathfrak{L}^+)^\perp$ y, por tanto, $\langle \alpha, v\rangle = 0,\ \forall v \in \ker \mathfrak{L} \iff \alpha \in (\ker \mathfrak{L})^\perp = (\mathrm{Ran}\, \mathfrak{L}^+)^{\perp\perp} = \overline{(\mathrm{Ran}\, \mathfrak{L}^+)}$. □

Terminamos esta discusión fijando los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ que aparecen en la discusión anterior. Recordemos que las variaciones δx y δu son vectores tangentes a C a lo largo de la curva $\gamma(t)$. Por tanto, $\delta x\colon I \longrightarrow TP$ es una aplicación tal que $\delta x(t) \in T_{\gamma(t)}P$. Esto es, $\delta x \in \gamma^*(TP)$ donde $\gamma^*(TP) \longrightarrow I$ es el pull–back del fibrado TP a lo largo de γ. Ahora bien, como I es contractible, el fibrado $\gamma^*(TP) \longrightarrow I$ es trivial. Escogiendo una trivialización cualquiera podemos identificar dicho fibrado con el producto cartesiano $I \times \mathbb{R}^n$. Así, con estas convenciones, podemos pensar que δx es simplemente una aplicación $\delta x\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Análogamente, para δu que se puede pensar como $\delta u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Podemos tomar como espacios, por tanto, $\mathcal{H} = L^2(I; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ y $\mathcal{K} = L^2(I; \mathbb{R}^n)$. El operador $\mathfrak{L}$ está definido en el dominio denso $\mathrm{D}(\mathfrak{L}) = \{\, \delta x\colon I \to \mathbb{R}^n,\ \delta u\colon I \to \mathbb{R}^m |\ \delta x$ es a. c., $\delta x(0) = \delta x(T) = 0, \delta u \in L^2\,\}$. Nótese que el operador $\mathfrak{L}$ no es continuo, aunque es cerrado. En este espacio, por tanto, la condición para que la curva $\widetilde{\gamma}(t)$ sea un extremal óptimo es que el vector $(\partial L/\partial x, \partial L/\partial u) \circ \widetilde{\gamma} \in \overline{(\mathrm{Ran}\, \mathfrak{L}^+)}$.

Definición 2.4.1 *Diremos que el extremal optimal $\widetilde{\gamma}$ es ordinario si*

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}(\widetilde{\gamma}(t)), \frac{\partial L}{\partial u}(\widetilde{\gamma}(t))\right) \in \mathrm{Ran}\, \mathfrak{L}^+,$$

y anómalo en caso contrario.

Si $\widetilde{\gamma}(t)$ es un extremal ordinario, entonces existe $p(t) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ tal que $(\partial L/\partial x(\gamma(t)), \partial L/\partial u(\gamma(t))) = \mathfrak{L}^+(p)$ y, por lo tanto, se verifican las ecuaciones (2.31), que constituyen las ecuaciones habituales para los extremales normales en la teoría de Pontryagin clásica. Una pregunta que dejamos sin contestar consiste en establecer una caracterización de los extremales optimales anómalos y su relación, si es que existe, con los extremales anormales de la teoría de Pontryagin clásica.

Nótese que para establecer los resultados anteriores no hemos necesitado realizar ninguna suposición estricta sobre el espacio de curvas $\gamma(t)$, sino sobre las variaciones que podemos considerar. Si queremos interpretar las variaciones como auténticos vectores tangentes a una variedad de curvas, entonces debemos trabajar un poco más y equipar a un espacio de curvas adecuado con una estructura de variedad diferenciable de dimensión infinita.

Si hacemos esto, los resultados que acabamos de establecer se convierten en la teoría geométrica que describe la teoría de los multiplicadores de Lagrange. Dedicaremos los siguientes apartados a discutir estos extremos.

2.4.2. Variedades de Hilbert de curvas en variedades riemannianas

Comenzaremos esta discusión introduciendo las nociones básicas de la teoría de espacios de Sobolev y de Hilbert que vamos a necesitar a continuación. Ver S. L. Sobolev [98].

Definición 2.4.2 *Se define el espacio de curvas de Sobolev L^p de clase k en $\mathbb{R}^r$ como:*

$$L^p_k(I;\mathbb{R}^r) = \left\{ \gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^r |\ \gamma \in L^p(I;\mathbb{R}) \ y\ \exists\ \frac{d\gamma}{dt}, \ldots, \frac{d^k\gamma}{dt^k} \in L^p(I;\mathbb{R}^r) \right\}.$$

La notación $d\gamma/dt$ en la definición anterior representa la derivada débil de γ, es decir, que $\forall \varphi \in C^\infty_0([0,T],\mathbb{R}^r)$, se tiene

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \varphi \right\rangle dt = -\int_0^T \left\langle \gamma, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle dt,$$

donde $C^\infty_0([0,T],\mathbb{R}^r)$ denota el conjunto de funciones C^∞ de soporte compacto contenido en $(0,T)$.

El espacio de Sobolev es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ definida de la forma siguiente:

$$\|\gamma\|^p_{k,p} = \sum_{l=0}^{k} \int_0^T \left\| \frac{d^l\gamma}{dt^l}(t) \right\|^p dt.$$

En el caso particular $p = 2$, tenemos el espacio $L^2_k(I;\mathbb{R}^r)$ que también se denota como $H^k(I;\mathbb{R}^r)$, ó $W^{2,k}(I,\mathbb{R}^r)$, es decir,

$$H^k(I;\mathbb{R}^r) = \left\{ \gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^r |\ \gamma \in L^2(I;\mathbb{R}) \text{ y } \exists\ \frac{d\gamma}{dt}, \ldots, \frac{d^k\gamma}{dt^k} \in L^2(I;\mathbb{R}^r) \right\}.$$

Este espacio, $H^k(I;\mathbb{R}^r)$, es un espacio de Hilbert real, con respecto al producto interno

$$\langle \gamma, \widetilde{\gamma} \rangle_k = \sum_{l=0}^{k} \int_0^T \left\langle \frac{d^l\gamma}{dt^l}(t), \frac{d^l\widetilde{\gamma}}{dt^l}(t) \right\rangle dt.$$

En particular los casos $k = 0, 1$ van a ser los de mayor interés a lo largo de todo este trabajo. El espacio correspondiente a $k = 1$ es $H^1(I;\mathbb{R}^r)$, que es el espacio

de funciones absolutamente continuas $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $d\gamma/dt \in L^2(I;\mathbb{R}^r)$, con el producto interno

$$\langle \gamma, \widetilde{\gamma} \rangle_1 = \int_0^T \langle \gamma(t), \widetilde{\gamma}(t) \rangle \, dt + \int_0^T \left\langle \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}(t) \right\rangle \, dt.$$

Esta aplicación no sólo es continua sino compacta. Además, los teoremas de embedding de Sobolev muestran que hay un embedding natural continuo $i\colon H^1(I;\mathbb{R}^r) \hookrightarrow C^0(I;\mathbb{R}^r)$. El espacio correspondiente a $k = 0$ es $H^0(I;\mathbb{R}^r) = L^2(I;\mathbb{R}^r)$.

Otra forma de definir los espacios de curvas de Sovolev es como la compleción del espacio $C^\infty(I;\mathbb{R}^r)$ con respecto a la norma $\| \cdot \|_{k,p}$:

$$\overline{C^\infty(I;\mathbb{R}^r)}^{\|\cdot\|_{k,p}} = L^p_k(I;\mathbb{R}^r).$$

Si consideramos ahora el espacio anterior, pero con soporte compacto, $C^\infty_0(I;\mathbb{R}^r)$, es decir, formado por funciones diferenciables con soporte compacto, para $p = 2$ tenemos que

$$H^k_0(I;\mathbb{R}^r) = \overline{C^\infty_0(I;\mathbb{R}^r)}^{\|\cdot\|_{k,2}},$$

que es el espacio de Hilbert de curvas de Sovolev de clase k que se anulan en los extremos de $I = [0,T]$.

Espacios de Sobolev de curvas en variedades riemannianas

Definamos ahora los espacios de Sobolev de curvas en variedades riemannianas. Sea (Q,g) una variedad diferenciable riemanniana sin borde. Definimos el espacio de curvas de Sobolev de clase L^p_k en Q como el espacio de aplicaciones $\gamma\colon I \longrightarrow Q$ tales que

$$\psi \circ \gamma \in L^p_k(\gamma^{-1}(\gamma(I) \cap U), \mathbb{R}^r) \text{ para toda carta diferenciable } (U,\psi) \text{ en } Q, \quad \psi\colon U \subset Q \longrightarrow \mathbb{R}^r.$$

Este espacio se denotaría por $L^p_k(I;Q)$. Estamos interesados en particular en el espacio de curvas de clase de Sobolev H^1, es decir:

$$H^1(I;Q) \equiv L^2_1(I;Q),$$

que ha sido estudiado, por ejemplo, por W. Klingerberg [63]. Si $\gamma \in H^1(I;Q)$, entonces existe $d(\psi \circ \gamma(t))/dt$ a.e. en $[0,T]$, por lo que podemos definir $d\gamma/dt|_t$ a.e. en [0,T] como el vector tangente a $\gamma(t)$ en t:

$$\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_t = D\psi^{-1}(\psi \circ \gamma(t)) \left.\frac{d(\psi \circ \gamma)}{dt}\right|_t \in T_{\gamma(t)}Q.$$

Por lo tanto, dado $\gamma \in H^1(I;Q)$, tenemos la aplicación siguiente:

$$\frac{d\gamma}{dt}\colon I \longrightarrow TQ \quad \text{a.e. en } [0,T],$$

con la propiedad de que

$$\tau_Q \circ \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_t = \gamma(t).$$

Esta aplicación $d\gamma/dt$ pertenece claramente a $L^2(I;TQ) \equiv H^0(I;TQ)$.

Sea $E \longrightarrow Q$ un fibrado vectorial sobre Q, donde Q está dotada de una métrica, entonces podemos definir un espacio de secciones de Sobolev de E de clase L^p_k como la compleción de las secciones C^∞ de E, es decir, si denotamos por:

$$\Gamma^\infty(E) = \{\sigma\colon Q \longrightarrow E |\ \pi \circ \sigma = id_Q,\ \sigma \in C^\infty\}$$

las secciones C^∞ de E, tendremos:

$$L^p_k(E) = \overline{\Gamma^\infty(E)}^{\|\cdot\|_{k,p}},$$

donde definimos la norma usual como:

$$\|\sigma\|^p_{k,p} = \sum_{l=0}^{k} \int_Q \|\nabla^l \sigma\|^p \, d^n x,$$

donde $d^n x = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ es el volumen Riemanniano y ∇ denota la derivada corriente definida por la conexión de Levi-Civita en Q. Como estamos interesados en la clase H^1, en este caso tenemos

$$\|\sigma\|^2_{1,2} = \int_Q \|\sigma\|^2 \, d^n x + \int_Q \|\nabla\sigma\|^2 \, d^n x.$$

Estudiemos ahora los candidatos a fibrado tangente de $H^1(I;Q)$. Sea una curva $\gamma \in H^1(I;Q)$, como posee derivada clásica a.e. podemos considerar el pull-back $\gamma^*(TQ)$ del fibrado tangente TQ, es decir,

$$\gamma^*(TQ) = \{(t,v) \in I \times TQ |\ v \in T_{\gamma(t)}Q\}.$$

Tenemos una aplicación natural $p_1\colon \gamma^*(TQ) \longrightarrow I$ que es C^∞ a.e. En cualquier caso, la aplicación p_1 es absolutamente continua y el fibrado es trivial. Si identificamos los siguientes espacios $\gamma^*(TQ) \cong I \times \mathbb{R}^n$, entonces tenemos que $L^p_k(\gamma^*(TQ)) \cong L^p_k(I;\mathbb{R}^n)$.

En particular, vamos a estar interesados en los espacios de Hilbert $H^1(\gamma^*(TQ))$ y $H^0(\gamma^*(TQ))$ que vamos a denotar en lo que sigue como H^1_γ y H^0_γ respectivamente. La unión de todos los espacios H^1_γ es el espacio tangente de $H^1(I;Q)$. Veámoslo: dada una curva $\gamma\colon\ I \longrightarrow H^1(I;Q)$, esto es, una familia de funciones $\sigma\colon\ (-\varepsilon,\varepsilon) \times I \longrightarrow Q$ tal que $\sigma(s,t)$ es diferenciable en s, $\sigma(0,t) = \gamma(t)$ y

$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \sigma(s,\cdot) \in H^1(I;Q)$. Fijado $t \in [0,T]$, la curva $\sigma(\cdot,t)\colon\ (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow Q$ define un vector tangente $\partial\sigma(0,t)/\partial s \in T_{\gamma(t)}Q$ y también define una curva H^1 en TQ, es decir, $\partial\sigma(0,t)/\partial s \in H^1_\gamma$ y, por lo tanto, H^1 es el candidato natural como espacio tangente en γ.

Teorema 2.4.1 *Al espacio $L^p_k(I;Q)$ se le puede dotar con la estructura de una variedad diferenciable de Banach separable paracompacta modelada en $L^p_k(I;\mathbb{R}^n)$. Al espacio $H^1(I;Q)$ se le puede dotar con la estructura de una variedad diferenciable de Hilbert separable paracompacta modelada en el espacio de Hilbert $H^1(I;\mathbb{R}^n)$ con espacio tangente en γ dado por H^1_γ. La variedad de Hilbert $H^1(I;Q)$ se va a denotar como $\mathcal{P}(Q)$ o simplemente como $\mathcal{P}$.*

El atlas diferenciable de $\mathcal{P}$ viene dado por la siguiente familia de cartas. Como $C^\infty(I;Q) \hookrightarrow H^1(I;Q) \hookrightarrow C^0(I;Q)$ y como $C^\infty(I;Q)$ es denso en $C^0(I;Q)$, entonces $C^\infty(I;Q)$ va a ser denso en $H^1(I;Q)$. Con esto se definen cartas como entornos de curvas en $C^\infty(I;Q)$.

Sea $\gamma \in C^\infty(I;Q)$ y $\varepsilon > 0$, definimos $(\mathcal{O}_{\gamma,\varepsilon}, \Phi_{\gamma,\varepsilon})$ de la forma siguiente: sea $H^1_\gamma = H^1(\gamma^*(TQ))$ y el entorno tubular de la sección cero, es decir,
$\gamma^*_\varepsilon(TQ) = \{v(t) \in T_{\gamma(t)}Q |\ \|v(t)\| < \varepsilon\}$. Entonces

$$\mathcal{O}_{\gamma,\varepsilon} = \{v(t) = (\exp^X)(t) |\ \|X(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \in [0,T]\},$$

es decir,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{\gamma,\varepsilon} & = & \exp^{(H^1(\gamma^*_\varepsilon(TQ)))} \\ \Phi_{\gamma,\varepsilon} & : & \mathcal{O}_{\gamma,\varepsilon} \longrightarrow H^1(I;\mathbb{R}^n) \\ & & v(t) \longrightarrow X(t) \end{array}$$

donde $v(t) = \exp^X(t)$.

2.4.3. Teorema de los multiplicadores de Lagrange

Sea M una variedad de Hilbert modelada en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $S\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 cuya diferencial es dS, es decir:

$$dS\colon M \longrightarrow T^*M, \quad dS(x) \in T^*_xM$$

y $\forall V \in T_xM$

$$dS(x)(V) = \frac{d}{dt} S(\gamma_t(x))\bigg|_{t=0},$$

donde $d\gamma_t(x)/dt|_{t=0} = V$ y $\gamma_0 = x$.

El espacio tangente $T_xM \cong \mathcal{H}$ está dotado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ y, por lo tanto, debido al teorema de Riesz ($\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$), tenemos que $\exists\ \nabla S(x)$ tal que

$$\langle \nabla S(x), V\rangle_x = dS(x)(V) \quad \forall V \in T_xM.$$

El vector $\nabla S(x) \equiv \nabla_x S$ se denomina el gradiente de S en x.

Una subvariedad de M es una variedad de Hilbert N y una inmersión $i\colon N \longrightarrow M$ tal que la aplicación $T_x i\colon T_x N \longrightarrow T_{i(x)} M$ es una aplicación lineal inyectiva y continua. Por tanto, $i(T_x N)$ es un subespacio cerrado de $T_x M$. Identificamos $i(x) = x$, y denotaremos como $T_x N^{\perp}$ al subespacio ortogonal de $T_x N$ dentro de $T_x M$, es decir, al conjunto:

$$T_x N^{\perp} = \{V \in T_x M |\ \langle U, V \rangle_x = 0 \ \ \forall U \in T_x N\}.$$

Teorema 2.4.2 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange) *Sea S una función C^1 sobre M y $N \hookrightarrow M$ una subvariedad de M. Sea S_N la restricción de S a N. Entonces $x \in N$ es un punto crítico de $S_N \iff \nabla S(x) \in T_x N^{\perp}$.*

Demostración. x es un punto crítico de $S_N \iff dS_N(x) = 0 \iff$
$dS_N(x)(U) = 0 \ \ \forall U \in T_x N \iff \langle \nabla S(x), U \rangle = 0 \ \ \forall U \in T_x N \iff$
$\nabla S(x) \in T_x N^{\perp}$. □

Algunas subvariedades importantes

Veamos algunas subvariedades en $\mathcal{P}(Q)$ que aparecerán a lo largo del texto. Sea $x_0 \in Q$, entonces definimos el conjunto de curvas que tienen como punto inicial x_0 de la forma siguiente:

$$\mathcal{P}_{x_0}(Q) = \{\gamma\colon I \to Q |\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma \in H^1(I; Q)\}. \tag{2.32}$$

Se ve que $\mathcal{P}_{x_0}(Q)$ es una subvariedad de $\mathcal{P}(Q)$ cuyo espacio tangente es el siguiente:

$$\begin{aligned} T_\gamma \mathcal{P}_{x_0}(Q) = \{\delta\gamma\colon I \to TQ |\ \tau_Q(\delta\gamma(0)) &= x_0,\ \delta\gamma \in H^1(\gamma^*(TQ)), \\ \tau_Q(\delta\gamma(t)) &= \gamma(t),\ \delta\gamma(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la inmersión $i\colon \mathcal{P}_{x_0}(Q) \subset \mathcal{P}(Q)$, que envía a la curva γ en ella misma, es una aplicación C^∞ cuya derivada es $i_{*\gamma}\colon T_\gamma \mathcal{P}_{x_0} \longrightarrow T_\gamma \mathcal{P}$, que no es otra que la identidad y siendo la codimensión de $T_\gamma \mathcal{P}_{x_0}$ igual a la dimensión de Q. De la misma forma, definimos la variedad $\mathcal{P}_{x_0,x_T}(Q)$ como la variedad de curvas cuyos extremos son x_0 y x_T respectivamente, es decir:

$$\mathcal{P}_{x_0,x_T}(Q) = \{\gamma\colon I \to Q |\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(T) = x_T,\ \gamma \in H^1(I; Q)\}, \tag{2.33}$$

cuyo espacio tangente, se construye de manera similar al caso anterior:

$$\begin{aligned} &T_\gamma \mathcal{P}_{x_0,x_T}(Q) = \\ &= \{\delta\gamma\colon I \to TQ |\ \tau_Q \circ \delta\gamma = \gamma,\ \delta\gamma(0) = \delta\gamma(T) = 0,\ \delta\gamma \in H^1(\gamma^*(TQ))\}. \end{aligned}$$

Se ve, claramente, que $\mathcal{P}_{x_0,x_T}$ tiene codimensión $2n$ en $\mathcal{P}(Q)$.

Finalmente, definimos la subvariedad de curvas cerradas o periódicas como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Q) &= \{\gamma\colon I \to Q |\ \gamma(0) = \gamma(T),\ \gamma \in H^1(I;Q)\} \\ &= \{\gamma\colon S^1 \to Q |\ \gamma \in H^1(S^1;Q)\},\end{aligned} \tag{2.34}$$

cuya codimensión es n en $\mathcal{P}(Q)$, y como espacio tangente la siguiente variedad:

$$T_\gamma\mathcal{L}(Q) = \{\delta\gamma\colon I \to TQ |\ \tau_Q \circ \delta\gamma = \gamma,\ \delta\gamma(0) = \delta\gamma(T),\ \delta\gamma \in H^1(\gamma^*(TQ))\}.$$

La variedad de curvas solución de una ecuación diferencial

Sea Q una variedad diferenciable y sea $\Gamma_t \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo vectorial en Q dependiente del tiempo, que en coordenadas locales x^i en Q se escribe $\Gamma_t = f^i(x,t)\partial/\partial x^i$, y cuyas curvas integrales satisfacen las ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x,t), \quad i = 1,\dots,n.$$

Vamos a considerar ahora la subvariedad de $\mathcal{P}$ formada por las curvas que verifican las ecuaciones anteriores, es decir, consideramos aquellas curvas $\gamma\colon I \longrightarrow Q$ de clase H^1 tal que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \Gamma(\gamma(t),t) \qquad a.e.\ [0,T].$$

Nota. Si Q es compacta, estas curvas existen porque el flujo de Γ_t es completo. Si no es compacta para cada x_0 existe un $T = T(x_0)$ y $\gamma\colon [0,T] \longrightarrow Q$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y que satisface la ecuación anterior.

Tenemos la siguiente aplicación $A\colon \mathcal{P} \longrightarrow H^0(I;TQ)$ definida como:

$$A(\gamma) = \frac{d\gamma}{dt} - \Gamma(\gamma(t),t). \tag{2.35}$$

Recordemos que sobre $\mathcal{P}(I;Q)$ hay dos fibrados vectoriales "tangentes", $H^1(I;TQ)$ y $H^0(I;TQ)$. El primero modelado sobre $H^1(I;\mathbb{R}^n)$ y el segundo sobre $H^0(I;\mathbb{R}^n) = L^2(I;\mathbb{R}^n)$. El espacio $H^0(I;TQ)$ es un fibrado de Hilbert sobre $\mathcal{P}$ con una aplicación de proyección $\tau_0\colon H^0(I;TQ) \longrightarrow \mathcal{P}$ dada por $\tau_0(\delta\gamma) = \tau_Q \circ \delta\gamma$. La aplicación A es una sección del fibrado $H^0(I;TQ)$, $A \in \Gamma(H^0(I;TQ))$, porque $(\tau_o(A))\gamma = \tau_Q \circ (d\gamma/dt - \Gamma(\gamma(t),t)) = \gamma(t)$, por lo tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial antes mencionada va a estar formada por la sección cero de la aplicación anterior, esto es, $A^{-1}(\mathbf{0})$, donde $\mathbf{0}$ representa la sección cero de $H^0(I;TQ)$, que es una subvariedad y que se define de la siguiente forma.

Definición 2.4.3 *La "subvariedad dinámica o de las soluciones de* Γ*" se define como:*

$$\mathcal{W} = A^{-1}(\mathbf{0}) = \left\{ \gamma \in \mathcal{P} \;\middle|\; \frac{d\gamma}{dt} - \Gamma(\gamma(t), t) = 0 \right\}.$$

Tenemos que ver que es una subvariedad, para ello hay que demostrar que A es transversa a la sección cero de τ_0, es decir, que $A_{*\gamma} + T_\gamma 0 = T_\gamma H^0(I; TQ)$, o lo que es lo mismo, que la aplicación tangente a A que denotamos de la siguiente forma: $\mathfrak{L} := A_*$ es sobreyectiva, así, tendremos que $\mathcal{W}$ es una subvariedad embebida. Si la aplicación es sobreyectiva, ha de cumplirse que

$$T_\gamma \mathcal{W} = \ker \mathfrak{L}_\gamma.$$

Para ello estudiamos el espacio tangente $\mathfrak{L}_\gamma \equiv \mathfrak{L}_\gamma \colon T_\gamma \mathcal{P} \longrightarrow T_{A(\gamma)} H^0(TQ)$, donde hemos denotado como $\mathfrak{L}_\gamma$ a la aplicación tangente de A en γ, por definición tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_\gamma)(\delta\gamma) &= \frac{\partial}{\partial s} A(\sigma(s,t))\bigg|_{s=0} = \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{d}{dt}\sigma(s,t) - \Gamma(\sigma(s,t),t) \right)\bigg|_{s=0} = \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{d}{dt}\sigma(s,t) \right)\bigg|_{s=0} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\Gamma(\sigma(s,t),t) \right)\bigg|_{s=0}.
\end{aligned}$$

Para un t fijo $d\sigma(s,t)/dt$ es una curva $U(s)$ de vectores tangentes cuya derivada en s define un vector vertical en $T_{\delta\gamma(t)} TQ$.

De la misma manera $\partial\Gamma(\sigma(s,t),t)/\partial s|_{s=0} = T\Gamma_{\gamma(t)}(\delta\gamma(t))$ y donde $\tau_Q \circ \Gamma(\gamma) = \gamma$ implica que $T\tau_Q \circ T\Gamma = 0 =$ es decir $\partial\Gamma(\gamma(s,t),t)/\partial s|_{s=0}$ es vertical respecto a $T\tau_Q$, por lo que tenemos que el rango $\mathfrak{L}_\gamma(\delta\gamma)$ está en el espacio $H^0(I; V(TTQ))_\gamma \cong H^0(I; TQ)_\gamma$.

Lema 2.4.3 *Sea* $\tau_0 \colon H^0(I; TQ) \longrightarrow \mathcal{P}$ *el fibrado* H^0*-tangente de* $\mathcal{P}$*, entonces* $TH^0(I; TQ) \cong V(\tau_0) \oplus \tau_0^* H^0(I; TQ)$*, donde* $V(\tau_0)$ *es el subfibrado vertical respecto a la proyección* τ_0*, es decir,* $V(\tau_0) = \ker \tau_{0*}$*. Más aún,* $V(\tau_0) = H^0(I; V(TTQ))$ *y se puede identificar* $V(TTQ)$ *con* TQ*; por lo que existe una identificación natural entre* $V(\tau_0)$ *y* $H^0(I; TQ)$*.*

Utilizando la identificación anterior, podemos considerar la aplicación $\mathfrak{L}_\gamma$ como una aplicación de $T_\gamma \mathcal{P}$ a $H^0(I; TQ)$ y, por tanto, tenemos el siguiente lema.

Lema 2.4.4 *La aplicación* $\mathfrak{L}_\gamma \colon T_\gamma \mathcal{P} \longrightarrow T_{A(\gamma)} H^0(I; TQ)$ *se define como la aplicación*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\gamma \colon H^1(\gamma^* TQ) &\longrightarrow H^0(\gamma^* TQ) = L^2(\gamma^* TQ) \\
\delta\gamma &\rightsquigarrow \mathfrak{L}_\gamma(\delta\gamma) = \frac{d}{dt}\delta\gamma - D\Gamma\left(\gamma(t), t\right)\delta\gamma
\end{aligned}$$

donde $D\Gamma$ *es la diferencial de* Γ *en* $(\gamma(t), t)$*.*

Lema 2.4.5 *El operador $\mathfrak{L}_\gamma$ es un operador elíptico Fredholm cuyo rango es denso en $H^0(\gamma^*TQ)$ y, por lo tanto, su núcleo tiene dimensión finita y $T_\gamma\mathcal{W} = \ker \mathfrak{L}_\gamma$.*

Los resultados previos nos muestran que $\mathcal{W}$ es una variedad finita dimensional, lo que es obvio, debido a que para una condición inicial dada, hay una única curva $\gamma(t)$ que es solución de la ecuación diferencial dada, por lo tanto, el espacio $\mathcal{W}$ tiene la misma dimensión que Q, es decir, n, y la dimensión de $\ker \mathfrak{L}_\gamma$ es de nuevo n porque la solución de la ecuación lineal

$$\frac{d}{dt}\delta\gamma = D\Gamma(\gamma(t), t)\delta\gamma$$

es un espacio vectorial n dimensional.

Debemos aplicar ahora el teorema de multiplicadores de Lagrange al problema que tenemos aquí.

Sea $S\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 y consideremos la subvariedad $\mathcal{W}$ antes mencionada, sea $S_\mathcal{W} = S|_\mathcal{W}$ la restricción de S a $\mathcal{W}$. Queremos caracterizar los puntos críticos de $S_\mathcal{W}$; debido al teorema de los multiplicadores de Lagrange, Teorema 2.4.2, sabemos que γ es un punto crítico si y sólo si

$$\nabla_\gamma S \in T_\gamma\mathcal{W}^\perp,$$

como se tiene que $T_\gamma\mathcal{W} = \ker \mathfrak{L}_\gamma$, entonces debemos calcular $(\ker \mathfrak{L}_\gamma)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} \mathfrak{L}_\gamma^+}$. Por lo tanto, tenemos que $\gamma \in \mathcal{W}$ va a ser un punto crítico si y sólo si

$$\nabla_\gamma S \in \overline{\operatorname{Ran} (\mathfrak{L}_\gamma)^+}.$$

Diremos, como en la sección anterior, que γ es un extremal ordinario si

$$\nabla_\gamma S \in \operatorname{Ran} (\mathfrak{L}_\gamma)^+,$$

lo que significa que $\exists \lambda \in H^0(\gamma^*(TQ))$ tal que

$$\langle \nabla_\gamma S, \delta\gamma\rangle_1 = \langle \mathfrak{L}_\gamma^+(\lambda), \delta\gamma\rangle_1, \quad \forall \delta\gamma \in H^1(\gamma^*(TQ)).$$

Como se tiene que

$$\langle \mathfrak{L}_\gamma^+(\lambda), \delta\gamma\rangle_1 = \langle \lambda, \mathfrak{L}_\gamma(\delta\gamma)\rangle_0 = \int_0^T \left\langle \lambda(t), \frac{d}{dt}\delta\gamma - D\Gamma(\gamma(t), t)\delta\gamma \right\rangle dt,$$

identificando TQ con T^*Q mediante la métrica riemanniana g escribimos el resultado previo como sigue.

Teorema 2.4.3 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange B) *Con la notación previa, $\gamma \in \mathcal{W}$ es un punto crítico ordinario de $S_{\mathcal{W}} \iff \exists p \in H^0(\gamma^*(T^*Q))$ tal que*

$$\langle \nabla_\gamma S, \delta\gamma \rangle_1 - \int_0^T p(t) \left(\frac{d}{dt}\delta\gamma(t) - D\Gamma(\gamma(t),t)\delta\gamma(t) \right) dt = 0, \quad \forall \delta\gamma \in H^1(\gamma^*(TQ)).$$

Existe otra formulación de este teorema más conocida. Sea $\pi_Q \colon T^*Q \longrightarrow Q$ el fibrado cotangente a Q. Entonces el fibrado cotangente a $\mathcal{P}$ se construye de forma similar al fibrado tangente de $\mathcal{P}$ y en γ vendrá dado por $T^*_\gamma \mathcal{P} = H^1(\gamma^*(T^*Q))$. También tenemos el fibrado H^0–cotangente a $\mathcal{P}$ definido en γ como $H^0(\gamma^*(T^*Q))$, que denotaremos como $H^0(I; T^*Q)$, dual del fibrado tangente H^0. La proyección natural la denotamos como $\pi_0 \colon H^0(I; T^*Q) \longrightarrow \mathcal{P}$. Una curva en $H^0(I; T^*Q)$ se va a denotar por el par $(\gamma(t), p(t))$, donde $p(t) \in T^*_{\gamma(t)}Q$ es un campo covectorial a lo largo de $\gamma(t)$. Entonces definimos la función

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(\gamma, p) &= S(\gamma) + \int_0^T p(t) \left(\frac{d\gamma}{dt} - \Gamma(\gamma(t),t) \right) dt \\ &= S(\gamma) + \langle p, A(\gamma) \rangle_0 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, para cualquier par $(\delta\gamma, \delta p) \in T_{(\gamma,p)}H^0(I; T^*Q)$ tenemos que:

$$\langle \nabla_{(\gamma,p)}\mathbb{S}, (\delta\gamma, \delta p) \rangle = \langle \nabla_\gamma S, \delta\gamma \rangle + \langle \delta p, A(\gamma) \rangle_0 + \langle p, \mathfrak{L}_\gamma(\delta\gamma) \rangle_0.$$

Teorema 2.4.4 *Sea $(\gamma, p) \in H^0(I; T^*Q)$ una curva cotangente a $\mathcal{P}$. Entonces (γ, p) es un punto crítico de $\mathbb{S} \iff \gamma$ es un punto crítico ordinario de $S_{\mathcal{W}}$.*

Demostración. Si $(\gamma, p) \in H^0(I; T^*Q)$ es un punto crítico de $\mathbb{S}$, entonces

$$\langle \nabla_{(\gamma,p)}\mathbb{S}, (\delta\gamma, \delta p) \rangle = 0 \ \forall \delta\gamma, \delta p \Longrightarrow \langle \delta p, A(\gamma) \rangle_0 = 0 \ \forall \delta p \Longrightarrow A(\gamma) = 0 \Longrightarrow \gamma \in \mathcal{W}.$$

Y, por otra parte, se ha de cumplir que

$$\langle \nabla_\gamma S, \delta\gamma \rangle + \langle p, \mathfrak{L}_\gamma(\delta\gamma) \rangle_0 = 0 \ \ \forall \delta\gamma \Longrightarrow \nabla_\gamma S \in \operatorname{Ran} \mathfrak{L}^+_\gamma = T_\gamma \mathcal{W}^\perp$$

$\Longrightarrow \gamma$ es un punto crítico de $\mathbb{S}_{\mathcal{W}}$.
La demostración recíproca es trivial. □

La diferenciabilidad del funcional objetivo

Lema 2.4.6 *Sea Q una variedad riemanniana y sea $L \colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en Q. Entonces el funcional $S \colon \mathcal{P}(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido como sigue*

$$S(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t))\, dt$$

es diferenciable.

Demostración. Es suficiente probar que existen todas las derivadas direccionales en todas las direcciones y que éstas son continuas.

La derivada direccional de S en γ en la dirección de $\delta\gamma$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} S'_\gamma(\delta\gamma) &= \lim_{s\to 0}\frac{S(\sigma(s,t))-S(\gamma(t))}{s} = \lim_{s\to 0}\int_0^T \frac{L(\sigma(s,t))-L(\gamma(t))}{s}\,dt = \\ &= \int_0^T \frac{d}{ds}L(\sigma(s,t))\Big|_{s=0}\,dt = \int_0^T \langle dL(\gamma(t)),\delta\gamma(t)\rangle\,dt, \end{aligned}$$

donde de nuevo $\delta\gamma(t) = \partial/\partial s\sigma(s,t)|_{s=0}$. Por lo tanto,

$$|S'_\gamma(\delta\gamma)| \le \int_0^T |\langle dL(\gamma(t)),\delta\gamma(t)\rangle|\,dt \le K\|dL\|_{1,2}\|\delta\gamma\|_{1,2}.$$

Debido al embbeding de Sobolev tenemos que la aplicación $H^1 \hookrightarrow L^2$ es continua y, por lo tanto, S'_γ está en $H^1(\gamma^*(TQ))' \cong H^1(\gamma^*(TQ))$ y la diferencial $dS_\gamma(\delta\gamma) = S'_\gamma(\delta\gamma)$ existe. □

2.4.4. La variedad de Hilbert de curvas en el espacio de estados y de controles

Nos situamos ahora en el contexto del problema de control óptimo. Ahora tenemos un fibrado afín $\pi\colon C \longrightarrow P$ y denotamos el conjunto de curvas H^1 en C como $\mathcal{P}(C)$.

El fibrado tangente de clase H^1 lo denotaremos por $\mathcal{P}$ o bien por $H^1(TC)$ y el fibrado tangente de clase H^0 se denotará por $H^0(TC)$.

La ecuación de control Γ es un campo vectorial a lo largo de la aplicación π. Tenemos los siguientes espacios:

$$\mathcal{P}_{x_0,x_T}(C) = \{\,\gamma\colon I \longrightarrow C|\ \pi\gamma(0) = x_0,\ \pi\gamma(T) = x_T,\ \gamma \in H^1(I;C)\,\}.$$

$$T_\gamma\mathcal{P}_{x_0,x_T}(C) = \{\,\delta\gamma \in H^1(u^*(TC))|\ \tau_C\delta\gamma(t) = \gamma(t),\ \pi_*\delta\gamma(0) = \pi_*\delta\gamma(t) = 0\,\}.$$

Donde las proyecciones y los espacios vienen representados en los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} & & TP \\ & \overset{\Gamma}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \tau_P} \\ C & \xrightarrow[\pi]{} & P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} TC & \xrightarrow{\pi_*} & TP \\ \big\downarrow{\scriptstyle \tau_C} & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau_P} \\ C & \xrightarrow[\pi]{} & P \end{array}$$

Definimos la subvariedad dinámica como el conjunto de curvas γ que verifican la ecuación de control, es decir,

$$\mathcal{W} = \left\{ \gamma \in \mathcal{P} \,\middle|\, \pi_*\frac{d\gamma}{dt} = \Gamma(\gamma(t),t) \right\}. \tag{2.36}$$

Al igual que en las secciones previas tenemos que

$$T_\gamma \mathcal{W} = \left\{ \delta\gamma \in T_\gamma \mathcal{P} \;\middle|\; \pi_* \frac{d}{dt}\delta\gamma = D\Gamma(\gamma(t),t)\delta\gamma \right\}. \tag{2.37}$$

De nuevo, tenemos que $\mathcal{W} = A^{-1}(\mathbf{0})$, donde $A\colon \mathcal{P} \longrightarrow H^0(TC)$ definido como

$$A(\gamma) = \pi_* \frac{d\gamma}{dt} - \Gamma(\gamma(t),t).$$

Nótese que con la proyección $\pi\colon C \longrightarrow P$ tenemos una aplicación inducida $\widetilde{\pi}\colon \mathcal{P}(C) \longrightarrow \mathcal{P}(P)$, $\widetilde{\pi}(\gamma) = \pi \circ \gamma$ y podemos tomar el pull–back del fibrado $H^0(TP)$ a $\mathcal{P}(C)$, es decir, $\widetilde{\pi}^*(H^0(TP)) \longrightarrow \mathcal{P}(C)$. Por lo tanto, podemos decir que A es una sección de fibrado sobre $\mathcal{P}(C)$. Entonces $\mathcal{W}$ es el conjunto de nivel cero de la sección A. Y se tiene que

$$T_\gamma \mathcal{W} = \ker\, \mathfrak{L}_\gamma.$$

Como hemos visto previamente se tiene que este núcleo es

$$\ker\, \mathfrak{L}_\gamma = \overline{\operatorname{Ran} \mathfrak{L}_\gamma^+}.$$

Por lo tanto, un punto $\gamma \in \mathcal{P}(C)$ será un punto crítico ordinario de $S\colon \mathcal{P}(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ restringido a $\mathcal{W}$ si y sólo si $\nabla S_\gamma \in \operatorname{Ran} \mathfrak{L}_\gamma^+$, esto es, si $\exists p \in H^0(\gamma^*(TP))$ tal que

$$\langle \nabla S_\gamma, \delta\gamma \rangle_1 = \left\langle \mathfrak{L}_\gamma^+ p, \delta\gamma \right\rangle_1 = \langle p, \mathfrak{L}_\gamma \delta\gamma \rangle_0 . \tag{2.38}$$

Por lo tanto, $\gamma \in \mathcal{W}$ es un punto crítico ordinario de $S|_{\mathcal{W}}$ si y sólo si γ es un punto crítico de $\mathbb{S}\colon \mathcal{P}(\pi^* T^* P) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como sigue:

$$\mathbb{S}(\gamma, p) = S(\gamma) - \langle p, A(\gamma) \rangle_0 .$$

La demostración es la siguiente:

$$\left\langle \nabla_{(\gamma,p)} \mathbb{S}, (\delta\gamma, \delta p) \right\rangle = \langle \nabla_\gamma S, \delta\gamma \rangle_1 - \langle \delta p, A(\gamma) \rangle_0 - \langle p, \mathfrak{L}_\gamma \delta\gamma \rangle_0 = 0 \iff$$
$$A(\gamma) = 0 \text{ y } \langle \nabla_\gamma S, \delta\gamma \rangle_1 - \langle p, \mathfrak{L}_\gamma \delta\gamma \rangle_0 = 0.$$

Véase que el operador $\mathfrak{L}_\gamma$ ya no es elíptico, porque

$$\mathfrak{L}_\gamma(\delta\gamma) = \pi_* \frac{d}{dt}\delta\gamma - D\Gamma(\gamma(t),t)\delta\gamma$$

y el símbolo del operador tiene núcleo. Pero sigue siendo cierto que $T_\gamma \mathcal{W} = \ker\, \mathfrak{L}_\gamma$.

2.4.5. Equivalencia del problema de control óptimo regular con la formulación presimpléctica de la teoría

En esta sección probamos que las curvas integrales de los campos vectoriales que satisfacen la ecuación dinámica (2.10) son las trayectorias extremales del problema de control óptimo definido por las ecuaciones (1.1-1.2). Para esto debemos hallar los puntos críticos de S restringido a la subvariedad de las soluciones del campo vectorial, es decir, restringido a $\mathcal{W}$. En la sección anterior hemos demostrado que los puntos críticos de $S|_{\mathcal{W}}$ son los mismos que los de $\mathbb{S}$. Si γ es un punto crítico de $\mathbb{S}$, entonces

$$\mathbb{S} \in C^1,\ d\mathbb{S}(\gamma) = 0 \iff \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} = 0, \quad \forall \xi = \delta\gamma = (\delta x, \delta p, \delta u).$$

Por lo tanto, tenemos que calcular los puntos que anulan la derivada direccional del funcional objetivo en la dirección $\xi(t) = \delta\gamma(t) = (\delta x(t), \delta p(t), \delta u(t))$.

La definición de derivada direccional en $\mathbb{R}^n$ de una función en un punto x y en la dirección del vector v es la siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+sv) - f(x)}{s}.$$

En una variedad diferenciable la noción de $x + sv$ la extendemos por la noción de flujo: $\phi_s(v)$. Se tiene un campo vectorial V tal que $V(x) = v$, es decir, el campo vectorial en el punto x es el vector v, la dirección en la cual tomamos la derivada direccional. Así, en una variedad diferenciable la derivada direccional de una función f en un punto x y en la dirección del vector v es:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{s\to 0} \frac{f(\phi_s(v)) - f(x)}{s}.$$

Por lo tanto, la derivada direccional del funcional objetivo $\mathbb{S}$ en un punto de la curva $\gamma(t)$ en la dirección del vector $\xi = \delta\gamma(t)$ es la siguiente:

$$\frac{\partial \mathbb{S}(\gamma(t))}{\partial \xi} = \lim_{s\to 0} \frac{\mathbb{S}\left(\phi_s(\gamma(t))\right) - \mathbb{S}(\gamma(t))}{s},$$

donde para todo $t,\ \gamma(t) \in M,\ \xi(t) \in T_{\gamma(t)}M,\ \xi_{\gamma(t)} = \xi(t)$, cuyo flujo es ϕ_s. Si denotamos por $\mathbb{L} = L + p_i(\dot{x}^i - f^i)$ con las definiciones del hamiltoniano y de la 1–forma siguientes: $H = L - p_i f^i$ y $\theta = p_i dx^i$, como
$\dot{\gamma} = \dot{x}^i \partial/\partial x^i + \dot{p}_i \partial/\partial p_i + \dot{u}^a \partial/\partial u^a$, nos queda que $\theta(\dot{\gamma}) = p_i \dot{x}^i$, por lo que el lagrangiano extendido se puede escribir como $\mathbb{L} = \theta_\gamma(\dot{\gamma}) - H_\gamma$, entonces tenemos

que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{S}(\gamma(t))}{\partial \xi} &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s}\int_0^T \left[\mathbb{L}(\phi_s(\gamma)) - \mathbb{L}(\gamma)\right]\, dt\right) = \\
&= \int_0^T \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\mathbb{L}(\phi_s(\gamma)) - \mathbb{L}(\gamma)\right]\, dt = \\
&= \int_0^T \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s}\left(\theta_{\phi_s(\gamma)}(\dot{\overline{\phi_s(\gamma)}}) - H(\phi_s(\gamma)) - \theta_\gamma(\dot\gamma) + H(\gamma)\right)\right]\, dt = \\
&= \int_0^T \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s}\left(\theta_{\phi_s(\gamma)}(\dot{\overline{\phi_s(\gamma)}}) - \theta_\gamma(\dot\gamma)\right)\right]\, dt - \\
&- \int_0^T \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s}\Big(H(\phi_s(\gamma)) - H(\gamma)\Big)\right]\, dt.
\end{aligned}$$

Veamos qué son cada una de las partes del integrando. Como H es una función diferenciable se tiene que

$$\lim_{s\to 0}\frac{H(\phi_s(\gamma)) - H(\gamma)}{s} = \, dH(\gamma)(\xi).$$

Con la definición de la derivada de Lie, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi\theta)(\dot\gamma) &= \frac{d}{ds}(\phi_s^*\theta)_\gamma(\dot\gamma)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\theta_{\phi_s(\gamma)}(\phi_{s^*}(\dot\gamma))\right]\Big|_{s=0} = \\
&= \frac{d}{ds}\left[\theta_{\phi_s(\gamma)}(\dot{\overline{\phi_s(\gamma)}})\right]\Big|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\frac{\theta_{\phi_s(\gamma)}(\dot{\overline{\phi_s(\gamma)}}) - \theta_\gamma(\dot\gamma)}{s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada direccional de $\mathbb{S}$ queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{S}(\gamma(t))}{\partial \xi} &= \int_0^T \left[(\mathcal{L}_\xi\theta)(\dot\gamma) - dH(\gamma)(\xi)\right]\, dt = \\
&= \int_0^T \left[(i_\xi d\theta_\gamma)(\dot\gamma) + d(i_\xi\theta_\gamma)(\dot\gamma) - dH(\gamma)(\xi)\right]\, dt,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la siguiente relación de la derivada de Lie de una 1–forma:

$$(\mathcal{L}_\xi\theta) = i_\xi d\theta_\gamma + d i_\xi\theta_\gamma.$$

Con la siguiente expresión: $i_\xi d\theta(\dot\gamma) = d\theta(\xi,\dot\gamma) = -d\theta(\dot\gamma,\xi) = \Omega(\dot\gamma,\xi)$ y denotando $dH(\gamma)(\xi) = dH_\gamma(\xi)$ la integral anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{S}(\gamma(t))}{\partial \xi} &= \int_0^T \left[-d\theta(\dot\gamma,\xi) - dH_\gamma(\xi)\right]\, dt + \int_0^T d(i_\xi\theta)(\dot\gamma)\, dt = \\
&= \int_0^T \left[(i_{\dot\gamma}\Omega)|_\gamma - dH_\gamma\right](\xi)\, dt + \int_0^T d(i_\xi\theta)(\dot\gamma)\, dt.
\end{aligned}$$

Por último, utilizando el teorema de Stokes la segunda integral se convierte en

$$\int_0^T d(i_\xi\theta)_\gamma(t)(\dot{\gamma})\,dt = \int_\gamma d(i_\xi\theta)\,dt = \int_{\delta\gamma} i_\xi\theta = (i_\xi\theta)_\gamma(1) - (i_\xi\theta)_\gamma(0).$$

Por lo que hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.4.5 *Las soluciones extremales del problema de control óptimo (1.1-1.2), que son C^∞ a trozos, son curvas integrales de los campos vectoriales Γ que satisfacen la ecuación dinámica:*

$$i_\Gamma\Omega = dH. \tag{2.39}$$

Capítulo 3

Teoría Geométrica de Control Óptimo Singular

En este capítulo analizaremos los problemas de control óptimo singulares desde el punto de vista de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Implícitas. Analizaremos el problema de la existencia de soluciones, esto es, de arcos singulares, utilizando el algoritmo recursivo de ligaduras. Presentaremos este algoritmo desde su formulación geométrica más general, hasta su adaptación y especialización para sistemas LQ singulares. Probaremos el teorema de estabilidad del algoritmo en el sentido de su finitud para ecuaciones que verifiquen unas condiciones de regularidad fuertes. Presentaremos, además, una formulación hamiltoniana extendida que resulta crucial para la clasificación de las ligaduras en primera y segunda clase. Los algoritmos de ligaduras en el caso lineal se describen *ab initio* y se proponen códigos para su implementación numérica presentando, además, evidencia experimental sobre su estabilidad.

3.1. La geometría de las ecuaciones diferenciales implícitas

Las ecuaciones diferenciales implícitas, también denominadas ecuaciones diferenciales algebraicas o DAEs en la literatura, se pueden describir de forma general como una ecuación:

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(r)}) = 0$$

que involucra a una variable independiente t, una variable dependiente $x(t)$ y sus derivadas hasta orden r. Vamos a trabajar con ecuaciones de primer orden, ya que cualquier sistema de orden r puede transformarse en uno de primer orden añadiendo variables. Así pues, consideramos ecuaciones de la forma

$$F(t, x, \dot{x}) = 0$$

e iremos estudiando casos particulares de éstas hasta llegar al problema concreto que queremos analizar. Nos limitaremos al caso autónomo donde las ecuaciones no dependen de la variable de evolución t. Este tipo de ecuaciones son del tipo:

$$F(x, \dot{x}) = 0.$$

En aquellos casos en los que se puede despejar la derivada de la variable independiente la ecuación se transforma en otra del tipo $\dot{x} = f(x)$. Entonces se dice que la ecuación está escrita en forma normal y dadas unas condiciones iniciales la solución queda determinada de manera única.

En esta tesis vamos a tratar las ecuaciones diferenciales singulares, puesto que son las que aparecen en el contexto del problema de control óptimo, sea éste singular o no. Después analizaremos el caso en el que la dependencia en las derivadas sea lineal, es decir, cuando la ecuación diferencial sea del tipo que mostramos a continuación:

$$A(x)\,\dot{x} = f(x),$$

estas ecuaciones se llaman cuasilineales o ecuaciones diferenciales singulares lineales. Para terminar este análisis de ecuaciones implícitas singulares, encontraremos los sistemas hamiltonianos presimplécticos, que son aquellos en los que $A(x)$ representa una 2–forma y la parte derecha de la ecuación, la diferencial de un hamiltoniano, $f(x) = dH(x)$. Las curvas solución de la ecuación diferencial están contenidas en una variedad diferenciable M en la que tenemos definido un hamiltoniano $H\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ y una 2–forma cerrada Ω aunque posiblemente degenerada.

Después de este análisis de las ecuaciones diferenciales implícitas, haremos la descripción del problema de control óptimo como un problema de ecuaciones implícitas cuasilineal presimpléctico. Finalmente, extenderemos la variedad presimpléctica M a una variedad simpléctica $\widetilde{M}$ gracias al teorema del embedding coisótropo, debido a M. Gotay, donde estudiaremos el algoritmo de ligaduras, comparándolo con el algoritmo presimpléctico y las ligaduras que van apareciendo, que restringen el problema a la subvariedad final de las ligaduras $M_\infty \subset M$ donde el campo vectorial es consistente.

En el sistema implícito de partida descrito previamente como $F(t, x, \dot{x}) = 0$, el primer problema que nos aparece es la posible existencia de puntos del espacio de fases del sistema por el que no puedan pasar soluciones de la ecuación diferencial. Denotando como M al espacio de fases y como $M_1 \subset M$ al subconjunto resultante de eliminar estos puntos, el siguiente problema es asegurar que no sólo las condiciones iniciales pertenecezcan a este subconjunto $M_1 \subset M$, sino que también lo haga la evolución de éstas. Con esto se comienza un proceso algorítmico que conduce a la obtención de un subconjunto final, donde la ecuación diferencial tiene solución y es consistente. A este subconjunto final $M_\infty \subset M$ lo llamaremos subvariedad final de las ligaduras.

El contexto geométrico natural para estas ideas es aquel en el que el espacio de estados M sea una variedad diferenciable y la ecuación diferencial E esté representada por una subvariedad del espacio $\mathbb{R} \times TM$, es decir, $E \subset \mathbb{R} \times TM$. El espacio $\mathbb{R} \times TM$ es isomorfo al espacio de 1-jets de $\mathbb{R}$ en M, por lo que vamos a introducir brevemente los espacios de jets y a definir geométricamente las ecuaciones diferenciales implícitas con la ayuda de estos espacios.

3.1.1. Espacios de jets y ecuaciones diferenciales

Introducimos aquí los conceptos básicos de los espacios de jets para describir las ecuaciones implícitas. Los espacios de r-jets se definen a partir de la siguiente relación de equivalencia, véanse V. I. Arnol'd [7] y M. de León y P. Rodríguez [72].

Definición 3.1.1 *Sea M una variedad diferenciable con coordenadas locales x^i, $i = 1, \ldots, m$, donde toman sus imágenes las curvas de clase C^r,*
$\gamma\colon (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = x_0$, con t_0 y x_0 fijos. Se define la siguiente relación de equivalencia, denominada de contacto de orden r, entre las curvas γ y γ' en el punto t_0, como

$$\gamma \underset{r,\ t=t_0}{\sim} \gamma' \iff \frac{d^k}{dt^k}(\phi \circ \gamma)(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{d^k}{dt^k}(\phi \circ \gamma')(t)\Big|_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, r.$$

Definimos ahora el espacio de r-jets.

Definición 3.1.2 *Dados t_0 y x_0, el conjunto de las clases de equivalencia definidas de la manera anterior forman el conjunto de r-jets en el punto (t_0, x_0). El conjunto de todos los r-jets en M se denota como $J^r(\mathbb{R}, M)$ y es difeomorfa a $T^rM \times \mathbb{R}$. El conjunto $J^r(\mathbb{R}, M)$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable con coordenadas locales $\{t, x^i, \dot{x}^i, \ldots, x^{(r)i}\}$. Su dimensión es $\dim(J^r(\mathbb{R}, M)) = mr+1$, siendo m la dimensión de la variedad M.*

Dados $r \geq s$, se tienen las proyecciones canónicas:

$$\begin{array}{rcl} \pi^r_s\colon J^r(\mathbb{R}, M) & \longrightarrow & J^s(\mathbb{R}, M),\ r \geq s \\ \{t, x^i, \dot{x}^i, \ldots, x^{(r)i}\} & \rightsquigarrow & \{t, x^i, \dot{x}^i, \ldots, x^{(s)i}\} \end{array}$$

que verifican ${\pi^s}_t \circ {\pi^r}_s = {\pi^r}_t$. Tenemos la siguiente sucesión de aplicaciones:

$$J^r(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{{\pi^r}_{r-1}} J^{r-1}(\mathbb{R}, M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow J^1(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{{\pi^1}_0} J^0(\mathbb{R}, M) = M \times \mathbb{R}.$$

Ver M. Crampin, W. Sarlet y F. Cantrijn [30] para más detalles sobre la geometría del espacio de jets y sus usos en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales.

Definición 3.1.3 *Una ecuación diferencial implícita en M se define como una subvariedad diferenciable E de $J^r(\mathbb{R}, M)$.*

Dado un punto $\xi = (t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(r)}) \in E$ existen funciones $F^a,\ a = 1, \ldots, r$, localmente definidas en un entorno de ξ tales que la ecuación queda descrita en dicho entorno como:

$$F^a(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(r)}) = 0, \quad a = 1, \ldots, r. \tag{3.1}$$

Dada una ecuación E de orden r en M, podemos considerar como nuevo espacio $\widetilde{M}$ el espacio $T^{r-1}M$ y la aplicación natural

$$\Phi\colon J^r(\mathbb{R}, M) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}, \widetilde{M})$$

definida por: $\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(r)}) = (t, u_1, u_2, \ldots, u_r, \dot{u_1}, \dot{u_2}, \ldots, \dot{u_r})$ con

$$\begin{aligned} u_1 &= x,\ u_2 = \dot{x}, \ldots, u_r = x^{(r-1)} \\ \dot{u}_1 &= u_2,\ \dot{u}_2 = u_3, \ldots, \dot{u}_r = x^{(r)}, \end{aligned}$$

la aplicación Φ es un embedding natural que nos transforma la ecuación E en otra ecuación $\widetilde{E} = \Phi(E)$ dentro de $J^1(\mathbb{R}, \widetilde{M})$ y, por tanto, es una ecuación de primer orden. Obsérvese que la ecuación $\widetilde{E}$ en $J^1(\mathbb{R}, \widetilde{M})$ está descrita localmente por las ecuaciones

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = u_3, \ldots, \dot{u}_{r-1} = u_r; \quad F(t, u_1, \ldots, u_{r-1}, u_r) = 0.$$

Por tanto, a partir de ahora nos concentraremos en el estudio de ecuaciones de primer orden, $E \subset J^1(\mathbb{R}, M) \cong TM \times \mathbb{R}$, y la aplicación de proyección canónica:

$$\pi_0^1\colon J^1(\mathbb{R}, M) \longrightarrow M \times \mathbb{R}, \quad \pi_0^1(t, x, \dot{x}) = (x, t).$$

Particularizando la ecuación (3.1) observamos que, localmente, en un entorno de cada punto $\xi = (t, x, \dot{x}) \in E$ podremos definir una ecuación diferencial implícita a través de un conjunto de ecuaciones independientes:

$$F^a(t, x, \dot{x}) = 0; \quad a = 1, \ldots, r, \tag{3.2}$$

donde r es la codimensión de la variedad E en $J^1(\mathbb{R}, M)$. La condición de independencia significa que

$$dF^1 \wedge \cdots \wedge dF^r \neq 0$$

en el punto ξ (y, por tanto, en un entorno de él).

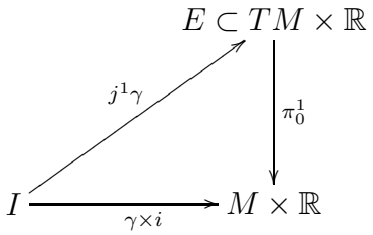
Definición 3.1.4 *Dada una curva $\gamma\colon I \longrightarrow M$, existe una extensión canónica de ésta al espacio $J^1(\mathbb{R}, M)$ denominada extensión 1-jet de γ, denotada por $j^1\gamma$ y definida como $j^1\gamma(t) = (t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)),\ \forall t \in I$.*

Definición 3.1.5 *Dada la ecuación diferencial implícita $E \subset J^1(\mathbb{R}, M) \cong TM \times \mathbb{R}$, una solución de E se define como una curva C^1, $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que su extensión 1-jet está contenida en E, es decir,*

$$j^1\gamma(I) \subset E. \tag{3.3}$$

Diremos también que γ es una curva integral de E.

Tenemos el siguiente diagrama que representa estas nociones:

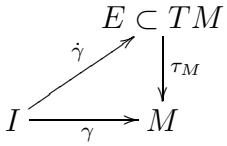


donde $i\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la inclusión canónica.

Si consideramos ecuaciones diferenciales implícitas autónomas, el diagrama es similar aunque ahora la ecuación E es simplemente una subvariedad del espacio tangente a M, TM, es decir, que podemos encontrar localmente funciones diferenciales independientes F^a en un abierto de TM tal que E está definido en un entorno por las expresiones siguientes:

$$F^a(x, \dot{x}) = 0; \quad a = 1, \ldots, r \tag{3.4}$$

y el diagrama resultante:



3.1.2. Puntos integrables, regulares, subregulares y singulares de ecuaciones diferenciales

Dada una ecuación diferencial, $E \subset TM \times \mathbb{R}$, modelada localmente por las ecuaciones (3.1), queremos estudiar por qué puntos $(t, x^i) \in \mathbb{R} \times M$ va a pasar una curva γ solución de la ecuación diferencial E, es decir, buscamos qué puntos pueden ser datos iniciales del problema y cuáles no. Este problema se conoce

en la literatura de DAEs como el problema de la inicialización. En realidad, estamos planteando el problema de la existencia de soluciones, primera parte del problema general sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Más adelante abordaremos el problema de la unicidad. Para ello vamos a introducir las siguientes definiciones.

Definición 3.1.6 *Se dice que un punto $\xi = (t, x, \dot{x}) \in E$ es **integrable** si existe una curva integral γ que pasa por el, es decir, que cumple $j^1\gamma = \xi$. El conjunto de puntos integrables de E forman la parte integrable de E, que denotamos como E_{integ}.*

Nuestro objetivo será pues, en primer lugar, describir los puntos integrables, que son los puntos por los cuales pasa al menos una curva solución de la ecuación diferencial y, habiendo resuelto el problema de la existencia, en segundo lugar, caracterizar el conjunto de soluciones que pasan por el.

Definición 3.1.7 *Un punto $\xi \in E$ se dice **regular** si la aplicación de proyección π_0^1 de $J^1(\mathbb{R}, M)$ sobre $\mathbb{R} \times M$ es transversa a E en ξ, es decir, si la aplicación tangente de la restricción de π_0^1 a E es sobreyectiva en ξ. Analíticamente, si $\pi_{0*}^1(\xi)(T_\xi E) = T_{\pi_0^1(\xi)}M$. Denotamos como E_{reg} al conjunto de puntos regulares de E.*

Proposición 3.1.1 *Sea $\xi \in E$ un punto regular, entonces ξ es integrable.*

Demostración. Los puntos regulares se caracterizan localmente por una condición de rango máximo de la matriz $\partial F^a/\partial v^i$, veámoslo. La ecuación diferencial $E \subset TM \times \mathbb{R}$, descrita localmente por la ecuación (3.2), tiene codimensión igual a r y su dimensión es $2n + 1 - r$, siendo $n = \dim M$. Si un punto $\xi = (t, x, v)$ es regular quiere decir que la aplicación tangente de la restricción de π_0^1 a E es sobreyectiva en ξ, esto es, $\pi_{0*}^1(\xi)(T_\xi E) = T_{\pi_0^1(\xi)}M$. La aplicación π_{0*}^1 verifica

$$\pi_{0*}^1\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i};\quad \pi_{0*}^1\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0;\quad \pi_{0*}^1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t};$$
$$\text{y ker } \pi_{0*}^1 = \left\{Z \in T_\xi E |\ Z = V^i \frac{\partial}{\partial v^i}\right\}.$$

Por otro lado, si $Z = X^i\partial/\partial x^i + V^i\partial/\partial v^i + T\partial/\partial t$ es un vector tangente a E, $Z \in T_\xi E$, se tiene

$$Z(F^a) = X^i\frac{\partial F^a}{\partial x^i} + V^i\frac{\partial F^a}{\partial v^i} + T\frac{\partial F^a}{\partial t} = 0.$$

Además, al ser $\pi_{0*}^1|_E$ una aplicación lineal se ha de cumplir

$$\dim T_\xi E = 2n + 1 - r = \dim\left(\text{Im}\,\pi_{0*}^1\big|_E\right) + \dim\left(\ker\,\pi_{0*}^1\big|_E\right).$$

Si $\pi^1_{0*}|_E$ es sobreyectiva, $\dim(\operatorname{Im}\pi^1_{0*}|_E) = n+1$, entonces
$\dim(\ker\pi^1_{0*}|_E) = n-r$. Tendremos, por tanto, que la dimensión del subespacio de soluciones de la ecuación $V^i\partial F^a/\partial v^i = 0$ es $n-r$ lo que implica que $\operatorname{rank}(\partial F^a/\partial v^i) = r$. Debido al teorema de la función implícita hay r coordenadas del vector v que pueden ser despejadas, si denotamos las coordenadas de este vector como $v^a = (v^j, \widetilde{v}^k),\ j = 1,\dots,r,\ k = 1,\dots,n-r$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dx^1}{dt} = v^1 &= f^1(t,x,\widetilde{v})\\
\frac{dx^2}{dt} = v^2 &= f^2(t,x,\widetilde{v})\\
&\cdots\\
\frac{dx^r}{dt} = v^r &= f^r(t,x,\widetilde{v}),
\end{aligned}$$

lo que implica que al menos existe una curva $\gamma = (t, x(t))$ solución de la ecuación diferencial E cuyo levantamiento pasa por el punto $\xi \in E$ y, por lo tanto, es integrable.

En el caso particular de que la codimensión de E sea igual a n, se tiene que cumplir que $\operatorname{rank}(\partial F^a/\partial v^i) = n$ y, entonces, se pueden despejar todas las coordenadas $v^i,\ i = 1,\dots,n$. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma normal habrá solución única. □

Definición 3.1.8 *Un punto se dice* ***singular*** *si no es regular. El conjunto de puntos singulares de la ecuación diferencial E lo denotamos como $C(E)$.*

Por lo tanto, la ecuación diferencial E es una subvariedad de $TM \times \mathbb{R}$ y está formada por la unión de los conjuntos E_{reg} y $C(E)$, formados por los puntos regulares y por los puntos singulares respectivamente: $E = E_{\text{reg}} \cup C(E)$. Como los puntos regulares no son todos los puntos integrables, sino que son un subconjunto, $E_{\text{reg}} \subset E_{\text{integ}}$, el problema es estudiar los puntos que no son regulares pero sí son integrables, es decir, $C(E) \cap E_{\text{integ}}$ y su proyección bajo π^1_0. Si denotamos por $\Sigma(E)$ la proyección de $C(E)$ bajo π^1_0, llamaremos a $\Sigma(E)$ el locus singular de E y a $\Sigma(E) \cap \pi^1_0(E_{\text{integ}})$ el locus integrable singular de E.

Para estudiar el conjunto de puntos integrables singulares de la ecuación E, introducimos la noción de puntos subregulares.

Definición 3.1.9 *Dada una ecuación diferencial implícita E, una subecuación es una tripleta (i, E', M') formada por una ecuación diferencial implícita E' en M' y una inmersión $i\colon M' \longrightarrow M$ tal que $Ti(E') \subset E$. Se define un punto* ***subregular*** *de E como un punto $\xi \in E$ para el cual existe una subecuación E' de E, tal que $\xi \in E'$ y ξ es regular para E', i.e., la aplicación π^1_0 es transversal a E' en ξ. Vamos a denotar los puntos en E que son subregulares pero no regulares como E_{subreg} y los denominaremos puntos subregulares propios.*

Proposición 3.1.2 *Sea $\xi \in E$ un punto integrable, entonces ξ es subregular.*

Demostración. Sea $\gamma\colon (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}\times M$ una solución de E que pasa por ξ, entonces el par $[(-\epsilon,\epsilon), \{\,(\gamma(t),\dot\gamma(t))|\ t\in(-\epsilon,\epsilon)\,\}]$ es una subecuación tal que en ella ξ es regular (siempre que $\dot\gamma(0)\neq 0$). □

Corolario 3.1.1 *El conjunto de puntos integrables está formado por la unión disjunta de los puntos regulares y los subregulares propios,*

$$E_{\text{integ}} = E_{\text{reg}} \cup E_{\text{subreg}},$$

siendo $E_{\text{subreg}} \subset C(E)$.

A la hora de hallar los puntos integrables, como los puntos regulares se caracterizan por una condición algebraica en el rango de la aplicación de proyección π_0^1 restringida a E, el problema que resta es cómo caracterizar entre los puntos singulares para cuáles de ellos existe una subecuación en la que estos puntos sean regulares. Este problema lo analizaremos en la próxima sección y nos conduce al conocido algoritmo de ligaduras.

3.1.3. El algoritmo de ligaduras recursivo clásico

Consideremos una ecuación diferencial $E \subset J^1(\mathbb{R},M)$. Si $\xi=(t,x,v)$ fuera un punto integrable de la ecuación E querría decir que existiría una curva γ solución de E que pasara por él, i.e., tendríamos que $\dot\gamma(0)=\xi$ y $\gamma(0)=\pi_0^1(\xi)=(t,x)$. Como $(\gamma(t),\dot\gamma(t))\in E$ para t en un entorno del 0, entonces $(\gamma(t),t)\in\pi_0^1(E)$. Por tanto, $(\gamma(t),\dot\gamma(t))\in T_{\gamma(t)}\pi_0^1(E)$ y ξ tendría que pertenecer a E y al mismo tiempo a $T_{\gamma(t)}\pi_0^1(E)\times\mathbb{R}$. Este es el primer paso del algoritmo clásico introducido de forma casi simultanea en [91] y en [84]. Este algoritmo fue generalizado posteriormente para incluir a los sistemas no holónomos en [58].

Así que procederemos como sigue. Si denotamos como $\mathbb{R}\times M_0$ la variedad total $\mathbb{R}\times M$ y como E_0 la ecuación original en $\mathbb{R}\times M$. Definimos la subecuación $(\mathbb{R}\times M_k, E_k)$, $k>1$ recursivamente como,

$$\mathbb{R}\times M_k = \pi_0^1(E_{k-1}), \qquad E_k = J^1(\mathbb{R},M_k)\cap E_{k-1}, \tag{3.5}$$

por lo que el algoritmo nos proporciona una doble familia de conjuntos

$$\mathbb{R}\times M_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{R}\times M_k \cdots$$

y

$$E_0 \supseteq \cdots \supseteq E_k \cdots .$$

Estas secuencias eventualmente se estabilizarán en el sentido de que $E_n = E_{n+r}$ para todo $r\geq 0$. Denotaremos el espacio resultante como E_∞ y lo llamaremos

subecuación constreñida final. Este espacio viene dado, entonces, por $\bigcap_{k\geq 0} E_k$ y debe ser idénticamente igual a E_{integ}. Para poder aplicar el algoritmo es necesario que podamos definir en cada paso $J^1(\mathbb{R}, M_k)$. Para ello es necesario poder introducir una relación de equivalencia entre curvas semejante a la descrita con anterioridad en la definición 3.1.1. Si M_k no es una variedad diferenciable se podría, a pesar de todo, introducir una relación de equivalencia de contacto que en el caso diferenciable coincide con la utilizada previamente.

Sean $\gamma_1,\ \gamma_2 \colon I \longrightarrow M$ dos curvas en un espacio métrico (M, g). Diremos que las curvas $\gamma_1,\ \gamma_2$ tienen un contacto de orden k en el punto $x \in M$, si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ y, además,

$$g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = o(|\, t\,|^k).$$

En particular, si M es una variedad diferenciable con una métrica y g es la distancia asociada a ella, dos curvas diferenciables de clase C^k tienen un contacto de orden k en un punto en el sentido anterior si y sólo si definen el mismo k–jet $j^k\gamma_1(0) = j^k\gamma_2(0)$.

Evitaremos introducir complicaciones derivadas de la no regularidad en las diversas etapas del algoritmo para concentrarnos en su simplicidad geométrica. Así, supondremos que todos los objetos que aparecen son suficientemente regulares. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.10 *[33] Diremos que una ecuación $E \subset J^1(\mathbb{R}, M)$ es completamente reducible si los subconjuntos $\mathbb{R} \times M_k$ resultantes al aplicar el algoritmo anterior (3.5) son subvariedades diferenciables de $\mathbb{R} \times M$ para todo $k \geq 1$.*

Esta definición es muy semejante, aunque ligeramente más general que la noción presentada en [91]. Por otro lado, tratamientos más generales, tanto en la dirección indicada anteriormente como en un contexto más algebraico, se están desarrollando en [26].

Teorema 3.1.1 *Sea E una ecuación diferencial ordinaria, que a su vez es una subvariedad del espacio de 1-jets $J^1(\mathbb{R}, M) \cong TM \times \mathbb{R}$, entonces construimos de forma recursiva la familia de ecuaciones $(\mathbb{R} \times M_k, E_k)$ de la forma:*

$$\mathbb{R} \times M_k = \pi_0^1(E_{k-1}), \qquad E_k = J^1(\mathbb{R}, M_k) \cap E_{k-1},$$

suponiendo que $J^1(\mathbb{R}, M_k)$ está definido $\forall\, k$. Si el algoritmo se estabiliza en un cierto paso r finito, entonces $E_r \subset E_{\text{integ}}$.

Demostración. Sea $\xi \in E_r = E_{r+1}$. Veamos que $\xi \in E_{\text{integ}}$. Para ello basta ver que ξ es regular para la subecuación (E_{r+1}, M_{r+1}) ya que, entonces, por la Proposición 3.1.1 existe una solución que pasa por él y, por tanto, sería integrable.

Pero ξ es regular, ya que M_{r+1} es justamente la proyección de $E_r = E_{r+1}$ y, por tanto, su diferencial proyecta suprayectivamente el espacio tangente a E_r en el espacio tangente a M_{r+1}. □

Teorema 3.1.2 *[91] Sea E una ecuación completamente reducible de $J^1(\mathbb{R}, M) \cong TM \times \mathbb{R}$ con $\dim(E) = m$. Entonces para cada componente conexa no vacía S_{k+1} de E_{k+1} definimos S_k de manera recursiva como la componente conexa de E_k que contiene a S_{k+1}. Entonces existe un entero mínimo r, $0 < r \leq \dim(S_0) \leq m$, tal que $S_{k+1} = S_k$ para todo $k \geq r$. Entonces la ecuación resultante, E_∞, es o vacía o es una subvariedad cerrada de E y es una ecuación completamente reducible igual a su reducción.*

Hemos descrito anteriormente el algoritmo de ligaduras en la situación más general. Los problemas que vamos a analizar en lo que sigue van a ser independientes del parámetro de evolución, por tanto, presentamos ahora el algoritmo en el caso autónomo que es similar, aunque los espacios donde tenemos definidas las ecuaciones ahora van a ser distintos. La ecuación E es simplemente una subvariedad diferenciable de TM, $E \subset TM$. Denotamos como M_0 la variedad total M y como E_0 la ecuación original en M. Definimos la subecuación (M_k, E_k), $k > 1$, recursivamente como

$$M_k = \tau_M(E_{k-1}), \qquad E_k = TM_k \cap E_{k-1}, \tag{3.6}$$

el algoritmo nos proporciona de nuevo una doble familia de conjuntos

$$M_0 \supset \cdots \supset M_k \cdots$$

y

$$E_0 \supset \cdots \supset E_k \cdots .$$

Estas secuencias, igual que antes, se estabilizarán eventualmente y $E_n = E_{n+r}$ para todo $r \geq 0$. Denotaremos el espacio resultante como E_∞ y la llamaremos subecuación constreñida final. Este espacio viene dado, entonces, por $\bigcap_{k\geq 0} E_k$ y debe ser idénticamente igual a E_{integ}. Presentamos el teorema anterior, Teorema 3.1.1, adaptado a esta situación.

Teorema 3.1.3 *Sea E una ecuación diferencial ordinaria, que es a su vez una subvariedad del espacio tangente a otra variedad diferenciable M, $E \subset TM$, entonces construimos de forma recursiva la familia de ecuaciones (M_k, E_k) de la forma:*

$$M_k = \tau_M(E_{k-1}), \qquad E_k = TM_k \cap E_{k-1},$$

suponiendo que TM_k está definido $\forall\, k$. Si el algoritmo se estabiliza en un cierto paso r finito, entonces $E_r \subset E_{\text{integ}}$.

3.1.4. Ecuaciones cuasilineales: Índice de Kronecker y estabilidad del algoritmo de ligaduras

Un caso particularmente interesante de ecuaciones diferenciales implícitas son las ecuaciones cuasilineales. Además, nos interesan porque éstas son las que nos

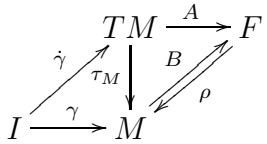
aparecen en los problemas de control óptimo. Estas ecuaciones tienen la forma siguiente:

$$A(x)\,\dot{x} = B(x).$$

Este tipo de ecuaciones podemos describirlas geométricamente con los siguientes objetos: un fibrado vectorial $\rho\colon F \longrightarrow M$ sobre una variedad diferenciable M y $A\colon TM \longrightarrow F$ un morfismo de fibrados sobre la identidad, es decir, $\rho \circ A = \tau_M$. Esta aplicación fibrada define una ecuación diferencial implícita cuasilineal de la forma siguiente:

$$A(\gamma)\dot{\gamma} = B(\gamma),\ \gamma \in M,\ \dot{\gamma} \in T_\gamma M \tag{3.7}$$

donde el término inhomogeneo B viene dado por una sección del fibrado $\rho\colon F \longrightarrow M$.



La ecuación diferencial E en el sentido anterior está dada por:

$$E = \{(x, \dot{x}) \in TM |\ A(x)\dot{x} = B(x)\}. \tag{3.8}$$

Si la aplicación A no es invertible estamos de nuevo ante un problema singular y, por tanto, no podemos escribir la ecuación (3.8) en forma normal y los resultados estándar de existencia y unicidad no son válidos.

Asumimos que $\ker A \subseteq TM$ e $\operatorname{Im} A \subseteq F$ son subfibrados vectoriales, lo que es equivalente a decir que A tiene rango constante localmente.

Ahora aplicamos el algoritmo clásico recursivo descrito previamente, donde la ecuación E_0 y la variedad de partida M_0 son:

$$M_0 = M, \qquad E_0 = E = \{(x, \dot{x}) \in TM |\ A(x)\dot{x} = B(x)\}, \tag{3.9}$$

Está claro que la condición de partida del algoritmo de ligaduras, es decir, la condición de compatibilidad de la ecuación que elimina los puntos incompatibles es que

$$B(x) \in \operatorname{Im} A(x). \tag{3.10}$$

Lema 3.1.1

$$x \in M_1 \iff \operatorname{Im} A(x) \ni B(x).$$

Demostración. Efectivamente, si $x \in M_1 \Longrightarrow x = \tau_M(\xi),\ \xi = (x, \dot{x}) \in E \Longrightarrow \exists\, \dot{x} \in T_x M$ tal que $x = \tau_M(x, \dot{x})$, pero $(x, \dot{x}) \in E \Longrightarrow A(x)\dot{x} = B(x)$.
Recíprocamente ocurre lo mismo. □

Por tanto, $M_1 = \tau_M(E_0) = \{x \in M_0 |\ B(x) \in \operatorname{Im} A(x)\}$. Ahora

$$E_1 = TM_1 \cap E_0 = \{(x, \dot{x}) \in TM_1 |\ A(x)\dot{x} = B(x)\}.$$

Si denotamos por $A_1(x) \equiv A|_{TM_1(x)}$ la restricción de A a TM_1 tendremos que

$$E_1 = \{(x, \dot{x}) \in TM_1 |\ A_1(x)\dot{x} = B(x)\}. \tag{3.11}$$

Aplicando el lema anterior 3.1.1 de nuevo, obtenemos:

$$M_2 = \{x \in M_1 |\ B(x) \in \operatorname{Im} A_1(x)\}.$$

Denotando por A_k la restricción de A a TM_k, tras iterar el argumento anterior tenemos, por tanto, [49, 50]:

$$M_0 = M, \quad M_k = \{x \in M_{k-1} |\ B(x) \in \operatorname{Im} A_{k-1}(x)\}, \quad k \geq 1 \tag{3.12}$$

y

$$E_0 = E, \quad E_k = E_{k-1} \cap TM_k = \{(x, \dot{x}) \in TM_k |\ A_k(x)\dot{x} = B(x)\}. \tag{3.13}$$

Bajo las condiciones apropiadas de regularidad, como las dadas en el Teorema 3.1.2, este algoritmo nos conduce a una ecuación diferencial E_∞ consistente definida en una subvariedad M_∞, que llamaremos variedad final de las ligaduras. En esta subvariedad se verifica que $B(x) \in \operatorname{Im} A_\infty(x)$ y las soluciones corresponden a las curvas integrales de la familia de campos vectoriales $X_\infty + \ker A_\infty$, donde X_∞ es una solución particular de la ecuación $A_\infty(X_\infty) = B$.

Veamos otra forma de caracterizar el algoritmo de ligaduras para este tipo de problemas. Si $x \in M_1$, $B(x) \in \operatorname{Im} A(x)$, por tanto $\forall \mu \in \ker A^* \subset F^*$ se tiene que cumplir $\langle \mu, B(x) \rangle = 0$ y, recíprocamente la aplicación, $A^* \colon F^* \longrightarrow T^*M$ denota la aplicación dual de A. En general,

$$M_{k+1} = \{x \in M_k |\ B_k(x) \in \operatorname{Im} A_k(x)\}, \tag{3.14}$$

donde $B_k = B|_{M_k}$; $A_k = A|_{TM_k}$. De nuevo tenemos

$$M_{k+1} = \{x \in M_k |\ \langle \mu, B_k(x) \rangle = 0,\ \forall \mu \in \ker A_k^*\}. \tag{3.15}$$

En el caso particular de los sistemas lineales, la ecuación resultante es:

$$A \cdot \dot{x} = B \cdot x, \tag{3.16}$$

donde $x,\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n;\ A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. En este caso tenemos que la subvariedad M_1 viene definida por

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n |\ B \cdot x \in \operatorname{Im} A\},$$

pero esto es equivalente a decir que para todo z que cumple $z^T \cdot A = 0$, entonces $z^T \cdot B \cdot x = 0$, porque

$$0 = z^T \cdot A \cdot \dot{x} = z^T \cdot B \cdot x.$$

Si $z_a,\ a = 1, \ldots, m$, es una base del ker A^T, entonces podemos construir la familia de ligaduras primarias como

$$\phi^{(1)}{}_a(x) = z_a^T \cdot B \cdot x.$$

Agrupando los vectores z_a podemos construir la matriz $C^{(1)} = [z_1|\cdots|z_m]$ y, entonces, la familia de ligaduras lineales $\{\phi^{(1)}{}_a\}_{a=1}^m$ es equivalente a la ecuación matricial

$$C^{(1)T} \cdot B \cdot x = 0. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, la condición $x \in M_1$ es equivalente a $C^{(1)T} \cdot B \cdot x = 0$, donde $C^{(1)}$ genera el núcleo de A.

Continuando el argumento y definiendo A_k como la restricción de A a M_k, obtenemos que la variedad lineal M_{k+1} viene definida recursivamente como el conjunto de puntos $x \in M_k$ tal que:

$$C^{(k+1)T} \cdot B \cdot x = 0, \tag{3.18}$$

donde $C^{(k+1)}$ genera el núcleo de la matriz A_k.

Relación entre el índice de Kronecker y la estabilidad del algoritmo de ligaduras

Definición 3.1.11 *Sea $A\cdot\dot{x} = B\cdot x$ una ecuación diferencial implícita constante. Diremos que el sistema es regular en el sentido de Kronecker si el haz de matrices $A\lambda - B$, $\lambda \in \mathbb{C}$, es regular, i.e., si el conjunto de soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = \det(A\lambda - B) = 0$ es finito.*

Por ejemplo, si A es invertible, entonces el sistema es regular. Si A y B son proporcionales y A es singular, entonces el sistema no es regular en el sentido de Kronecker. Tenemos el siguiente teorema estructural para haces regulares, [43].

Teorema 3.1.4 *Sea $A \cdot \dot{x} = B \cdot x$ una ecuación diferencial implícita constante regular en el sentido de Kronecker; entonces existen dos matrices regulares E y F tales que*

$$EAF = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right];\quad EBF = \left[\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right], \tag{3.19}$$

donde la matriz N es una matriz nilpotente de índice ν (i.e. $N^{\nu} \neq 0,\ N^{\nu+1} = 0$). Por tanto, el sistema $A \cdot \dot{x} = B \cdot x$ es equivalente a los sistemas desacoplados de ecuaciones diferenciales implícitas:

$$\dot{y}_1 = W y_1 \tag{3.20}$$
$$N\dot{y}_2 = y_2. \tag{3.21}$$

Demostración. Es bien sabido que existen las matrices $E,\ F$, véase [43], que satisfacen las propiedades requeridas para un haz regular. Premultiplicando el sistema por E obtenemos:

$$EA\dot{x} = EBx$$

y definiendo la nueva variable y como $x = Fy$, entonces

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right] \dot{y} = \left[\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] y,$$

por último, reescribiendo el vector y como $y = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \hline y_2 \end{array}\right]$ obtenemos las ecuaciones anteriores. □

Nota. Los resultados se extienden sin dificultad al caso inhomogeneo.

Nota. Un teorema de estructura similar fue demostrado por Campbell para el caso no constante, $A(t)\dot{x} = B(t)x$, en [17].

Probaremos el siguiente resultado relacionado con el índice ν del sistema y el número de pasos, k, del algoritmo de ligaduras.

Teorema 3.1.5 *El índice ν de una ecuación diferencial implícita del tipo $A\dot{x} = Bx$ regular en el sentido de Kronecker es el mismo que el número de pasos del algoritmo de ligaduras recursivo menos uno, es decir,*

$$\textit{número de pasos} = k = \nu + 1. \tag{3.22}$$

Demostración. Debido al teorema de estructura, Teorema 3.1.4, sólo es necesario considerar la parte nilpotente de la ecuación

$$Ny_2 = y_2.$$

Al aplicar el algoritmo de ligaduras se obtiene que la subvariedad primaria M_1 de ligaduras viene dada por las ligaduras primarias

$$\phi^{(1)} = C^{(1)T} y_2$$

(en esta ecuación $B = I$) donde $C^{(1)}$ genera el núcleo de N. Más aún, la ecuación previa $N\dot{y}_2 = y_2$ implica que $y_2 \in M_1$ si y sólo si $\exists z \in M$ tal que $y_2 = Nz$, i.e., $y_2 \in \operatorname{Im} N$, por lo que si $y_2(t)$ es una curva solución de la ecuación, esto quiere decir que

$$y_2(t) = Nz(t) \Longrightarrow \dot{y}_2 = N\dot{z} \Longrightarrow \dot{y}_2 \in \operatorname{Im} N.$$

Por lo que tenemos que $y_2 = N\dot{y}_2 = NN\dot{z} = N^2 z$. Entonces
$y_2 \in M_2 \iff y_2 \in \operatorname{Im} N^2$, pero esto último, $y_2 \in \operatorname{Im} N^2$, tiene lugar si y sólo si

$$\phi^{(2)} = C^{(2)T} y_2 = 0,$$

donde $C^{(2)}$ genera el núcleo de N^2.

$$M_2 = \left\{ y_2 \in M_1 |\ C^{(2)T} y_2 = 0 \right\},\ \operatorname{Lin}\{C^{(2)}\} = \ker N^2.$$

Si procedemos recursivamente, observamos que $y_2 \in M_{k+1} \iff y_k \in \operatorname{Im} N^k \iff \phi^{(k)} = C^{(k)T} y_2 = 0$, donde C^k genera el núcleo de la matriz N^k. Como la matriz N es nilpotente de índice ν tenemos que

$$\ker\, N \subsetneqq \ker\, N^2 \subsetneqq \ker\, N^3 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \ker\, N^{\nu} \subsetneqq \ker\, N^{\nu+1} = \mathbb{R}^m.$$

Por eso, en cada paso la matriz $C^{(k)}$ es cada vez mayor y se puede escoger de tal forma que contenga a la anterior $C^{(k-1)}$ como submatriz,

$$C^{(k)} = [C^{(k-1)} |\ *\ ].$$

Véase que en el paso ν se tiene que

$$y_2 \in \operatorname{Im} N^{\nu} \Longrightarrow y_2 = N^{\nu} z,$$

por lo que el siguiente paso es $y_2 = N\dot{y}_2 = NN^{\nu}\dot{z} = 0$ y la subvariedad final de las ligaduras es $M_\infty = \{y_2 = 0\}$, formada simplemente por las ligaduras $y_2 = 0$. □

Nota. Este resultado puede obtenerse directamente (como se hace usualmente) a partir del sistema original escribiendo la ecuación como;

$$\left(N\frac{d}{dt} - I \right) y_2 = b_2 \quad (b_2 \neq 0,\ \text{caso inhomogeneo}).$$

Por lo tanto, la solución es

$$y_2 = \left(N\frac{d}{dt} - I \right)^{-1} b_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(N\frac{d}{dt} \right)^k b_2,$$

como la matriz N es nilpotente, de índice ν, y constante, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(N\frac{d}{dt} \right)^k = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{k+1} N^k \left(\frac{d}{dt} \right)^k$$

y si $b_2 = 0$ se obtiene el resultado previo, $y_2 = 0$. Véanse las referencias: [10], [43] y [94].

3.1.5. Ecuaciones cuasilineales presimplécticas

Si el fibrado auxiliar F es un subfibrado de T^*M, entonces la condición recursiva (3.15) se convierte en

$$M_{k+1} = \{x \in M_k |\ B(x) \in (\ker\ A_k^*(x))^0\}, \tag{3.23}$$

donde $(\cdot)^0$ denota el aniquilador del subespacio correspondiente.

Particularizando aún más, si Ω es una forma bilineal en M y definimos $A\colon TM \longrightarrow T^*M$ como

$$A(x)\dot{x} = \Omega_x(\dot{x}, \cdot), \tag{3.24}$$

dada $H\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera podemos definir la ecuación cuasilineal:

$$\Omega_x(\dot{x}) = dH(x).$$

Si esta 2–forma Ω es cerrada pero degenerada, es decir, tiene núcleo no nulo, estamos ante un problema cuasilineal presimpléctico. El algoritmo de ligaduras en este caso se convierte en el bien conocido algoritmo de ligaduras presimpléctico o abreviadamente PCA, véase [46].

En este caso, la condición recursiva (3.23) se convierte en:

$$M_k = \{x \in M_{k-1} |\ \langle B(x), Z\rangle = 0,\ \ \forall Z \in \ker \Omega(x)|_{TM_{k-1}}\}.$$

Si la sección $B\colon M \longrightarrow T^*M$ viene dada por la diferencial de una función hamiltoniana H, $B = dH$, al ser la 2–forma Ω cerrada y degenerada, su núcleo o distribución característica, es integrable, y la condición de recursión se transforma en el hecho de que el hamiltoniano H ha de ser constante a lo largo de las componentes conexas de las hojas de la distribución generalizada definida por la distribución característica $\ker \Omega$. Iterando el argumento, definimos la subvariedad reducida $k+1$ como sigue:

$$M_{k+1} = \{x \in M_k |\ Z_k(H_k) = 0,\ \ \forall Z_k \in \ker \Omega_k\}, \tag{3.25}$$

donde $\Omega_k = i_k^*\Omega_0$ e $i_k\colon M_k \longrightarrow M_0$ es la inclusión canónica. De nuevo, bajo condiciones apropiadas de regularidad, como las dadas en el Teorema 3.1.2, este algoritmo nos conduce a una ecuación diferencial E_∞ consistente definida en una subvariedad M_∞, que llamaremos variedad final de las ligaduras.

Una descripción de la geometría de esta dinámica y de la aplicación del algoritmo de ligaduras para sistemas vakónomos se encuentra en [85].

3.2. Teoría de Control Óptimo Singular como una teoría de ecuaciones implícitas

Ahora vamos a aplicar todo lo estudiado en las secciones anteriores al problema de control óptimo, para ello nos situamos en el contexto adecuado.

3.2.1. Aplicación del algoritmo recursivo clásico a las ecuaciones del principio del máximo de Pontryagin

Gracias a los resultados del capítulo 2 podemos formular la búsqueda de curvas extremales como un problema presimpléctico, donde dichas curvas son curvas integrales de los campos vectoriales solución de la ecuación (2.10). En efecto, como vimos en § 2.4.5, el Teorema 2.4.5 nos garantiza que el problema de control óptimo:

$$\dot{x}^i = f^i(x,u); \quad \text{mín} \int_0^T L(x,u)\,dt$$

es equivalente para sus curvas optimales ordinarias al sistema presimpléctico hamiltoniano (2.39)

$$i_\Gamma \Omega = dH,$$

donde Ω es la 2–forma presimpléctica canónica en el espacio total M del problema definido en § 2.2.2 y H es el hamiltoniano (2.9) de Pontryagin.

Matricialmente podemos escribir esto anterior de la forma descrita en § 3.1.5, como un sistema cuasilineal presimpléctico $A(x)\,\dot{x} = f(x)$:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -I & 0 \\ \hline I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{p} \\ \dot{u} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} H_x \\ H_p \\ H_u \end{array}\right),$$

donde la matriz de este sistema $A = (a_{ij})$ es antisimétrica y representa la 2–forma Ω antes mencionada.

Podemos aplicar el algoritmo de ligaduras para sistemas cuasilineales presimplécticos discutido en § 3.1.5 (ver, por ejemplo, X. Gràcia y J. M. Pons [49] para más detalles).

De esta manera, la subvariedad de las ligaduras primarias M_1 queda definida, como ya hicimos en § 2.2.5, a través de la condición:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{\, \xi \in M |\ Z(H) = 0,\ \forall Z \in \ker\,\Omega \,\} = \\ &= \left\{ \xi \in M |\ \phi_a = \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0,\ a = 1, \ldots, m \right\}. \end{aligned}$$

A continuación podemos iterar el algoritmo como hicimos en la sección 3.1.5 o bien retomar un análisis más directo de la condición de compatibilidad en cada paso. La razón de ello es que en la aproximación habitual, la variedad iterada en el paso $k+1$ está determinada por la anulación de las funciones $\phi^{(k)} = Z_k(H_k)$, donde Z_k es una base de $\ker \Omega_k$ y Ω_k es la restricción de Ω a M_k. Puede resultar difícil determinar en cada subvariedad el núcleo de la restricción a M_k, ya que no dispondremos de coordenadas simples como las que teníamos en el primer paso para construir la base de vectores en $\ker \Omega$. Por todo ello, resultará más práctico replantear el algoritmo de ligaduras como condición de existencia de alguna dinámica en cada punto tangente a la subvariedad. Es decir, tal y como explicamos en § 2.2.5, debemos probar si existe para cada punto $\xi \in M_1$ algún campo vectorial Γ_C, ecuación (2.18), tal que Γ_C sea paralelo a M_1, esto es, se verifique la ecuación (2.19):

$$\Gamma(\phi_a^{(1)}) = 0 \ \text{ en } M_1, \ \forall a = 1, \ldots, m.$$

Dado $\xi \in M_1$ existe C tal que se verifica (2.19) si y sólo si el punto es regular, esto es, si W_{ab}, ecuación (2.20), es invertible en ξ. Si el punto ξ es singular, W_{ab} no es invertible y, en general, no existe C tal que la ecuación (2.19) se satisface en ξ. El algoritmo de ligaduras se aplicaría como sigue. Denotaríamos por M_2 el subconjunto de M_1 construido de tal forma que para cada uno de sus puntos existe, al menos, un vector C tal que $\Gamma(\phi_a^{(1)})(\xi) = 0, \ \forall a = 1, \ldots, m$. Si este subconjunto es una subvariedad diferenciable de M_1, podrá definirse localmente por nuevas ligaduras que denotamos genéricamente por $\phi^{(2)}$. En ocasiones se denota por $\phi^{(2)}$ las funciones

$$\phi_a^{(2)} = \Gamma(\phi_a^{(1)}),$$

no porque realmente las ligaduras secundarias se obtengan directamente como $\Gamma(\phi_a^{(1)})$, sino porque del análisis de la ecuación $\Gamma(\phi_a^{(1)}) = 0$ se obtienen las funciones $\phi^{(2)}$. Veremos esta situación con todo detalle para sistemas LQ. Así,

$$M_2 = \{\, (x, p, u) \in M_1 |\ \phi_b^{(2)} = 0, \ b = 1, \ldots, m_2 \,\}.$$

Si denotamos por p_2 la restricción de la proyección pr_2 a M_2, se cumple, análogamente, que $\ker p_{2*} = \ker \Omega|_{M_2}$ y que p_{2*} será inyectiva si la matriz que multiplica a C^b es invertible. Si no lo fuera, continuamos y vamos obteniendo así un algoritmo de recurrencia y una familia de subvariedades definidas como sigue:

$$M_k = \{(x, u, p) \in M_{k-1} |\ \exists C \text{ t. q. } \Gamma_C(\phi^{(k-1)}) = 0\}, \ k > 1. \tag{3.26}$$

Si este algoritmo se estabiliza, es decir, existe cierto r finito para el cual ya no aparecen nuevas ligaduras, $M_r = M_{r+1} = M_{r+2} = \ldots$, decimos que el sistema

es noetheriano o que se estabiliza en un número finito de pasos, y obtenemos una subvariedad estable $M_\infty = \cap_{k>0} M_k$ en la cual se puede resolver la ecuación dinámica y las curvas integrales correspondientes de los campos vectoriales permanecerán en esta subvariedad.

$$M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \ldots \supseteq M_\infty.$$

La variedad M_∞ se denomina subvariedad final de las ligaduras. En ella las curvas integrales de los campos vectoriales solución de la ecuación $i_\Gamma \Omega = dH$ permanecen en M_∞, pero pueden ocurrir dos cosas:

- que exista un "feedback" optimal de todos los controles, $u^a = \psi(x,p)$, $a = 1, \ldots, m$, en la subvariedad final de las ligaduras. Esto tendrá lugar cuando en el último paso quede completamente determinado el campo vectorial y, por lo tanto, el valor de las constantes $C^a = \dot{u}^a$.

- que no exista un "feedback" optimal de todos los controles. Esto se dará cuando lleguemos a ligaduras que sean combinación lineal de las anteriores y, por lo tanto, se pare el algoritmo sin determinar el valor de todas las constantes C^a. En este caso habrá algunos controles cuya velocidad podrá tomar cualquier valor, por lo que diremos que hay una libertad "gauge" en la solución del problema.

La discriminación entre los dos casos anteriores está asociada a la naturaleza de primera o segunda clase de las ligaduras que definen M_∞, como veremos más adelante.

Tenemos una serie de inclusiones naturales

$$M_\infty \xrightarrow{i_\infty} \cdots \xrightarrow{i_4} M_3 \xrightarrow{i_3} M_2 \xrightarrow{i_2} M_1 \xrightarrow{i_1} M.$$

La subvariedad M_k, definida mediante las funciones de ligadura $\phi_a^{(k)}$, proyecta sobre T^*P al restringir la aplicación de proyección pr_2 a ésta. Denotando la restricción de pr_2 a M_k como p_k, es decir, $p_1 = pr_2|_{M_k}$, y la inclusión canónica como $i_k \colon M_k \longrightarrow M_{k-1}$. La subvariedad M_k hereda una 2–forma cerrada $\Omega_k = i_k^* \Omega_{k-1} = i_k^* i_{k-1}^* \Omega_{k-2} = \cdots = i_k^* i_{k-1}^* \cdots i_1^* \Omega$. Denotando el resto de objetos como $W_k = W|_{M_k}$ y $K_k = K|_{TM_k}$, podemos establecer un lema similar al enunciado en el capítulo anterior, Lema 2.2.4, que se prueba de la misma manera.

Lema 3.2.1

$$\ker \Omega_k = \ker p_{k*} = TM_k \cap K_{k-1} = \ker W_k.$$

Un ejemplo simple

Veamos un ejemplo sencillo donde aplicamos estas ideas. Consideramos las ecuaciones de control en $\mathbb{R}^2$ con variables de estado (x, y),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ L &= \frac{1}{2}v^2 - xu + xy, \end{aligned}$$

donde los controles son en este caso (u, v), el estado inicial (x_0, y_0) y el final (x_T, y_T). El espacio total es $M = M_0 = \mathbb{R}^6$, con coordenadas $(x, y; p_x, p_y; u, v)$. El hamiltoniano es $H = p_x u - \frac{1}{2}v^2 + xu - xy$ y el campo vectorial, utilizando las ecuaciones que se obtienen a partir del principio de máximo de Pontryagin, $\dot{x} = H_{p_x},\ \dot{y} = H_{p_y},\ \dot{p_x} = -H_x,\ \dot{y} = -H_{p_y},\ H_u = 0,\ H_v = 0$, sería

$$\Gamma = u\frac{\partial}{\partial x} + (y-u)\frac{\partial}{\partial p_x} + x\frac{\partial}{\partial p_y} + c\frac{\partial}{\partial u} + d\frac{\partial}{\partial v}.$$

Las ligaduras de primer orden quedan como sigue:

$$\phi_u^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial u} = p_x + x, \quad \phi_v^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial v} = -v.$$

Estas ligaduras nos definen la subvariedad
$M_1 = \{(x, y; p_x, p_y; u, v) \in \mathbb{R}^6 |\ v = p_x + x = 0\}$ y aplicando el algoritmo de ligaduras recursivo obtenemos

$$\phi^{(2)} = \Gamma(p_x + x) = y$$

y, por tanto, la variedad final de ligaduras es
$M_2 = M_\infty = \{(x, y; p_x, p_y; u, v) \in \mathbb{R}^6 |\ v = p_x + x = y = 0\}$, puesto que
$\Gamma(y) = \dot{y} = 0$. En esta subvariedad $M_\infty \subset M$ la dinámica viene definida por el siguiente campo vectorial

$$\Gamma_\infty = u\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial p_x} + x\frac{\partial}{\partial p_y} + c\frac{\partial}{\partial u}.$$

Además, el valor del funcional es

$$S = \int_0^T -xu\,dt = -\int_0^T x\dot{x}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(x^2)\,dt = -\frac{1}{2}(x^2(T) - x^2(0)).$$

Como $\dot{u} = c$ puede ser cualquier función podemos escoger, por ejemplo, $c = 0$, ya que no va a cambiar el valor del funcional, que sólo depende de los valores en los extremos de x. Para este valor de c se tiene que $u = u_0$ y $x(t) = x_0 + u_0 t$. Elegimos el valor de u_0 de forma que se cumpla el valor en el extremo de x, $x(T) = x_T = x_0 + u_0 T$, que queda $u_0 = (x_T - x_0)/T$. Vemos entonces que el sistema es controlable en la variable x, mientras que en la otra variable de estado $y = 0$ es la única solución.

3.2.2. Teorema del embedding coisótropo y el algoritmo de ligaduras

Un importante teorema debido a M. Gotay y J. Sniatycki [48] (ver más detalles en [55]) establece que toda variedad presimpléctica puede sumergirse como una variedad coisótropa en una variedad simpléctica ambiente de manera esencialmente única. Veamos el teorema.

Teorema 3.2.1 *Sea (M,Ω) una variedad presimpléctica, i.e., Ω es una 2–forma cerrada y su distribución característica $K = \ker\Omega$ tiene rango constante. Entonces existe una variedad simpléctica $(\widetilde{M},\widetilde{\Omega})$ y un embedding $i\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ tal que $i^*\widetilde{\Omega} = \Omega$ y el embedding es coisótropo, esto es, $TM^{\perp_{\widetilde{\Omega}}} \subseteq TM$. Además, si $(\widetilde{M}_a,\widetilde{\Omega}_a)$, $j_a\colon M \longrightarrow \widetilde{M}_a$, $a=1,2$, son dos embeddings coisótropos minimales, existen dos abiertos U_a conteniendo a $j_a(M)$, $a=1,2$, y un difeomorfismo $\phi\colon U_1 \longrightarrow U_2$ tal que $\phi^*\widetilde{\Omega}_2 = \widetilde{\Omega}_1$ en U_1.*

La construcción del embedding coisótropo minimal es sencilla. La variedad $\widetilde{M}$ se construye como un entorno tubular de la sección cero del fibrado $K^* \longrightarrow M$, dual del fibrado característico de $K = \ker\Omega$.

Si el entorno es suficientemente pequeño, el fibrado tangente a $\widetilde{M}$ puede identificarse con el fibrado tangente a K^* restringido a M:

$$T\widetilde{M} \cong T_M K^* \cong TM \oplus K^*.$$

Por otro lado, si escogemos un suplementario simpléctico F a K en TM tendremos

$$T\widetilde{M} \cong F \oplus K \oplus K^*$$

y, así, los vectores tangentes a $\widetilde{M}$ podrían identificarse con tripletes $(v;a,\alpha)$, $v \in F,\ a \in K, \alpha \in K^*$. Entonces definimos $\widetilde{\Omega}$ a través de la expresión

$$\widetilde{\Omega}\big((v;a,\alpha),(w;b,\beta)\big) = \Omega(v,w) + \langle\alpha,b\rangle - \langle\beta,a\rangle.$$

Utilizando el teorema de extensión de Weinstein, se prueba que existe esencialmente una única 2–forma cerrada que extiende a la 2–forma Ω así definida a un entorno de la sección cero del fibrado $K \longrightarrow M$.

Hemos encontrado antes una formulación del algoritmo recursivo para ecuaciones implícitas adaptado a la estructura presimpléctica de la Teoría de Control Óptimo. Podemos plantearnos ahora si existe una formulación genuinamente hamiltoniana de tal algoritmo, donde todos los objetos se encuentren definidos en un marco simpléctico natural. Podemos lograr este objetivo utilizando el embedding coisótropo de Gotay descrito con anterioridad.

Consideremos el análisis realizado en la sección (3.1.5) de las ecuaciones cuasilineales presimplécticas; donde $A(x)\dot{x} = \Omega_x(\dot{x}, \cdot)$; $A\colon TM \longrightarrow T^*M$. Podemos construir el embedding coisótropo de (M, Ω), que denotamos por $(\widetilde{M}, \widetilde{\Omega})$, donde la ecuación cuasilineal presimpléctica definida por Ω y $f = dH$ se extiende de manera esencialmente única a $\widetilde{M}$ a través de $\widetilde{\Omega}$ y $\widetilde{H}$ es una extensión cualquiera de H a $\widetilde{M}$.

Entonces, podemos considerar el campo hamiltoniano $\Gamma_{\widetilde{H}}$ definido por la ecuación

$$i_{\Gamma_{\widetilde{H}}}\widetilde{\Omega} = d\widetilde{H},$$

que tiene solución única en todo punto de $\widetilde{M}$ al ser $\widetilde{\Omega}$ simpléctica. Además, consideramos las ligaduras definidas por la subvariedad $j(M) \subset \widetilde{M}$ definidas por el embedding coisótropo.

Así, si $\widetilde{M}_0 \equiv \widetilde{M}$ y $\widetilde{M}_1 = j(M)$ y aplicamos el algoritmo de ligaduras, definimos

$$\widetilde{M}_2 = \{x \in \widetilde{M}_1 |\ \Gamma_{\widetilde{H}}(x) \in T_x\widetilde{M}_1\}$$

o equivalentemente $\widetilde{M}_2$ es el conjunto de puntos en $\widetilde{M}_1$ tal que $\operatorname{Im}\widetilde{\Omega}\Big|_{T_x\widetilde{M}_1} \ni d\widetilde{H}(x)$, así, definimos recursivamente

$$\widetilde{M}_k = \{x \in \widetilde{M}_{k-1} |\ \operatorname{Im}\widetilde{\Omega}\Big|_{T_x\widetilde{M}_{k-1}} \ni d\widetilde{H}(x)\}$$

dando lugar a una familia encajada de variedades presimplécticas:

$$\widetilde{M} = \widetilde{M}_0 \supset \widetilde{M}_1 = j(M) \supset \widetilde{M}_2 \supset \cdots \supset \widetilde{M}_r \supset \cdots .$$

Teorema 3.2.2 *Dada la ecuación cuasilineal presimpléctica (M, Ω, dH), el algoritmo recursivo presimpléctico, definido en la sección (3.1.5), y el algoritmo de ligaduras asociado al sistema hamiltoniano $(\widetilde{M}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{H})$, obtenido a partir del embedding coisótropo de (M, Ω, H) y la subvariedad $j(M)$, son equivalentes.*

Demostración. Si consideramos la subvariedad $j(M)$ de $\widetilde{M}$ y la denominamos $\widetilde{M}_1$ e imponemos que $\Gamma_{\widetilde{H}}$ sea tangente a ella, observamos que esto se verifica solamente en los puntos $\xi \in \widetilde{M}_1$ tales que $Z(\widetilde{H}) = 0$, donde $Z \in K = \ker\Omega$. En efecto, notemos que $\Gamma_{\widetilde{H}}$ será tangente a $\widetilde{M}_1$ si $\Gamma_{\widetilde{H}}(v_a) = 0$, donde v_a son coordenadas a lo largo de K^*, pero $\widetilde{H} = H_0 + \lambda^a v_a$ y $\Gamma_{\widetilde{H}}(v_a) = \lambda^a \partial H_0/\partial u^a + \partial\lambda^b/\partial u^a v_a$ y, por tanto, $\Gamma_{\widetilde{H}}(v_a) = 0$ en $\widetilde{M}_1$ si y sólo si $\partial H_0/\partial u^a = 0$. □

3.2.3. Aplicación a la Teoría de Control Óptimo: la formulación hamiltoniana del algoritmo de ligaduras

Ahora vamos a transformar la formulación presimpléctica de los problemas de control óptimo en una formulación simpléctica donde podemos utilizar todas las

herramientas de la Mecánica Hamiltoniana, incluidos los corchetes de Poisson. Para ello extendemos la variedad presimpléctica $M = T^*P \times_P C$ a una variedad simpléctica $\widetilde{M}$ gracias al teorema de embedding coisótropo de Gotay, haremos lo mismo con el hamiltoniano y con todas las ligaduras.

El sistema que resulta lo resumimos en la tabla siguiente:

	Presimpléctico	Embedding coisotrópico
Espacio de fases	$M_0 = T^*P \times C$	$\widetilde{M} = T^*C$
Estructura (pre) simpléctica	$\Omega_0 = dx^i \wedge dp_i$	$\widetilde{\Omega} = dx^i \wedge dp_i + du^a \wedge dv_a$
Hamiltoniano de Pontryagin	H_0	$\widetilde{H}_C = H + C^a v_a$
Ligaduras ($k \geq 1$)	$\phi^{(k)} = \phi^{(k)}(x, p, u)$	$\widetilde{\phi}^{(k)} = \phi^{(k)} + \sum_{l=1}^{k} \lambda^b{}_{al}\, \widetilde{\phi}^{(k-l)}{}_b$, $\widetilde{\phi}^{(0)}{}_a = v_a$

Ahora, el espacio total se obtiene añadiendo el espacio dual de la distribución característica K a los grados de libertad de control, i.e.,
$\widetilde{M} \cong T^*P \times C \times K^* = T^*C$. Nótese que el fibrado cotangente T^*C del espacio total de estados y controles, C, tiene la estructura local en torno a la sección cero de C, $T^*C \cong T^*P \oplus K \oplus K^*$ y, de acuerdo con el teorema del embedding coisótropo, proporciona el modelo adecuado. Finalmente, en este caso la extensión es global, ya que T^*C es una variedad simpléctica. Las coordenadas duales en K a los controles las denotamos como v_a. Por lo tanto, la extensión simpléctica $\widetilde{\Omega}$ de la forma presimpléctica Ω la obtenemos con la dualidad simpléctica natural de su núcleo, el subespacio vertical K, con su dual K^*.

La ecuación dinámica (2.10) también debe ser satisfecha, pero en el nuevo espacio. Ahora esta ecuación se convierte en

$$i_{\widetilde{\Gamma}_C} \widetilde{\Omega} = d\, \widetilde{H}_C. \tag{3.27}$$

Al imponer la ecuación anterior el campo vectorial $\widetilde{\Gamma}_C$ queda como sigue:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_C &= \frac{\partial \widetilde{H}_C}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \widetilde{H}_C}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial \widetilde{H}_C}{\partial v_a}\frac{\partial}{\partial u^a} - \frac{\partial \widetilde{H}_C}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial v_a} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + C^a\frac{\partial}{\partial u^a} - \frac{\partial H}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial v_a}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Al haber extendido el espacio debemos imponer nuevas ligaduras para que el problema se mantenga como el original. Estas ligaduras vienen dada por las propias coordenadas coisótropas, v_a, i.e.,

$$M_0 = \{(x,p,u,v) \in \widetilde{M} |\, \widetilde{\phi}^{(0)}{}_a := -v_a = 0\},$$

estas nuevas ligaduras $\widetilde{\phi}^{(0)}{}_a$, que llamaremos ligaduras de orden cero, nos restringen a la variedad M_0 de partida.

El campo vectorial $\widetilde{\Gamma}_C$ tiene la propiedad de que al actuar sobre las coordenadas coisótropas v_a el resultado es la ligadura primaria que teníamos previamente, $\widetilde{\Gamma}_C\,(v_a) = -\partial H/\partial u^a$. Por lo tanto, $\widetilde{\Gamma}_C$ será tangente a M_0 si y sólo si $\partial H/\partial u^a = 0$ como ya establecimos anteriormente.

Ahora vamos a demostrar que el corchete de Poisson de las nuevas ligaduras con el nuevo hamiltoniano, esto es, la derivada de $\widetilde{\phi}^{(k)}$ con respecto al tiempo a lo largo del campo vectorial, ha de verificar:

$$\widetilde{\Gamma}_C\,(\widetilde{\phi}^{(k)}{}_a)\Big|_{M_k} = \Gamma_C(\phi^{(k)}{}_a) = \{\phi^{(k)}{}_a, H\} + \frac{\partial \phi^{(k)}{}_a}{\partial u^b}\, C^b,$$

donde $\{\phi^{(k)}{}_a, H\}$ es una notación abreviada para la expresión $(\partial \phi^{(k)}{}_a/\partial x)\,\dot{x} + (\partial \phi^{(k)}{}_a/\partial p)\,\dot{p}$. Para probarlo, primero definimos las ligaduras extendidas como:

$$\widetilde{\phi}^{(k)}{}_a = \widetilde{\Gamma}_C(\widetilde{\phi}^{(k-1)}{}_a) + \lambda^b{}_{ak}\,\widetilde{\phi}^{(0)}{}_b.$$

Efectivamente, si las calculamos obtenemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}^{(0)}{}_a &= -v_a, \\
\widetilde{\phi}^{(1)}{}_a &= \widetilde{\Gamma}_C(\widetilde{\phi}^{(0)}{}_a) + \lambda^b{}_{a1}\,\widetilde{\phi}^{(0)}{}_b = \frac{\partial H}{\partial u^a} + \lambda^b{}_{a1}\,\widetilde{\phi}^{(0)}{}_b.
\end{aligned}$$

Así, para $k = 1$ se tiene que

$$\widetilde{\Gamma}_C(\widetilde{\phi}^{(1)}{}_a) = \{\phi^{(1)}{}_a, H\} + \frac{\partial^2 H}{\partial u^a \partial u^b}\, C^b + \lambda^b{}_{a1}\,\frac{\partial H}{\partial u^b}$$

y, entonces,

$$\widetilde{\Gamma}_C\,(\widetilde{\phi}^{(1)}{}_a)\Big|_{M_1} = \Gamma_C(\phi^{(1)}{}_a).$$

Para k general

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}^{(k)}{}_a &= \widetilde{\Gamma}_C(\widetilde{\phi}^{(k-1)}{}_a) + \lambda^b{}_{ak}\,\widetilde{\phi}^{(0)}{}_b \\
&= \phi^{(k)}{}_a + \sum_{l=1}^{k} \lambda^b{}_{al}\,\widetilde{\phi}^{(k-l)}{}_b
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\Gamma}_C(\widetilde{\phi}^{(k)}{}_a) = \Gamma_C(\phi^{(k)}{}_a) + \sum_{l=1}^{k} \lambda^b{}_{al}\,\widetilde{\phi}^{(k+1-l)}{}_b$$

y, por tanto, se concluye que

$$\widetilde{\Gamma}_C(\widetilde{\phi^{(k)}}_a)\Big|_{M_k} = \Gamma_C({\phi^{(k)}}_a) = \{{\phi^{(k)}}_a, H\} + \frac{\partial {\phi^{(k)}}_a}{\partial u^b} C^b.$$

Cualquier forma de extender las ligaduras, que consista en sumar una combinación lineal de las anteriores, va a ser válida, ya que nos va a conducir a la misma subvariedad final de las ligaduras $M_\infty \subset M_1 \subset M_0 \subset \widetilde{M}$. Hemos elegido esta extensión para el desarrollo teórico, pero en el algoritmo numérico que mostraremos más adelante las extenderemos de la manera más simple posible: cogeremos las ligaduras de orden cero y el resto serán iguales a las obtenidas mediante el algoritmo PCA. Haremos esto para simplificar los cálculos, pues nos interesa que el proceso numérico para obtener M_∞ tenga que realizar el menor número posible de operaciones.

Análisis de las ecuaciones de movimiento

Una vez que hemos hallado la subvariedad final de ligaduras, M_∞, el siguiente paso es analizar el campo vectorial que se obtiene en esta subvariedad. Para ello iremos clasificaremos las ligaduras en ligaduras de primera clase y ligaduras de segunda clase de acuerdo con las características geométricas de los campos hamiltonianos que definen.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Consideramos una subvariedad $i\colon N \hookrightarrow M$. Si denotamos por $\omega_N = i^*\omega$ la restricción de ω a N, el espacio tangente a N se podrá descomponer como sigue: $TN = (TN \cap TN^\perp) \oplus F$, donde $TN^\perp = \{\, v \in T_N M |\ \omega_N(v,u) = 0,\ \forall u \in TN \,\}$ es el ortogonal simpléctico de TN en TM y F es un subespacio simpléctico. Notemos que $\ker \omega_N = TN \cap TN^\perp$ y $\omega_N|_F$ es una forma no degenerada.

Definición 3.2.1 *[97] Diremos que una función ϕ tal que $\phi|_N = 0$ es de primera clase si $X_\phi \in TN \cap TN^\perp$, esto es, el campo hamiltoniano correspondiente a ϕ en N es tangente a N. En caso contrario diremos que una ligadura es de segunda clase.*

Es posible probar que si Φ es un conjunto de ligaduras independientes, podemos descomponer este conjunto en dos familias $\Phi = \{\, \nu^A, \chi^a \,\}$ donde ν^A son ligaduras de primera clase y χ^a de segunda clase y verifican

$$\begin{aligned} \{\nu^A, \nu^B\} &= C_C^{AB}\phi^{(C)}, \\ \{\nu^A, \chi^a\} &= C_B^{Aa}\phi^{(B)}, \\ \{\chi^a, \chi^b\} &= C^{ab} \end{aligned}$$

y C^{ab} es no degenerada. Más detalles en [97] y en [55].

Teorema 3.2.3 *Si existen ligaduras de primera clase ν^A definiendo la variedad final de las ligaduras M_∞, el campo vectorial es de la forma*

$$\Gamma_\infty = \Gamma_{H_0} + \lambda_A \Gamma_{\nu^A}. \tag{3.29}$$

Donde Γ_{ν^A} es el campo hamiltoniano correspondiente a la ligadura ν^A.

Demostración. La forma más general del hamiltoniano en M_∞ es

$$H = H_0 + \lambda_A \nu^A + \lambda_a \chi^a$$

y el campo vectorial asociado a este hamiltoniano es

$$\Gamma = \Gamma_{H_0} + \lambda_A \Gamma_{\nu^A} + \lambda_a \Gamma_{\chi^a} + \nu^A \Gamma_{\lambda_A} + \chi^a \Gamma_{\lambda_a},$$

por lo tanto, restringido a M_∞ este campo vectorial es de la forma:

$$\Gamma|_{M_\infty} = \Gamma_{H_0} + \lambda_A \Gamma_{\nu^A} + \lambda_a \Gamma_{\chi^a}$$

como este campo tiene que dejar invariantes al conjunto de ligaduras, debemos imponer que

$$\Gamma(\nu^B) = \Gamma(\chi^b) = 0,$$

lo que implica que, utilizando el hecho de que Γ_{H_0} ya las deja invariante por construcción, $\lambda_a = 0$. □

Corolario 3.2.1 *Si existen ligaduras de primera clase, la 2–forma Ω_∞ es cerrada, pero degenerada y, por lo tanto, va a existir una libertad "gauge". Además, las direcciones ambiguas están generadas por los campos hamiltonianos correspondientes a las ligaduras de primera clase.*

Entonces, al final del proceso, la subvariedad final de las ligaduras, M_∞, puede ser:

- una subvariedad simpléctica de $\widetilde{M}$, por lo que tenemos una 2–forma cerrada y no degenerada Ω_∞ y un hamiltoniano H_∞, es decir, el siguiente sistema $(M_\infty, H_\infty, \Omega_\infty)$ es simpléctico, o bien,

- una subvariedad presimpléctica de $\widetilde{M}$, en cuyo caso habrá una libertad gauge.

Veamos dos ejemplos muy sencillos donde se plasman todas estas ideas y se resuelve el problema completamente.

Primer ejemplo: La subvariedad final de las ligaduras es simpléctica

Este ejemplo de control óptimo viene definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 + u_1 \\ \dot{x_2} &= x_2 + u_2 \\ L &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + \frac{1}{2}u_1^2, \end{aligned}$$

a partir de las cuales construimos el hamiltoniano de la forma usual y con éste el campo vectorial:

$$\begin{aligned} H &= p_1\,(x_1+u_1) + p_2\,(x_2+u_2) - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1\,u_1 - x_2\,u_2 - \frac{1}{2}u_1^2 \\ \Gamma_C &= (x_1+u_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2+u_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (-p_1+x_1+u_1)\frac{\partial}{\partial p_1} + \\ &+ (-p_2+x_2+u_2)\frac{\partial}{\partial p_2} + c_1\frac{\partial}{\partial u_1} + c_2\frac{\partial}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

El espacio extendido, añadiendo las variables coisótropas, queda como $\widetilde{M} = \{(x_1, p_1, x_2, p_2, u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathbb{R}^8\}$. En estas coordenadas, la matriz que representa a la 2–forma Ω es

$$(\widetilde{\Omega}) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

vemos que Ω es simpléctica y, además, está escrita en forma canónica.

Ahora imponemos que el problema sea el mismo que antes de extender el espacio. Esto lo hacíamos creando unas nuevas ligaduras, que son las que anulan a las variables coisótropas. Estas ligaduras, que nos llevan a M_0, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}{}_1 &= -v_1 \\ \phi^{(0)}{}_2 &= -v_2. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el algoritmo de ligaduras obtenemos el resto de ligaduras:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}{}_1 &= p_1 - x_1 - u_1 \\ \phi^{(1)}{}_2 &= p_2 - x_2 \\ \phi^{(2)}{}_2 &= -x_2 \\ \phi^{(3)}{}_2 &= u_2, \end{aligned}$$

por lo tanto,
$M_\infty = \{(x,p,u,v) \in \mathbb{R}^8 |\ u_1 = p_1 - x_1, x_2 = p_2 = u_2 = v_2 = v_1 = 0\}$, que es una subvariedad de $\mathbb{R}^8$ de dimensión 2, descrita por las coordenadas x_1 y p_1. Aunque no son las únicas que podemos escoger, ya que si tomamos cualquier combinación lineal de ellas, linealmente independiente, y le sumamos cualquiera de las ligaduras, el resultado sería el mismo. Al haber quedado determinadas todas las variables de control, no tendremos libertad gauge y no van a aparecer ligaduras de primera clase. Lo comprobamos calculando los corchetes de todas las ligaduras. Definimos las ligaduras de la siguiente forma, para abreviar la notación, $\Phi = \{\phi^1,\ \phi^2\ , \phi^3,\ \phi^4,\ \phi^5,\ \phi^6\} := \{\phi^{(0)}{}_1,\ \phi^{(0)}{}_2,\ \phi^{(1)}{}_1,\ \phi^{(1)}{}_2,\ \phi^{(2)}{}_2,\ \phi^{(3)}{}_2\}$. La matriz $\{\Phi,\Phi\}_{i,j}$ de los corchetes es la siguiente:

$$\{\Phi,\Phi\}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es invertible, lo que implica que todas las ligaduras son de segunda clase. Podemos calcular la matriz de la 2–forma en las coordenadas que definen la subvariedad final de las ligaduras y de las propias ligaduras,
$\{x_1,\ p_1,\ \phi^1,\ \phi^2\ , \phi^3,\ \phi^4,\ \phi^5,\ \phi^6\}$, esto es simplemente un cambio de coordenadas respecto de las coordenadas de partida con las que obtuvimos (3.30). Hacemos esto para mostrar que la primera caja, denotada por (Ω_∞), corresponde a una 2–forma simpléctica. Al calcular la 2–forma, después de haber hecho la extensión al espacio simpléctico $\widetilde{M}$, siempre vamos a encontrar una 2–forma $\widetilde{\Omega}$ simpléctica, pero sólo será simpléctica la 2–forma correspondiente a M_∞ cuando todas las ligaduras sean de segunda clase. Veámoslo:

$$(\widetilde{\Omega}) = \left[\begin{array}{cc|cccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} (\Omega_\infty) & * \\ \hline * & * \end{array}\right].$$

Se ve que la subvariedad M_∞ es simpléctica, pues la 2–forma definida allí es cerrada y no degenerada, aunque ahora ya no aparece de manera canónica. Para que esté escrita de forma canónica tenemos que hacer un cambio de variable, reordenando las coordenadas y sumando a éstas o a las ligaduras una combinación lineal del resto de ligaduras de forma adecuada, de manera que no se altere la

subvariedad M_∞; escogiendo las siguientes coordenadas para M_∞:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - p_1 \\ X_2 &= p_1 - v1 \end{aligned}$$

y las ligaduras en el siguiente orden $[x_1 - p_1, p_1 - v_1; \phi^3, \phi^1; \phi^4, \phi^5; \phi^2, \phi^6]$ para que queden agrupadas en parejas conjugadas, la matriz de la 2–forma $(\widetilde{\Omega})$ queda ahora

$$(\widetilde{\Omega}) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Este proceso de escoger de manera adecuada las coordenadas y ligaduras no es único. Realmente lo que sí queremos es averiguar si existen ligaduras de primera clase, porque intervienen en la construcción de la dinámica final. El hecho de que la 2–forma esté escrita en forma canónica o no, no afecta al cálculo de soluciones. En este ejemplo como todas las ligaduras son de segunda clase no intervienen en el campo vectorial, que queda de la forma:

$$\Gamma_\infty = p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

La solución es, entonces,

$$\begin{aligned} p_1 &= cte \\ x_1 &= x_{1,0} + p_1\, t \\ u_1 &= u_{1,0} - p_1\, t \end{aligned}$$

y el resto de variables son todas nulas. Como
$p_1 = x_1 + u_1 = x_{1,0} + p_1\, t + u_{1,0} - p_1\, t = x_{1,0} + u_{1,0}$, queda determinada la condición inicial para la variable de control en función del valor de p_1, $u_{1,0} = p_1 - x_{1,0}$. Por otro lado, el valor de p_1 también queda determinado porque $x_{1,T} = x_{1,0} + p_1\, T$, por lo tanto, tenemos que $p_1 = (x_{1,T} - x_{1,0})/T$ y la solución queda completamente determinada a partir de los datos inicial y final de las variables de estado y del valor de T:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x_{1,T} - x_{1,0}}{T} \\ x_1 &= x_{1,0} + \frac{x_{1,T} - x_{1,0}}{T}\, t \\ u_1 &= \frac{x_{1,T} - (T+1)x_{1,0}}{T} - \frac{x_{1,T} - x_{1,0}}{T}\, t. \end{aligned}$$

El lagrangiano toma el siguiente valor a lo largo de las curvas extremales:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 = \\ &= \frac{1}{2}(x_{1,0} + p_1 t)^2 + (x_{1,0} + p_1 t)(u_{1,0} - p_1 t) + \frac{1}{2}(u_{1,0} - p_1 t)^2 = \\ &= (x_{1,0} + u_{1,0})^2 - 2x_{1,0}p_1 t, \end{aligned}$$

por lo que el funcional objetivo es:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T L(x,u)\,dt = \int_0^T \left[(x_{1,0} + u_{1,0})^2 - 2x_{1,0}p_1 t\right]\,dt = \\ &= (x_{1,0} + u_{1,0})^2 T - x_{1,0}p_1 T^2 = \frac{(x_{1,T} - x_{1,0})^2}{T}[x_{1,T} - x_{1,0}(1 + T^2)]. \end{aligned}$$

Segundo ejemplo: La subvariedad final de las ligaduras es presimpléctica

Ahora mostramos otro ejemplo, similar al anterior, en el cual aparecen ligaduras de primera clase. Las ecuaciones que gobiernan el sistema ahora son:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 + u_1 \\ \dot{x_2} &= x_2 \\ L &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + \frac{1}{2}u_1^2. \end{aligned}$$

El hamiltoniano y el campo vectorial son de la forma:

$$\begin{aligned} H &= p_1\,(x_1 + u_1) + p_2\,x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1\,u_1 - x_2\,u_2 - \frac{1}{2}u_1^2 \\ \Gamma_C &= (x_1 + u_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + (-p_1 + x_1 + u_1)\frac{\partial}{\partial p_1} + (-p_2 + x_2 + u_2)\frac{\partial}{\partial p_2} \\ &+ c_1\frac{\partial}{\partial u_1} + c_2\frac{\partial}{\partial u_2} \end{aligned}$$

y el espacio extendido es igual que en el ejemplo anterior
$\widetilde{M} = \{(x_1, p_1, x_2, p_2, u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathbb{R}^8\}$. En estas coordenadas, la matriz que representa a la 2–forma es la misma que en el ejemplo anterior:

$$(\widetilde{\Omega}) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

que es de nuevo simpléctica y además está en forma canónica, por haber escogido las coordenadas en ese orden. Las ligaduras que nos llevan a M_0 son de nuevo:

$$\begin{aligned} {\phi^{(0)}}_1 &= -v_1 \\ {\phi^{(0)}}_2 &= -v_2 \end{aligned}$$

y el resto de ligaduras las obtenemos a aplicando el algoritmo de ligaduras partiendo de estas anteriores

$$\begin{aligned} {\phi^{(1)}}_1 &= p_1 - x_1 - u_1 \\ {\phi^{(1)}}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$M_\infty = \{(x_1, x_2, p_1, p_2, u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^8 |\ u_1 = p_1 - x_1, x_2 = v_2 = v_1 = 0\}$ es una subvariedad de dimensión 4 descrita, por ejemplo, por las coordenadas x_1, p_1, u_2 y p_2, ya que no son las únicas posibles. En este problema aparecen unas variables que pueden tomar cualquier valor pero que no afectan a la dinámica del resto, es decir, tenemos libertad gauge. Calculamos los corchetes de las ligaduras para estudiar cuáles son las ligaduras de primera clase, que tenemos que añadir al campo vectorial. La matriz de los corchetes de las ligaduras $\Phi = \{\phi^1,\ \phi^2\ , \phi^3,\ \phi^4\} := \{{\phi^{(0)}}_1,\ {\phi^{(0)}}_2,\ {\phi^{(1)}}_1,\ {\phi^{(1)}}_2\}$ es la siguiente:

$$\{\Phi, \Phi\}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos que la segunda ligadura y la última son de primera clase y el resto de segunda clase. Estas dos son las que hay que añadir al campo vectorial. Veamos en primer lugar que, efectivamente, la subvariedad final de las ligaduras no es simpléctica, pero que podemos encontrar una subvariedad M_S, simpléctica, que contiene a la anterior, es decir, $M_\infty \subset M_S$. Esta subvariedad M_S está descrita por las variables que definen a la subvariedad final y las ligaduras de primera clase:

$$(\widetilde{\Omega}) = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \left(\ \Omega_\infty\ \right) & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \left(\ \Omega_S\ \right) & * \\ \hline * & * \end{array}\right].$$

El campo vectorial, añadiendo la dinámica correspondiente a las ligaduras de primera clase, queda entonces de la forma que sigue a continuación

$$\Gamma_\infty = p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial p_2} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial u_2},$$

al integrarlo obtenemos la solución del problema que resulta ser:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,0} + \frac{x_{1,T} - x_{1,0}}{T}\, t \\ u_1 &= \frac{x_{1,T} - (T+1)x_{1,0}}{T} - \frac{x_{1,T} - x_{1,0}}{T}\, t \\ p_1 &= \frac{x_{1,T} - x_{1,0}}{T} \\ p_2 &= \lambda_1\, t + p_{2,0} \\ u_2 &= \lambda_2\, t + u_{2,0} \end{aligned}$$

y el resto de variables nulas. El coste vuelve a ser el mismo que en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T L(x,u)\, dt = \int_0^T \left[(x_{1,0} + u_{1,0})^2 - 2x_{1,0}p_1 t\right]\, dt = \\ &= (x_{1,0} + u_{1,0})^2 T - x_{1,0}p_1 T^2 = \frac{(x_{1,T} - x_{1,0})^2}{T}[x_{1,T} - x_{1,0}(1+T^2)]. \end{aligned}$$

3.3. El algoritmo de ligaduras para el problema de control óptimo LQ y su implementación numérica

En esta sección proponemos un algoritmo numérico para calcular la variedad final de las ligaduras del problema de control óptimo LQ singular y las ligaduras de primera clase que afectan al campo vectorial. Aplicaremos este algoritmo a los dos ejemplos anteriores sencillos y, posteriormente, diseñaremos algunos ejemplos no triviales para estudiar de forma empírica la estabilidad del algoritmo.

Primero estudiaremos la parte del algoritmo que concierne únicamente a las ligaduras. Escribimos las coordenadas como vectores columna:
$(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$. Para el estudio de las ligaduras no añadimos las coordenadas coisótropas, v_a, aunque las añadiremos posteriormente cuando presentemos el algoritmo completo que incluye el cálculo de corchetes y ligaduras de primera y segunda clase.

3.3.1. El algoritmo de ligaduras lineal para problemas LQ singulares

La ecuación de control y el lagrangiano tienen la forma que ya describimos en el capítulo 1, ecuaciones (1.8) y (1.9), y que reproducimos aquí para comodidad del lector:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.32}$$

$$L = \frac{1}{2}x^T Px + x^T Qu + \frac{1}{2}u^T Ru, \tag{3.33}$$

donde las matrices pertenecen a los siguientes espacios vectoriales: $A,\ P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B,\ Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$. El hamiltoniano, escrito en notación matricial, queda

$$H(x, p, u) = p^T Ax + p^T Bu - \frac{1}{2}x^T Px - x^T Qu - \frac{1}{2}u^T Ru. \tag{3.34}$$

En estas coordenadas podemos expresar el campo vectorial como

$$\Gamma_C = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{p}\frac{\partial}{\partial p} + C\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.35}$$

donde las expresiones de las derivadas son las siguientes:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p^T} = Ax + Bu \tag{3.36}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x^T} = -A^T p + Px + Qu. \tag{3.37}$$

En lugar del vector de ligaduras primarias usual, $\partial H/\partial u$, trabajaremos con su traspuesto, el vector columna equivalente

$$\phi^{(1)} := \frac{\partial H}{\partial u^T} = -Q^T x + B^T p - Ru. \tag{3.38}$$

Lema 3.3.1 *Todas las ligaduras introducidas por el algoritmo de ligaduras para una ecuación diferencial implícita lineal son lineales.*

Demostración. Observamos que si E es lineal, el conjunto E es realmente un subespacio lineal de $T\mathbb{R}^{2n+m}$ y su proyección también es un subespacio lineal M_1 de $\mathbb{R}^{2n+m}$. La intersección $TM_1 \cap E = E_1$ será de nuevo un subespacio lineal y así sucesivamente. □

Como todas las ligaduras del problema LQ son lineales, las vamos a representar en cada paso de la forma siguiente:

$$\phi^{(k)} = \sigma^{(k)} x + \beta^{(k)} p + \rho^{(k)} u,$$

donde las ecuaciones matriciales $\phi^{(1)} = 0; \ldots; \phi^{(k)} = 0$ definen los subespacios lineales M_k que vamos obteniendo al aplicar el algoritmo de ligaduras. Describiremos las ligaduras a través de las matrices $\sigma^{(k)}$, $\beta^{(k)}$ y $\rho^{(k)}$ que las caracterizan e iremos almacenando las matrices $[\sigma^{(k)}\ \beta^{(k)}\ \rho^{(k)}]$. Por lo tanto, la primera ligadura, $\phi^{(1)}$, vendrá caracterizada por las matrices siguientes:

$$[\sigma^{(1)}\ \beta^{(1)}\ \rho^{(1)}] = [-Q^T\ B^T - R].$$

Sabemos que si la matriz R es regular obtenemos un "feedback" optimal y el problema termina aquí. Por lo tanto, trabajaremos siempre con matrices R singulares, de tal forma que haya que seguir aplicando el algoritmo de ligaduras. La estabilidad de la ligadura impone que su derivada a lo largo del campo vectorial se anule para algún C, esto es:

$$\Gamma_C(\phi^{(1)}) = \sigma^{(1)}\dot{x} + \beta^{(1)}\dot{p} + \rho^{(1)} C = 0, \tag{3.39}$$

donde $C = \dot{u}$. Dado que $\rho^{(1)}$ es singular la ecuación (3.39) no tendrá solución en general, sin embargo, dado que la parte inhomogenea de la ecuación depende de x, p, u, podemos determinar para qué valores de ellos existe solución. Si en esta segunda ecuación existen algunos valores del vector $C \in \mathbb{R}^m$ que se pueden despejar, quiere decir que para estos valores existe un "feedback" optimal, el resto constituye la ligadura secundaria. Esta separación la realizamos gracias a la descomposición en valores singulares de la matriz $\rho^{(1)}$,

$$\rho^{(1)} = U^{(1)}\,\Sigma^{(1)}\,V^{(1)\,T} = U^{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} s_1^{(1)} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_{r_1}^{(1)} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] V^{(1)\,T}$$

siendo $s_1^{(1)} \geq s_2^{(1)} \geq \cdots \geq s_{r_1}^{(1)} > 0$ los valores singulares de $\rho^{(1)}$ y $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ matrices ortogonales. Ahora, haciendo el cambio de variable que vemos a continuación

$$u^{(1)} = V^{(1)\,T}u \Longrightarrow \dot{u}^{(1)} = V^{(1)\,T}\dot{u} = V^{(1)\,T}C = C^{(1)}$$

y multiplicando la ecuación (3.39) por $U^{(1)\,T}$ ésta queda de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= U^{(1)\,T}\,\Gamma_C(\phi^{(1)}) = U^{(1)\,T}\left(\sigma^{(1)}\dot{x} + \beta^{(1)}\dot{p}\right) + \Sigma^{(1)}C^{(1)} \\ &= U^{(1)\,T}\left(\sigma^{(1)}\dot{x} + \beta^{(1)}\dot{p}\right) + \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{r_1}^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] C^{(1)} = 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde $\Sigma_{r_1}^{(1)}$ denota la siguiente matriz:

$$\Sigma_{r_1}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc} s_1^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{r_1}^{(1)} \end{array}\right].$$

La ecuación (3.40) se puede separar en dos partes, al escribir el vector $C^{(1)}$ como

$$\left[\begin{array}{c} C_{r_1}^{(1)} \\ \\ C_{m-r_1}^{(1)} \end{array}\right],$$

donde $C_{r_1}^{(1)}$ son las componentes $1, \ldots, r_1$ de $C^{(1)}$ y $C_{m-r_1}^{(1)}$ las componentes $r_1+1, \ldots, m$. Tenemos una primera ecuación que consiste en las primeras r_1 filas de (3.40) y otra que corresponde a las restantes:

$$[\ I_{r_1} |\quad 0\quad]\,U^{(1)\,T}\left(\sigma^{(1)}\dot{x} + \beta^{(1)}\dot{p}\right) + \Sigma_{r_1}^{(1)}C_{r_1}^{(1)} = 0 \tag{3.41}$$

$$[\ 0\ \ |\ I_{m-r_1}\ ]\,U^{(1)\,T}\left(\sigma^{(1)}\dot{x} + \beta^{(1)}\dot{p}\right) = 0. \tag{3.42}$$

De la primera de estas ecuaciones (3.41) obtenemos un "feedback" parcial para las componentes $C_{r_1}^{(1)}$ y podemos almacenarlo si nos interesa. La segunda ecuación (3.42) corresponde a una nueva ligadura y es la condición en las variables $x,\ p,\ u$, para que exista C solución de la ecuación (3.40):

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &:= [\ 0 \mid I_{m-r_1}\ ]\,U^{(1)\,T}\left[\sigma^{(1)}\dot{x} + \beta^{(1)}\dot{p}\right] \\ &= [\ 0 \mid I_{m-r_1}\ ]\,U^{(1)\,T}\left[\sigma^{(1)}(Ax+Bu) + \beta^{(1)}(-A^Tp + Px + Qu)\right] \\ &= [\ 0 \mid I_{m-r_1}\ ]\,U^{(1)\,T}\left[(\sigma^{(1)}A + \beta^{(1)}P)x + (-\beta^{(1)}A^T)p + (\sigma^{(1)}B + \beta^{(1)}Q)u\right] \\ &= \sigma^{(2)}x + \beta^{(2)}p + \rho^{(2)}u = 0, \end{aligned}$$

de aquí obtenemos:

$$\sigma^{(2)} = [\ 0 \mid I_{m-r_1}\ ]\, U^{(1)\,T} \left(\sigma^{(1)} A + \beta^{(1)} P\right) \tag{3.43}$$
$$\beta^{(2)} = [\ 0 \mid I_{m-r_1}\ ]\, U^{(1)\,T} \left(-\beta^{(1)} A^T\right) \tag{3.44}$$
$$\rho^{(2)} = [\ 0 \mid I_{m-r_1}\ ]\, U^{(1)\,T} \left(\sigma^{(1)} B + \beta^{(1)} Q\right). \tag{3.45}$$

Reiteramos el argumento para la ligadura $\phi^{(k)}$. Primero imponemos que el campo vectorial la deje invariante:

$$\Gamma_C(\phi^{(k)}) = \sigma^{(k)}\dot{x} + \beta^{(k)}\dot{p} + \rho^{(k)} C = 0, \tag{3.46}$$

luego calculamos la descomposición en valores singulares de la matriz $\rho^{(k)}$, obteniendo las matrices $U^{(k)}$ y $V^{(k)}$, y separamos la parte correspondiente al "feedback" parcial de (3.46) de la nueva ligadura $\phi^{(k+1)}$ que tendrá a su vez la forma:

$$\phi^{(k+1)} := \sigma^{(k+1)} x + \beta^{(k+1)} p + \rho^{(k+1)} u. \tag{3.47}$$

Las expresiones explícitas de $\sigma,\ \beta,\ \rho$ se obtienen, al igual que antes:

$$\sigma^{(k+1)} = [\ 0 \mid I_{m-r_k}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(\sigma^{(k)} A + \beta^{(k)} P\right) \tag{3.48}$$
$$\beta^{(k+1)} = [\ 0 \mid I_{m-r_k}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(-\beta^{(k)} A^T\right) \tag{3.49}$$
$$\rho^{(k+1)} = [\ 0 \mid I_{m-r_k}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(\sigma^{(k)} B + \beta^{(k)} Q\right) \tag{3.50}$$

El algoritmo se detendrá si la ligadura que obtenemos en el paso $k+1$ cumple que o bien $\rho^{(k+1)}$ tiene rango máximo y, por tanto, existe $C\ \forall\, (x,p,u) \in M_k$ o bien $\phi^{(k+1)}$ es combinación lineal de las anteriores y, por tanto, para todo punto $(x,p,u) \in M_k$, la ecuación (3.46) tiene solución en C. Esto último es equivalente a decir que la matriz $[\sigma^{(k+1)}\ \beta^{(k+1)}\ \rho^{(k+1)}]$ no aumenta el rango de la matriz f_k que acumula las k primeras matrices de ligaduras:

$$f_k = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & \beta^{(1)} & \rho^{(1)} \\ \sigma^{(2)} & \beta^{(2)} & \rho^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma^{(k)} & \beta^{(k)} & \rho^{(k)} \end{bmatrix}.$$

El cálculo del rango de la matriz f_k se hará utilizando la descomposición en valores singulares de ésta. Esto es, si A es una matriz cualquiera existen $U,\ V$ matrices unitarias y Σ una matriz diagonal tal que:

$$A = U * \Sigma * V^T,$$

donde

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

y $\text{rank}(A) = \text{rank}(\Sigma) = r$. Sin embargo, en la implementación numérica del algoritmo se debe utilizar la noción de rango numérico por motivos de estabilidad, véanse los trabajos [44] y [62] .

Definición 3.3.1 *Diremos que r es el ε-rango de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ si*

$$r = \text{ínf}\{\text{rank}(A+E)|\ E \in \mathbb{R}^{n\times m},\ ||E|| < \varepsilon\}. \tag{3.51}$$

También diremos que r es el rango numérico de A con tolerancia ε.

Otra forma equivalente de entender esta definición consiste en observar que al realizar la descomposición en valores singulares de A, obtenemos r valores singulares mayores que ε, es decir, que si $s_1, s_2, \ldots, s_r, s_{r+1}, \ldots$ son los valores singulares de A, entonces $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r > \varepsilon$ y $\varepsilon \geq s_{r+1} \geq s_{r+2} \geq \cdots$.

3.3.2. Implementación del algoritmo numérico

Describamos la implementación numérica del algoritmo de ligaduras para sistemas LQ. Primero mostramos un esquema del algoritmo y luego el pseudocódigo del algoritmo.

Esquema del algoritmo de ligaduras para el cómputo de la variedad final de ligaduras para problemas de control óptimo singulares LQ.

input $A,\ B,\ P,\ Q,\ R,\ tol.$

Formar la matriz de las ligaduras $f = [\sigma_1 \ \ \beta_1 \ \ \rho_1]$.

while $\text{rank}(\rho, tol)$ *sea deficiente* & $\text{rank}(f,\ tol)$ *se incremente*

$(U, \rho, V) = \text{svd}(\rho)$ % *descomposición en valores singulares de* $\rho^{(k)}$.

Calcular las matrices iteradas $\sigma^{(k+1)},\ \beta^{(k+1)},\ \rho^{(k+1)}$.

Formar las nueva matriz de ligaduras: $f = \left[\ f;\ \ \sigma^{(k+1)} \ \ \beta^{(k+1)} \ \ \rho^{(k+1)}\ \right]$.

Eliminar las filas dependientes de f.

end while

output $f,\ k.$

Pseudocódigo del algoritmo de ligaduras:
"variedad_final_de_ligaduras"
para problemas de control óptimo singular lineal cuadrático.

input $A,\ B,\ P,\ Q,\ R,\ tol.$

$\sigma \leftarrow -Q^T;\ \beta \leftarrow B^T;\ \rho \leftarrow -R;$ % *Iniciar las variables* $\sigma,\ \beta,\ \rho.$
$[l, m] \leftarrow$size$(\rho);$ % *Iniciar las dimensiones* $l \times m$ *de la matriz* ρ, l=*máximo valor.*
$f \leftarrow [\sigma, \beta, \rho];$ % *Iniciar la matriz de las ligaduras* $f.$
$f \leftarrow$ filas_independientes$(f,\ tol);$ % *Eliminar las filas dependientes.*
$p \leftarrow 0;$ % p=*anterior.*
$k \leftarrow 1;$

while rank$(\rho,\ tol) <$ l & rank$(f,\ tol) >$p

$p \leftarrow \text{rank}(f);$ % *Actualizar el rango de la matriz* $f.$
$k \leftarrow k + 1;$
$r \leftarrow \text{rank}(\rho,\ tol);$ % *Actualizar el rango de la matriz* $\rho^{(k)}.$
$[l, m] \leftarrow$size$(\rho);$ % *Actualizar las dimensiones* $l \times m$ *de la matriz* $\rho^{(k)}.$
$[U, \rho, V] \leftarrow$svd$(\rho);$ % *Descomposición en valores singulares de* $\rho^{(k)}.$
$U \leftarrow U^T;$

% *Calcular las matrices iteradas* $\sigma^{(k+1)},\ \beta^{(k+1)},\ \rho^{(k+1)}$:
$\rho \leftarrow\ U(r+1:l,:) \cdot [\sigma\, B + \beta\, Q];$
$\sigma \leftarrow\ U(r+1:l,:) \cdot [\sigma\, A + \beta\, P];$
$\beta \leftarrow\ U(r+1:l,:) \cdot [-\beta\, A^T];$
$f \leftarrow \begin{bmatrix} f \\ \sigma\ \beta\ \rho \end{bmatrix};$ % *Añadir las nuevas ligaduras.*

$f \leftarrow$ filas_independientes$(f,\ tol);$ % *Eliminar las filas dependientes de* $f.$

end while

$k \leftarrow k - 1;$

output $(f,\ k).$

Pseudocódigo de la función *"filas_independientes"*
llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras".*

Procedure filas_independientes($f,\ tol$)

$[lf, cf] \leftarrow \text{size}(f)$ % *Iniciar las dimensiones* $lf \times cf$ *de la matriz* f.

if $lf \geq 1$ & $\text{rank}(f, tol) > 0$ **then**
  $F \leftarrow f(1,:)$;
  for $i = 2:\ lf$
    if rank $(F, tol) <$ rank $\left(\left[\begin{array}{c} F \\ f(i,:) \end{array}\right], tol\right)$ **then**

$$F \leftarrow \left[\begin{array}{c} F \\ f(i,:) \end{array}\right];$$ % *Si la fila* i *es independiente la añadimos.*

    end if

  end for
else if

  $F \leftarrow [\ ]$; % *Si la matriz tiene rango nulo o es vacía*
    % *nos devuelve una matriz vacía.*

end if

$f \leftarrow F$

output f.

Veamos ahora los códigos en el lenguaje de programación MatLab.

Código del algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras"*
en el lenguaje de MatLab
para problemas de control óptimo singular lineal cuadrático.

```
% La función variedad_final_de_ligaduras.m  calcula la matriz f de
% las ligaduras del problema de control óptimo singular definido por
% las matrices A, B, P, Q y R; tol es la tolerancia en la definición
% de rango numérico utilizado en el algoritmo. La variedad final de las
% ligaduras es el subespacio definido por f*[x|p|u]^T=0.
% La función devuelve el número de pasos, k, realizado por el algoritmo.
% La función variedad_final_de_ligaduras.m llama a  la función
% filas_independientes.m.

function [f,k]=variedad_final_de_ligaduras(A,B,P,Q,R,tol)

sigma=-Q.';beta=B.';rho=-R;
[l,m]=size(rho);
f=[sigma,beta,rho];
f=filas_independientes(f,tol);
p=0;
k=1;

while rank(rho,tol)<l & rank(f,tol)>p

       p=rank(f);
       k=k+1;
       r=rank(rho,tol);
       [l,m]=size(rho);
       [U,rho,V]=svd(rho);
       U=U.';
       rho=  U(r+1:l,:)*(sigma*B+beta*Q);
       sigma=U(r+1:l,:)*(sigma*A+beta*P);
       beta= U(r+1:l,:)*(-beta*A.');
       f=[f;sigma,beta,rho];
       f=filas_independientes(f,tol);

end

k=k-1;
```

Código en el lenguaje MatLab de la función *"filas_independientes"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras"*.

```
% La función filas_independientes.m elimina
% las filas dependientes de la matriz f;
% tol es la tolerancia en la definición del rango numérico.

function F=filas_independientes(f,tol)

[lf,cf]=size(f);

if lf >= 1 & rank(f,tol) > 0
       F=f(1,:);
       for i=2:lf
            if rank(F,tol) < rank([F;f(i,:)],tol)
                    F=[F;f(i,:)];
            end
       end
else
       F=[ ];
end
```

3.3.3. Algoritmo de ligaduras lineal para calcular las ligaduras de primera y segunda clase

El algoritmo descrito anteriormente para obtener la variedad final de las ligaduras de un problema de control óptimo lineal cuadrático, lo vamos a extender ahora para generar otro algoritmo que, además, calcule las ligaduras de primera y segunda clase que debemos utilizar en el campo vectorial. Para obtener las ligaduras de primera clase demostramos que estas se pueden calcular a partir del núcleo de la matriz de corchetes de Poisson. Primero añadimos las coordenadas coisótropas, v_a, en forma de vectores columna, por lo que las coordenadas totales de este problema extendido serán $(x, p\,; u, v)$ del espacio vectorial simpléctico $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2m}$. Al añadir estas coordenadas debemos incluir m ligaduras nuevas que son las que anulan estas coordenadas coisótropas; escritas de forma matricial como en la sección anterior éstas son:

$$f = \left[\ 0_{m\times n} \,\middle|\, 0_{m\times n} \,\middle|\, 0_{m\times m} \,\middle|\, -I_m\ \right].$$

La extensión de las ligaduras para el algoritmo la vamos a realizar de la forma más sencilla posible para no incrementar las operaciones numéricas. Lo que haremos será añadir estas nuevas ligaduras mencionadas anteriormente y el resto de ligaduras las construiremos igual que las ligaduras que teníamos en el algoritmo anterior añadiendo ceros en la parte coisótropa. Previamente a la entrada en el bucle separaremos las ligaduras de segunda clase de las de primera del conjunto de ligaduras obtenidas

$$f = \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} & -I_m \\ \\ \sigma^{(1)} & \beta^{(1)} & \rho^{(1)} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}.$$

Para ello debemos calcular la matriz de los corchetes de Poisson, que denotamos por COR, y su núcleo nos va a dar la clave para hacer esta separación. Veamos cómo realizar esta separación de ligaduras con la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1 *Sean $\{\phi^{(i)}\},\ i = 1, \ldots, p$, un conjunto de funciones independientes que definen una subvariedad $N \subset M$ de una variedad simpléctica M y sean estas ligaduras expresiones lineales en coordenadas canónicas locales de M. Denotamos por $(COR)_{ij} = \{\phi^{(i)}, \phi^{(j)}\},\ i, j = 1, \ldots, p$, la matriz formada por los corchetes de Poisson de las ligaduras entre sí. Sean $v_j^{(a)}$ las coordenadas de una base del núcleo de la matriz COR, $a = 1, \ldots, d$, donde $r = p - d$ es el rango de esta matriz. Sean $w^{(\alpha)},\ \alpha = 1, \ldots, r$ las coordenadas de los vectores que amplían una base del núcleo. Entonces, las expresiones:*

$$\psi_I^{(a)} = \phi^{(j)} v_j^{(a)},\ a = 1, \ldots, d, \tag{3.52}$$

y

$$\psi_{II}^{(\alpha)} = \phi^{(j)} w_j^{(\alpha)},\ \alpha = 1, \ldots, r, \tag{3.53}$$

forman sendas bases del conjunto de ligaduras de primera y segunda clase respectivamente.

Demostración. Estas nuevas ligaduras así definidas son una combinación lineal de las ligaduras de partida. Si calculamos los corchetes de Poisson obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\{\psi_I^{(a)}, \psi_I^{(b)}\} &= \{\phi^{(j)}\, v_j^{(a)}, \phi^{(k)}\, v_k^{(b)}\} \\ &= v_j^{(a)} \left(\{\phi^{(j)}, \phi^{(k)}\} v_k^{(b)}\right) = v_j^{(a)} \times 0 = 0 \\ \{\psi_{II}^{(\alpha)}, \psi_I^{(a)}\} &= \{\phi^{(k)}\, w_k^{(\alpha)}, \phi^{(j)}\, v_j^{(a)}\} = w_k^{(\alpha)} \left(\{\phi^{(k)}, \phi^{(j)}\} v_j^{(a)}\right) = 0,\end{aligned}$$

de estas dos expresiones se concluye que las ligaduras $\psi_I^{(a)}$ son de primera clase, puesto que los corchetes de éstas con todas las ligaduras son nulos. Por último, los corchetes de las ligaduras definidas en (3.53) consigo mismas quedan:

$$\{\psi_{II}^{(\alpha)}, \psi_{II}^{(\beta)}\} = \{\phi^{(j)}\, w_j^{(\alpha)}, \phi^{(k)}\, w_k^{(\beta)}\} = w_j^{(\alpha)} \{\phi^{(j)}, \phi^{(k)}\} w_k^{(\beta)},$$

como la matriz COR es invertible cuando la restringimos al subespacio $W = L[w^1, \ldots, w^r]$ por construcción, la matriz $\{\psi_{II}^{(\alpha)}, \psi_{II}^{(\beta)}\}$ ha de ser invertible. □

Con ayuda de esta proposición iremos separando las ligaduras de primera clase de las de segunda clase en cada paso del algoritmo.

Si denotamos las ligaduras obtenidas en el paso k de la siguiente forma:

$F_1(k)$:	conjunto de ligaduras de primera clase obtenidas hasta el paso k
$F_2(k)$:	conjunto de ligaduras de segunda clase obtenidas hasta el paso k
$COR(k)$:	matriz de los corchetes de $\{F_1(k), F_1(k)\}$
f_1:	nuevo conjunto de ligaduras.

Con las nuevas ligaduras, f_1, y las de primera clase anteriores generamos una nueva matriz:

$$F = \begin{bmatrix} F_1(k) \\ f_1 \end{bmatrix}$$

y calculamos la matriz de corchetes de cada fila de F, obteniendo la matriz $COR(k+1)$. No es necesario calcular todos los corchetes, puesto que algunos ya los tenemos calculados en la matriz $COR(k)$.

$$COR(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} COR(k) & \{F_1(k), f_1\} \\ \hline \{f_1, F_1(k)\} & \{f_1, f_1\}. \end{array}\right]$$

Por tanto, calculamos la parte que falta sabiendo, además, que esta matriz es antisimétrica y no es necesario calcular todas las cajas.

Ahora calculamos una base del núcleo de esta matriz y lo almacenamos en una matriz donde cada columna es un vector de esta base: $v = \left[\begin{array}{c|c|c} v^{(1)} & \cdots & v^{(d)} \end{array}\right]$

y otra matriz cuyas columnas completan a una base del espacio al que pertenecen estos vectores, $w = \left[\ w^{(1)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, w^{(r)}\ \right]$. A partir de estas matrices, separamos las ligaduras de primera y segunda clase. Las ligaduras de primera clase actualizadas, utilizando la fórmula (3.52), son

$$F_1(k+1) = v^T * F. \tag{3.54}$$

Las ligaduras de segunda clase obtenidas en esta paso, gracias a la fórmula (3.53), las podemos escribir como

$$\widetilde{F_2} = w^T * F, \tag{3.55}$$

que debemos almacenar con las que teníamos de pasos anteriores para formar el conjunto de ligaduras de segunda clase hasta este paso, es decir,

$$F_2(k+1) = \begin{bmatrix} F_2(k) \\ \\ \widetilde{F_2} \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Finalmente, calculamos el corchete de las ligaduras de primera clase actualizadas para ser utilizado en el siguiente paso

$$COR(k+1) = \{F1(k+1), F1(k+1)\}.$$

Cálculo de las las matrices v y w

Para calcular el núcleo de una matriz $A \in \mathbb{R}^p$, de rango r, cuya dimensión es, por tanto, $d = p - r$, utilizamos de nuevo la descomposición en valores singulares. Si la SVD de la matriz A está dada por:

$$A = U\,\Sigma\,V^T = U \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] V^T,$$

siendo $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r > 0$ los valores singulares de A y U, V son matrices ortogonales, podemos calcular el núcleo como:

$$0 = Ax = U\Sigma V^T x = U\Sigma y,$$

donde $y = V^T x$, por tanto, nos queda

$$0 = \Sigma\,V^T x = U\Sigma y = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} s_1 y_1 \\ \vdots \\ \hline s_r y_r \\ 0 \end{array}\right],$$

entonces el núcleo de Σ va a estar está generado por los vectores $\{y \in \mathbb{R}^p |\ y_1 = \cdots = y_r = 0\}$ y podemos escribirlo como las columnas de la matriz $\left[\frac{0_{r\times d}}{I_d}\right]$. A partir del núcleo de Σ, obtenemos el de A simplemente multiplicandolo por V:

$$v = V \times \left[\frac{0_{r\times d}}{I_d}\right]. \tag{3.57}$$

Claramente, la matriz v está formada por las d últimas columnas de la matriz V, por lo tanto, para formar la matriz w podemos coger las r primeras columnas de V, por ser ésta invertible, de tal forma que $\left[\ w \,\middle|\, v\ \right] = V$ y sus columnas formen una base de $\mathbb{R}^p$:

$$w = V \times \left[\frac{I_r}{0_{d\times r}}\right]. \tag{3.58}$$

De nuevo, por razones de estabilidad numérica, a la hora de calcular los vectores v y w utilizaremos la noción de rango numérico definida en (3.3.1), es decir, que el rango r de las definiciones previas será calculado con una tolerancia y eso afectará al cálculo de las matrices v y w.

3.3.4. Implementación numérica del algoritmo

En este apartado vamos a desarrollar el algoritmo numérico utilizando todas las técnicas previas como la separación de ligaduras de primera y segunda clase, cálculo de rangos, etc. Primero explicamos en un esquema los pasos básicos que hay que llevar a cabo, después expondremos el pseudocódigo de este algoritmo para ayudar a su implementación en cualquier lenguaje de programación y, por último, mostramos el código en el lenguaje MatLab.

Esquema del algoritmo de ligaduras con separación de las ligaduras de primera clase para problemas de control óptimo singular lineal cuadrático.

input $A,\ B,\ P,\ Q,\ R,\ tol.$

Iniciar las variables $\sigma,\ \beta,\ \rho.$
Iniciar la matriz de las ligaduras f *añadiendo las variables coisótropas y las ligaduras asociadas:*

$$f = \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} & -I_m \\ \sigma^{(1)} & \beta^{(1)} & \rho^{(1)} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}.$$

Eliminar las filas dependientes.

Construir la matriz COR *de los corchetes de Poisson de las ligaduras.*

$$COR = \left(\ \{f, f\} \ \right).$$

Construir la matriz v *cuyas columnas generan el núcleo de* COR
y la matriz w *cuyas columnas junto a las de* v *forman una base del espacio.*
Separar las ligaduras de primera clase, F_1*, de las de segunda clase,* F_2*:*

$$F_1 = v^T * f; \quad F_2 = w^T * f.$$

Construir la matriz COR *de los corchetes de Poisson de las ligaduras de primera clase:*

$$COR = \left(\ \{F_1, F_1\} \ \right).$$

Almacenar todas las ligaduras: $f = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$.

$\ldots/\ldots$

$\cdots/\cdots$

while rank$(\rho, tol)<$ *máximo valor* & rank$(f,\ tol)>$ *anterior*

Descomposición en valores singulares de $\rho^{(k)}$: $(U^{(k)}, \rho^{(k)}, V^{(k)}) = \mathrm{svd}(\rho^{(k)})$.
Calcular las matrices iteradas $\sigma^{(k+1)},\ \beta^{(k+1)},\ \rho^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned}
\sigma^{(k+1)} &= [\ 0 \mid I_{m-r_k}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(\sigma^{(k)} A + \beta^{(k)} P\right) \\
\beta^{(k+1)} &= [\ 0 \mid I_{m-r_k}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(-\beta^{(k)} A^T\right) \\
\rho^{(k+1)} &= [\ 0 \mid I_{m-r_k}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(\sigma^{(k)} B + \beta^{(k)} Q\right).
\end{aligned}$$

Iniciar las nuevas ligaduras: $f_1 = \left[\ \sigma^{(k+1)} \quad \beta^{(k+1)} \quad \rho^{(k+1)} \quad 0_{m\times m}\ \right]$.
Eliminar las filas dependientes de f_1.

Construir la matriz COR *de los corchetes de Poisson del conjunto de ligaduras de primera clase anteriores,* F_1*, y de las nuevas ligaduras* f_1*:*

$$COR(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} COR(k) & \{F_1(k), f_1\} \\ \hline \{f_1, F_1(k)\} & \{f_1, f_1\} \end{array}\right].$$

Construir la matriz v *cuyas columnas generan el núcleo de* COR
y la matriz w*, tal que las columnas de* $[v, w]$ *forman una base del espacio.*

Separar las ligaduras de primera clase, F_1*, de las de segunda clase,* FF_2*, de la matriz* $F = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ f_1 \end{array}\right]$*:*

$$F_1 = v^T * F; \quad FF_2 = w^T * F.$$

Eliminar las filas dependientes de las ligaduras de primera clase F_1.
Construir la matriz COR *de los corchetes de Poisson de las ligaduras de primera clase* F_1*:* $COR = \left(\ \{F_1, F_1\}\ \right)$.
Añadir las ligaduras de segunda clase a las previas: $F_2 = \left[\begin{array}{c} F_2 \\ FF_2 \end{array}\right]$
y eliminar filas dependientes.
Almacenar todas las ligaduras: $f = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array}\right]$.

end while

Construir la matriz COR *de los corchetes de Poisson de todas las ligaduras obtenidas:* $COR = \left(\ \{f, f\}\ \right)$.

output $f,\ k,\ F_1,\ F_2,\ COR$.

Ahora mostramos el pseudocódigo.

Pseudocódigo del algoritmo de ligaduras con separación de las ligaduras de primera clase para problemas de control óptimo singular lineal cuadrático: *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase".*

input $A,\ B,\ P,\ Q,\ R,\ tol.$

$\sigma \leftarrow -Q^T;\ \beta \leftarrow B^T;\ \rho \leftarrow -R;$ % *Iniciar las variables* $\sigma,\ \beta,\ \rho.$
$[l, m] \leftarrow$size$(\rho);$ % *Iniciar las dimensiones* $l \times m$ *de la matriz* ρ, l=*máximo valor.*
$[n, n] \leftarrow$size$(A);$ % *Iniciar dimensiones* $n \times n$ *de la matriz* $A.$

$$f \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & 0_{m\times m} & -I_m \\ \\ \sigma & \beta & \rho & 0_{m\times m} \end{bmatrix};$$ % *Iniciar la matriz de ligaduras* f
% *añadiendo las variables coisótropas y las ligaduras asociadas.*
$f \leftarrow$ filas_independientes$(f,\ tol);$ % *Eliminar las filas dependientes.*

$COR \leftarrow$corchete$(f, f, n, m);$
% *Construir la matriz* COR *de los corchetes de Poisson de las ligaduras.*
$COR \leftarrow (COR - COR^T)/2;$ % *Aseguramos que es antisimétrica.*
$[v, w] \leftarrow$ kernumerico$(COR, tol);$ % *Construir la matriz* v *cuyas columnas*
% *generan el núcleo de* COR *y la matriz* w *cuyas columnas junto a las de* v
% *forman una base del espacio.*

$F_1 \leftarrow v^T * f;\ \ F_2 \leftarrow w^T * f;$ % *Separar las ligaduras de primera clase,* F_1,
% *de las de segunda clase,* F_2.
$COR \leftarrow$ corchete$(F_1, F_1, n, m);\ COR \leftarrow (COR - COR^T)/2;$
% *Construir la matriz de los corchetes de Poisson de las ligaduras*
% *de primera clase* F_1.
$$f \leftarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix};$$

$p \leftarrow 0$ % p=anterior.
$k \leftarrow 1;$

.../...

$\cdots/\cdots$

while rank$(\rho,\ tol)<l$ & rank$(f,\ tol)>p$

$p \leftarrow$ rank(f); % *Actualizar el rango de la matriz* f.
$k \leftarrow k+1$;
$r \leftarrow$ rank$(\rho,\ tol)$; % *Actualizar el rango de la matriz* $\rho^{(k)}$.
$[l,m] \leftarrow$size(ρ); % *Actualizar las dimensiones* $l \times m$ *de la matriz* $\rho^{(k)}$.
$[U,\rho,V] \leftarrow$svd(ρ); % *Descomposición en valores singulares de* $\rho^{(k)}$.
$U \leftarrow U^T$;
% *Calcular las matrices iteradas* $\sigma^{(k+1)},\ \beta^{(k+1)},\ \rho^{(k+1)}$:
$\rho \leftarrow\ U(r+1:l,:)\cdot[\sigma\, B+\beta\, Q]$;
$\sigma \leftarrow\ U(r+1:l,:)\cdot[\sigma\, A+\beta\, P]$;
$\beta \leftarrow\ U(r+1:l,:)\cdot[-\beta\, A^T]$;
$f_1 \leftarrow \left[\begin{array}{cccc} \sigma & \beta & \rho & 0_{m\times m} \end{array}\right]$; % *Iniciar las nuevas ligaduras.*
$f_1 \leftarrow$ filas_independientes(f_1,tol); %*Eliminar las filas dependientes de* f_1.

$$COR \leftarrow \left[\begin{array}{c|c} COR & corchete(F_1,f_1,n,m) \\ \hline corchete(f_1,F_1,n,m) & corchete(f_1,f_1,n,m) \end{array}\right];$$

% *Construir la matriz* COR *de los corchetes de Poisson del conjunto de*
% *ligaduras de primera clase anteriores,* F_1*, y de las nuevas ligaduras* f_1.
$[v,w] \leftarrow$ kernumerico(COR,tol);
% *Construir la matriz* v *cuyas columnas generan el núcleo de* COR*, y*
% *la matriz* w*, tal que las columnas de* $[v,w]$ *forman una base del espacio.*
$F=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ f_1 \end{array}\right]$; $F_1 \leftarrow v^T * F$; $FF_2 \leftarrow w^T * F$; % *Separar las ligaduras*
% *de primera clase,* F_1*, de las de segunda clase,* FF_2*, de la matriz* F.
$F_1 \leftarrow$ filas_independientes(F_1,tol); % *Eliminar las filas dependientes de* F_1.
$COR \leftarrow$ corchete(F_1,F_1,n,m); $COR \leftarrow (COR-COR^T)/2$;
% *Construir la matriz* COR *de los corchetes de Poisson*
% *de las ligaduras de primera clase* $F1$.
$F_2 \leftarrow \left[\begin{array}{c} F_2 \\ FF_2 \end{array}\right]$; % *Añadir las ligaduras de segunda clase a las previas.*
$F_2 \leftarrow$ filas_independientes(F_2,tol); % *Eliminar las filas dependientes de* F_2.
$f \leftarrow \left[\begin{array}{c} F1 \\ F2 \end{array}\right]$; % *Almacenar las ligaduras en la matriz* f.

end while

$COR \leftarrow$ corchete(f,f,n,m), $COR \leftarrow (COR-COR^T)/2$;
% *Construir la matriz* COR *de los corchetes de todas las ligaduras.*

$k \leftarrow k-1$;

output $f,\ k,\ F_1,\ F_2,\ COR$.

Veamos ahora los pseudocódigos de todas las funciones implicadas en el algoritmo anterior: "filas_independientes," "kernumerico," "corchete" y "bracket".

Pseudocódigo de la función *"filas_independientes"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase".*

Procedure filas_independientes($f,\ tol$)

$[lf, cf] \leftarrow$ size(f) % *Iniciar las dimensiones* $lf \times cf$ *de la matriz* f.
if $lf \geq 1$ & rank$(f, tol) > 0$ **then**
  $F \leftarrow f(1,:)$;
  for $i = 2:\ lf$
    if rank $(F, tol) <$ rank $\left(\begin{bmatrix} F \\ f(i,:) \end{bmatrix}, tol\right)$ **then**
      $F \leftarrow \begin{bmatrix} F \\ f(i,:) \end{bmatrix}$; % *Si la fila* i *es independiente la añadimos.*
    end if
  end for
else if
  $F \leftarrow [\ ]$ % *Si la matriz tiene rango nulo o es vacía*
  % *nos devuelve una matriz vacía.*
end if
$f \leftarrow F$
output f.

Pseudocódigo de la función *"kernumerico"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase".*

procedure kernumerico(A,tol)

$[m, n] \leftarrow$ size(A); % *Dimensiones* $m \times n$ *de la matriz* A.
$r \leftarrow$ rank(A, tol); % *Rango numérico de la matriz* A.
$[U, S, V] \leftarrow$svd(A); % *Descomposición en valores singulares de la matriz* A.
$v \leftarrow V(:, r+1:n)$; % *Matriz cuyas columnas generan el núcleo*
% *con tolerancia tol de* A.
$w \leftarrow V(:, 1:r)$; % *Matriz cuyas columnas son independientes a las de* v,
% *de forma que* $[v, w]$ *generan* $\mathbb{R}^n$.
output $v,\ w$.

La siguiente función, "corchete", genera una matriz $A = (a_{ij})$. Donde cada

elemento de matriz a_{ij} es el corchete de Poisson de la fila i de la matriz F con la fila j de la matriz G. Esta función llama a otra, "bracket", que calcula el corchete de Poisson entre dos vectores. Las dimensiones n y m de las variables de estado (x) y de control (u), son necesarias para calcular el corchete de Poisson. Veamos los pseudocódigos de ambas funciones.

Pseudocódigo de la función *"corchete"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase".*

procedure corchete($F,\ G,\ n,\ m$)

$[lf, cf] \leftarrow$ size(F); % *Dimensiones* $lf \times cf$ *de la matriz* F.
$[lg, cg] \leftarrow$ size(G); % *Dimensiones* $lg \times dg$ *de la matriz* G.
$A \leftarrow\ 0_{lf \times lg}$;
for $i = 1:\ lf$
  for $j = 1:\ lg$
    $A(i,j) \leftarrow$ bracket($F(i,:),\ G(j,:),\ n,\ m$);
  end for
end for

output A

Pseudocódigo de la función *"bracket"* llamada por la función *"corchete".*

procedure bracket ($f,\ g,\ n,\ m$)

$A \leftarrow 0$; % *Inicializar el valor del corchete de Poisson.*
for $i = 1:\ n$
  $A = A + f(i) * g(i+n) - f(i+n) * g(i)$;
end for
% *Aportación al corchete de Poisson de las variables de estado y coestados* (x, p).
for $j = 1:\ m$
  $A = A + f(j + 2*n) * g(j + 2*n + m) - f(j + 2*n + m) * g(j + 2*n)$;
end for
% *Aportación al corchete de las variables de control y las variables coisótropas* (u, v).

output A

Veamos ahora los códigos en el lenguaje de programación de MatLab.

Código del algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase"* en el lenguaje MatLab.

```
% La función vflig_y_ligaduras_primera_clase.m calcula la matriz f de
% las ligaduras del problema de control óptimo singular definido por
% las matrices A, B, P, Q, R;
% tol es la tolerancia en la definición del rango numérico usado
% en el algoritmo.
% La variedad final de las ligaduras es el subespacio definido por
% f*[x|p|u]^T=0.
% La función devuelve el número de pasos k realizado por el algoritmo.
% También separa la matriz de ligaduras en dos matrices F1 y F2
% conteniendo las ligaduras de primera y segunda clase respectivamente.
% La función llama a las siguientes funciones:
% filas_independientes.m, corchete.m y kernumerico.m.
```

.../...

```
.../...


function [f,k,F1,F2,COR]=vflig_y_ligad_primera_clase(A,B,P,Q,R,tol)

sigma=-Q.';beta=B.'; rho=-R;
[l,m]=size(rho); [n,n]=size(A);
f=[sigma,beta,rho,zeros(size(rho))];
f=filas_independientes(f);
f=[zeros(size(sigma)),zeros(size(beta)),
zeros(size(rho)),eye(size(rho));f];
COR=corchete(f,f,n,m); COR=(COR-COR.')/2;
[v,w]=kernumerico(COR,tol);
F1=v.'*f; F2=w.'*f; f=[F1;F2];
COR=corchete(F1,F1,n,m); COR=(COR-COR.')/2;
p=0;k=1;

while  rank(rho,tol)<l & rank(f,tol)>p
       p=rank(f,tol); k=k+1;
       r=rank(rho,tol); [l,m]=size(rho);
       [U,rho,V]=svd(rho); U=U.';
       rho=  U(r+1:l,:)*(sigma*B+beta*Q);
       sigma=U(r+1:l,:)*(sigma*A+beta*P);
       beta= U(r+1:l,:)*(-beta*A.');
       f1=[sigma,beta,rho,zeros(size(rho))];
       f1=filas_independientes(f1,tol);
       COR1=corchete(F1,f1,n,m);
       COR2=corchete(f1,f1,n,m); COR2=(COR2-COR2.')/2;
       COR=[COR,COR1;-COR1.',COR2];
       [v,w]=kernumerico(COR,tol);
       F=[F1;f1];
       F1=v.'*F; FF2=w.'*F;
       F1=filas_independientes(F1,tol)
       COR=corchete(F1,F1,n,m); COR=(COR-COR.')/2;
       F2=[F2;FF2]; F2=filas_independientes(F2,tol)
       f=[F1;F2];
end

COR=corchete(f,f,n,m); COR=(COR-COR.')/2;

k=k-1;
```

Código en el lenguaje MatLab de la función *"filas_independientes"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase"*.

```
% La función filas_independientes.m elimina
% las filas dependientes de la matriz f;
% tol es la tolerancia en la definición del rango numérico.

function F=filas_independientes(f,tol)

[lf,cf]=size(f);

if lf >=1 & rank(f,tol) > 0
      F=f(1,:);
      for i=2:lf
          if rank(F,tol)<rank([F;f(i,:)],tol)
              F=[F;f(i,:)];
          end
      end
else
      F=[ ];
end
```

Código en lenguaje MatLab de la función *"kernumerico"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase"*.

```
% La función kernumerico.m obtiene la matriz v, cuyas columnas forman una
% base del núcleo de la matriz A calculado con una tolerancia tol en la
% definición de rango numérico. La otra matriz, w, que devuelve esta
% función forma junto a v una base del espacio vectorial en el que
% están contenidas las columnas de estos vectores.

function [v,w]=kernumerico(A,tol)
[m,n]=size(A);
r=rank(A,tol);
[U,S,V]=svd(A);
v= V(:,r+1:n);
w= V(:,1:r);
```

Código en lenguaje MatLab de la función *"corchete"* llamada por el algoritmo *"variedad_final_de_ligaduras_y_ligaduras_primera clase"*.

```
% La función corchete.m calcula la matriz A formada por los corchetes de
% Poisson de las filas de las matrices F y G.
% Esta función llama a la función bracket.m que calcula los corchetes de
% Poisson entre dos vectores fila.
% La dimensión del espacio de estados es n y la de los controles m.

function A=corchete(F,G,n,m)

[lf,cf]=size(F);
[lg,cg]=size(G);
A=zeros(lf,lg);

for i=1:lf;
    for j=1:lg;
        A(i,j)=bracket(F(i,:),G(j,:),n,m);
    end
end
```

Código en lenguaje MatLab de la función *"bracket"* llamada por la función *"corchete"*.

```
% La función bracket.m calcula  el corchete de Poisson entre dos
% vectores fila f y G.
% La dimensión del espacio de estados es n y la de los controles m.

function A=bracket(f,g,n,m)

A=0;

for i=1:n;
    A=A+f(i)*g(i+n)-f(i+n)*g(i);
end

for j=1:m;
    A=A+f(j+2*n)*g(j+2*n+m)-f(j+2*n+m)*g(j+2*n);
end
```

3.3.5. Algunos ejemplos sencillos. Cálculo exacto de las ligaduras

Una vez expuesto el algoritmo numérico el siguiente paso es verificarlo en un conjunto lo suficientemente amplio de problemas. Aquí mostraremos algunos de ellos. Primero, lo que haremos será utilizar los problemas sencillos que resolvimos anteriormente y, después, haremos un desarrollo de las ecuaciones recursivas del problema lineal-cuadrático para ver la expresión exacta de las ligaduras, con el propósito de diseñar algunos problemas complejos con un número significativo de pasos para poder estudiar la estabilidad numérica del algoritmo.

Primer ejemplo: La subvariedad final de las ligaduras es simpléctica

Las ecuaciones de partida del problema eran

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 + u_1 \\ \dot{x_2} &= x_2 + u_2 \\ L &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + \frac{1}{2}u_1^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, los datos del problema para el algoritmo numérico son

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ B = P = Q = A;\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El espacio extendido es $\widetilde{M} = \{(x_1, x_2, p_1, p_2, u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^8\}$ y el conjunto de ligaduras obtenidas:

$$\begin{aligned} {\phi^{(0)}}_1 &= -v_1 \\ {\phi^{(0)}}_2 &= -v_2 \\ {\phi^{(1)}}_1 &= p_1 - x_1 - u_1 \\ {\phi^{(1)}}_2 &= p_2 - x_2 \\ {\phi^{(2)}}_2 &= -x_2 \\ {\phi^{(3)}}_2 &= u_2 \end{aligned}$$

$M_\infty = \{(x, p, u, v) \in \mathbb{R}^8 |\ u_1 = p_1 - x_1, x_2 = p_2 = u_2 = v_2 = v_1 = 0\}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^8$ de dimensión 2, descrita por las coordenadas x_1 y p_1. Al resolver este problema vimos que todas las ligaduras eran de segunda clase, por lo que la subvariedad final de las ligaduras es simpléctica. Escribiendo esta

subvariedad en forma matricial, nos queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el algoritmo y los resultados son los siguientes, la matriz de ligaduras, cuyo núcleo es la subvariedad final de las ligaduras anterior, queda

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las matrices de ligaduras de primera y segunda clase son, $F1$ una matriz vacía y $F2 = f$ respectivamente. El número de pasos que realiza el algoritmo es $k = 2$ y, por último, la matriz de los corchetes de Poisson de las ligaduras es la siguiente

$$COR = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es invertible, lo que implica que todas las ligaduras son de segunda clase. Ahora, para calcular la solución correspondiente al problema de conducir la variable de estado $x(t)$ de x_0 a x_T en el tiempo T, tenemos que hallar las condiciones iniciales de $x(t)$, $p(t)$ y $u(t)$. Hemos visto que este problema era controlable en la variable $x_1(t)$ y no en la segunda, ya que teníamos que $x_2(t) = 0$. Para seleccionar los valores posibles de condiciones iniciales lo hacemos con la matriz f de ligaduras, su núcleo nos da los vectores que pertenecen a la subvariedad final de las ligaduras. Entonces, lo que tenemos que hacer es seleccionar esas condiciones iniciales. En este ejemplo, como el núcleo de la matriz de ligaduras tiene dimensión 2, los vectores de la subvariedad final de las ligaduras serán de la forma: $(x_1, x_2, p_1, p_2, u_1, u_2, v_1, v_2) = \alpha(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) + \beta(-1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)$, entre los cuales hay que seleccionar los valores de α y β de las condiciones iniciales, que, en este ejemplo que sabemos resolver exactamente y es muy sencillo, se obtiene $\alpha = (x_{1,0} - x_{1,T})/T$ y $\beta = \alpha - x_{1,0}$. Veamos el otro ejemplo, para mostrar simplemente que los resultados coinciden.

Segundo ejemplo: Ligaduras de primera clase

El segundo ejemplo tenía los siguientes datos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; P = Q = A;\ B = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al aplicar el algoritmo la matriz de ligaduras, que lleva almacenada en sus dos primeras filas las ligaduras de primera clase y en las últimas las de segunda clase, resulta ser:

$$f = \begin{bmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$COR = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Vemos que la parte correspondiente a los corchetes de las ligaduras de primera clase con todas las demás es completamente nula, como demostramos en la Proposición 3.3.1, y el número de pasos que realiza el algoritmo es $k = 1$.

Estos dos ejemplos, que son los mismos que hemos desarrollado con anterioridad, los resuelve el algoritmo perfectamente, con la tolerancia tan pequeña como queramos a la hora de calcular los rangos. Pero en problemas más complejos, con matrices de mayor tamaño y con problemas que tenían que realizar un cierto número de pasos, nos encontramos que, en algunas situaciones, el algoritmo paraba antes de lo debido, porque donde tenía que aparecer un cero teóricamente, aparecían números muy pequeños, que paraban el algoritmo. Esto lo solucionamos añadiendo el cálculo de los rangos de forma numérica que vimos en la definición (3.3.1). El siguiente paso, entonces, es aplicar el algoritmo a problemas más complejos. Para diseñar estos problemas lo que hemos hecho es hallar primero la solución explícita del problema, que mostramos a continuación.

Cálculo de la expresión exacta de las ligaduras en cada etapa

El objetivo de este apartado es obtener la solución explícita de las ligaduras k–ésimas del problema de control óptimo lineal-cuadrático. Para ello debemos desarrollar las expresiones recursivas de las ligaduras, que obtuvimos en las ecuaciones (3.48)-(3.50):

Problema de partida que queremos resolver:

$$\begin{aligned}
\sigma^{(k+1)} &= [\ 0 \mid I_{m-rk}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(\sigma^{(k)} A + \beta^{(k)} P\right) && (3.59)\\
\beta^{(k+1)} &= [\ 0 \mid I_{m-rk}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(-\beta^{(k)} A^T\right) && (3.60)\\
\rho^{(k+1)} &= [\ 0 \mid I_{m-rk}\ ]\, U^{(k)\,T} \left(\sigma^{(k)} B + \beta^{(k)} Q\right). && (3.61)
\end{aligned}$$

Primero vamos a resolver un problema simplificado, que mostramos a continuación, y luego daremos la expresión de las soluciones del problema en función de estos resultados. Lo que haremos será expresar los valores de $\sigma^{(k+1)}$, $\beta^{(k+1)}$ y de $\rho^{(k+1)}$ en función de los valores de $\widetilde{\sigma}^{(k+1)}$, $\widetilde{\beta}^{(k+1)}$ y de $\widetilde{\rho}^{(k+1)}$ cuyas ecuaciones recursivas son muy similares a las anteriores, pero más sencillas:

Problema modificado más sencillo:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}^{(k+1)} &= \widetilde{\sigma}^{(k)} A + \widetilde{\beta}^{(k)} P && (3.62)\\
\widetilde{\beta}^{(k+1)} &= -\widetilde{\beta}^{(k)} A^T && (3.63)\\
\widetilde{\rho}^{(k+1)} &= \widetilde{\sigma}^{(k)} B + \widetilde{\beta}^{(k)} Q. && (3.64)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones anteriores son más sencillas de resolver. Antes de proceder al cálculo de estas soluciones, veamos la relación entre las soluciones de ambos problemas. Para abreviar notación denotamos como $U^k := [\ 0 \mid I_{m-rk}\ ]\, U^{(k)\,T}$. Desarrollando cada paso, obtenemos las siguientes expresiones para las matrices β que son las primeras que hay que resolver, ya que intervienen en el resto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\beta^{(1)} &= \widetilde{\beta}^{(1)}\\
\beta^{(2)} &= U^1 \left(-\beta^{(1)} A^T\right) = U^1 \widetilde{\beta}^{(2)}\\
\beta^{(3)} &= U^2 \left(-\beta^{(2)} A^T\right) = U^2 U^1 \left(-\widetilde{\beta}^{(2)} A^T\right) = U^2 U^1 \widetilde{\beta}^{(3)}\\
&\vdots\\
\beta^{(k)} &= U^k \left(-\beta^{(k-1)} A^T\right) = U^{k-1} \cdots U^2 U^1 \left(-\widetilde{\beta}^{(k-1)} A^T\right) = U^{k-1} \cdots U^2 U^1 \widetilde{\beta}^{(k)}\\
\beta^{(k+1)} &= U^k \left(-\beta^{(k)} A^T\right) = U^k \cdots U^2 U^1 \left(-\widetilde{\beta}^{(k)} A^T\right) = U^k \cdots U^2 U^1 \widetilde{\beta}^{(k+1)},
\end{aligned}$$

por lo tanto, la expresión general es

$$\beta^{(k+1)} = U^k \cdots U^2 U^1 \widetilde{\beta}^{(k+1)}. \tag{3.65}$$

El mismo procedimiento nos lleva a la relación entre las matrices σ:

$$\sigma^{(k+1)} = U^k \cdots U^2 U^1 \widetilde{\sigma}^{(k+1)}. \tag{3.66}$$

Y, finalmente, al calcular $\rho^{(k+1)}$ se obtiene un resultado similar y en cada paso vamos calculando los valores de las matrices $U^1,\ U^2, \cdots,\ U^k$, con la descomposición

en valores singulares de las matrices ρ de cada paso, es decir, $\rho^{(k)} = U^{(k)}\Sigma^{(k)}V^{T(k)}$ y a partir de la matriz $U^{(k)}$ construimos $U^k = [\ 0 \mid I_{m-rk}\ ]\, U^{(k)\,T}$.

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= \widetilde{\rho}^{(1)} \rightarrow \rho^{(1)} = U^{(1)}\Sigma^{(1)}V^{(1)T} \rightarrow U^1 = [\ 0 \mid I_{m-r1}\ ]\, U^{(1)\,T} \\
&\vdots \\
\rho^{(k+1)} &= U^k\left(\sigma^{(k)}B + \beta^{(k)}Q\right) = U^k\cdots U^2U^1\left(\widetilde{\sigma}^{(k)}B + \widetilde{\beta}^{(k)}Q\right) \\
&= U^k\cdots U^2U^1\widetilde{\sigma}^{(k+1)} \\
\rho^{(k+1)} &= U^{(k+1)}\Sigma^{(k+1)}V^{(k+1)T} \rightarrow U^{k+1} = [\ 0 \mid I_{m-r(k+1)}\ ]\, U^{(k+1)\,T}
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a resolver el problema recursivo planteado por las ecuaciones (3.62)-(3.64) que parten de los mismos datos iniciales que las ecuaciones del problema de partida, que son las que definen la ligadura primaria:

$$\widetilde{\sigma}^{(1)} = -Q^T, \quad \widetilde{\beta}^{(1)} = B^T, \quad \widetilde{\rho}^{(1)} = R. \tag{3.67}$$

Vamos desarrollando las ecuaciones recursivas, partiendo de estos valores, y se obtienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}^{(1)} &= B^T \\
\widetilde{\beta}^{(2)} &= -B^TA^T \\
\widetilde{\beta}^{(3)} &= B^T(A^T)^2 \\
&\vdots \\
\widetilde{\beta}^{(k+1)} &= (-1)^kB^T(A^T)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}^{(1)} &= -Q^T \\
\widetilde{\sigma}^{(2)} &= \widetilde{\sigma}^{(1)}A + \widetilde{\beta}^{(1)}P = -Q^TA + B^TP \\
\widetilde{\sigma}^{(3)} &= -Q^TA^2 + B^T[PA - A^TP] \\
\widetilde{\sigma}^{(4)} &= -Q^TA^3 + B^T[PA^2 - A^TPA + (A^T)^2P] \\
&\vdots \\
\widetilde{\sigma}^{(k+1)} &= -Q^TA^k + B^T\left[\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(A^T)^iPA^{k-1-i}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}^{(1)} &= R \\
\widetilde{\rho}^{(2)} &= -Q^TB + B^TQ \\
&\vdots \\
\widetilde{\rho}^{(k+1)} &= -Q^TA^{k-1}B + (-1)^{k-1}B^T(A^T)^{k-1}Q + B^T\left[\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i(A^T)^iPA^{k-2-i}\right]B.
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que la solución de este problema es la que sigue:

Solución del problema modificado:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}^{(k+1)} &= (-1)^k B^T (A^T)^k, \quad k \geq 1 \\
\widetilde{\sigma}^{(1)} &= -Q^T, \quad \widetilde{\sigma}^{(k+1)} = -Q^T A^k + B^T \left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A^T)^i P A^{k-1-i} \right], \quad k \geq 2 \\
\widetilde{\rho}^{(1)} &= R, \quad \widetilde{\rho}^{(2)} = -Q^T B + B^T Q \\
\widetilde{\rho}^{(k+1)} &= -Q^T A^{k-1} B + (-1)^{k-1} B^T (A^T)^{k-1} Q + B^T \left[\sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i (A^T)^i P A^{k-2-i} \right] B, \\
& \quad k \geq 3.
\end{aligned}$$

Obtenemos a partir de estas expresiones las del problema inicial, que detallamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 *La expresión de las ligaduras,*

$$\phi^{(k+1)} = \sigma^{(k+1)}\, x + \beta^{(k+1)}\, p + \rho^{(k+1)}\, u,$$

del problema de control óptimo lineal cuadrático singular definido por las siguientes matrices $A,\ P \in \mathbb{R}^{n\times n};\ B,\ Q \in \mathbb{R}^{n\times m};\ R \in \mathbb{R}^{m\times m}$,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
L &= \frac{1}{2} x^T P x + x^T Q u + \frac{1}{2} u^T R u,
\end{aligned}$$

quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
\beta^{(k+1)} &= (-1)^k U^k \cdots U^2 U^1 B^T (A^T)^k, \quad k \geq 1 \\
\sigma^{(1)} &= -Q^T, \\
\sigma^{(k+1)} &= U^k \cdots U^2 U^1 \left(-Q^T A^k + B^T \left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A^T)^i P A^{k-1-i} \right] \right), \quad k \geq 2 \\
\rho^{(1)} &= R, \quad \rho^{(2)} = U^1 \left(-Q^T B + B^T Q \right) \\
\rho^{(k+1)} &= U^k \cdots U^2 U^1 \left(-Q^T A^{k-1} B + (-1)^{k-1} B^T (A^T)^{k-1} Q + \right. \\
&+ \left. B^T \left[\sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i (A^T)^i P A^{k-2-i} \right] B \right), \quad k \geq 3. \\
\rho^{(k+1)} &= U^{(k+1)} \Sigma^{(k+1)} V^{(k+1)T} \to U^{k+1} = [\ 0 \mid I_{m-r(k+1)}\ ]\, U^{(k+1)\,T}.
\end{aligned}$$

3.3.6. Experimentos numéricos sobre la estabilidad del algoritmo de ligaduras

Primer experimento: El algoritmo realiza n pasos, se perturba la matriz A

A partir de las soluciones del problema, halladas en el apartado anterior, ahora procedemos a diseñar algunos ejemplos más complejos y mostramos los resultados del algoritmo de ligaduras. Veamos el siguiente ejemplo, en el cual analizaremos primero la solución teórica y luego veremos los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo. Los datos iniciales de partida son los siguientes:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ P = A + A^T,\ B \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ Q = B, R = 0. \tag{3.68}$$

Veamos cuál es la forma de cada ligadura, primero el valor de las matrices $\rho^{(1)},\ \rho^{(2)}, \ldots,\ \rho^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)} &= R = 0 \\
\rho^{(2)} &= B^TQ - Q^TB = B^TB - B^TB = 0 \\
\rho^{(3)} &= -Q^TAB - B^TA^TQ + B^TPB = B^T[-A - A^T + A + A^T]B = 0 \\
\rho^{(4)} &= B^T[-A^T + (-A^T)^2 + (A + A^T)A - A^T(A + A^T)]B = 0 \\
&\vdots \\
\rho^{(k+1)} &= B^T[-A^{k-1} + (-1)^{k-1}(A^T)^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i(A^T)^i(A + A^T)A^{k-2-i}]B \\
&= B^T[-A^{k-1} + (-1)^{k-1}(A^T)^{k-1} \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} -(-1)^j(A^T)^jA^{k-1-j} + \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j(A^T)^jA^{k-1-j}]B \\
&= B^T[-A^{k-1} + (-1)^{k-1}(A^T)^{k-1} - (-1)^{k-1}(A^T)^{k-1} + A^{k-1}]B = 0.
\end{aligned}$$

Estas matrices son siempre nulas, por lo tanto, en este tipo de problema no va a existir "feedback" optimal (sólo tenemos un único control). Esto quiere decir que todas las ligaduras van a ser de primera clase y las matrices $U^1,\ U^2, \cdots$ son todas la unidad, así que las omitiremos. Veamos qué ocurre con las otras matrices de estas ligaduras:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{(1)} &= -B^T \\
\sigma^{(2)} &= -B^T A + B^T(A + A^T) = B^T A^T \\
\sigma^{(3)} &= B^T[-A^2 + (A + A^T)A - A^T(A + A^T)] = -B^T(A^T)^2 \\
&\vdots \\
\sigma^{(k+1)} &= B^T[-A^k + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i (A^T)^i (A + A^T)A^{k-1-i}] = \\
&= B^T[-A^k + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i (A^T)^{i+1} A^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i (A^T)^i A^{k-i}] = \\
&= B^T[-A^k + \sum_{j=1}^{k} -(-1)^j (A^T)^j A^{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j (A^T)^j A^{k-j}] = \\
&= B^T[-A^k - (-1)^k (A^T)^k + A^k = (-1)^{k-1} B^T (A^T)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{(1)} &= B^T \\
\beta^{(2)} &= -B^T A^T \\
&\vdots \\
\beta^{(k+1)} &= (-1)^k B^T (A^T)^k.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, tenemos que las ligaduras de este problema son de la forma

$$
\beta^{k+1} = -\sigma^{k+1} = (-1)^k B^T (A^T)^k, \quad \rho^{k+1} = 0 \tag{3.69}
$$

y la matriz de ligaduras quedará como sigue:

$$
\begin{aligned}
f &= \begin{bmatrix} -B^T & B^T & 0 \\ B^T A^T & -B^T A^T & 0 \\ -B^T (A^T)^2 & B^T (A^T)^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(-1)^k B^T (A^T)^k & (-1)^k B^T (A^T)^k & 0 \end{bmatrix} = \\
&= [B^T,\ B^T,\ \cdots, B^T] \begin{bmatrix} -I & I & 0 \\ A^T & -A^T & 0 \\ -(A^T)^2 & (A^T)^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(-1)^k (A^T)^k & (-1)^k (A^T)^k & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Claramente, el algoritmo parará sólo cuando lleguemos a un paso en el cual se obtenga una combinación lineal de las filas anteriores. Tenemos para este problema dos posibilidades, si el polinomio mínimo de la matriz A es de grado q, el algoritmo parará si:

- $B^T \notin \ker(A^k), \quad k = 1, \ldots, q$, entonces la fila $q+1$ es combinación lineal de las anteriores.
- $B^T \in \ker(A^p), \quad 0 < p \leq q$, entonces la fila $p+1$ es automáticamente nula

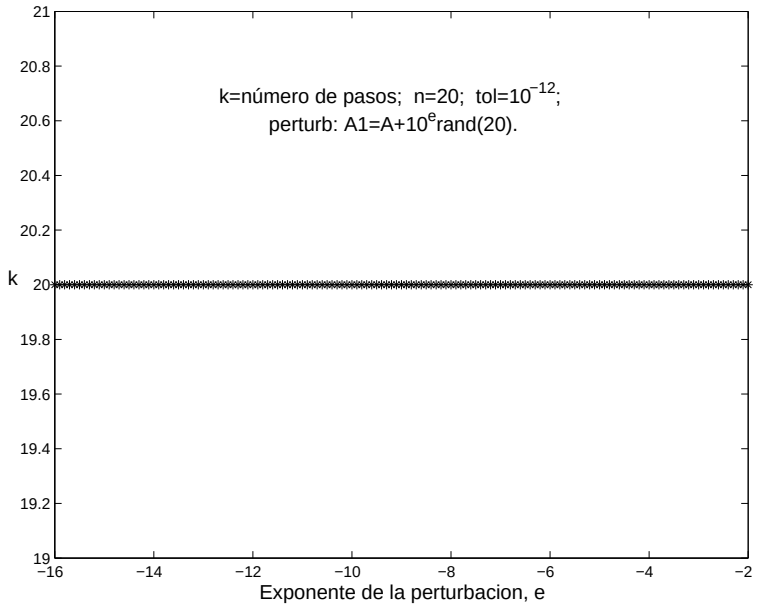
Vamos a aplicar el algoritmo numérico a este problema con las siguientes matrices: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente, de manera que $A^{n-1} \neq 0$ pero $A^n = 0$, y tal que la matriz $B^T \notin \ker(A^k), \quad k = 1, \ldots, n-1$. El número de pasos que tiene que realizar el algoritmo es $k = n$. Las matrices que hemos elegido son las siguientes, en el caso de $n = 5$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; P = A + A^T; \; Q = B; \; R = 0.$$

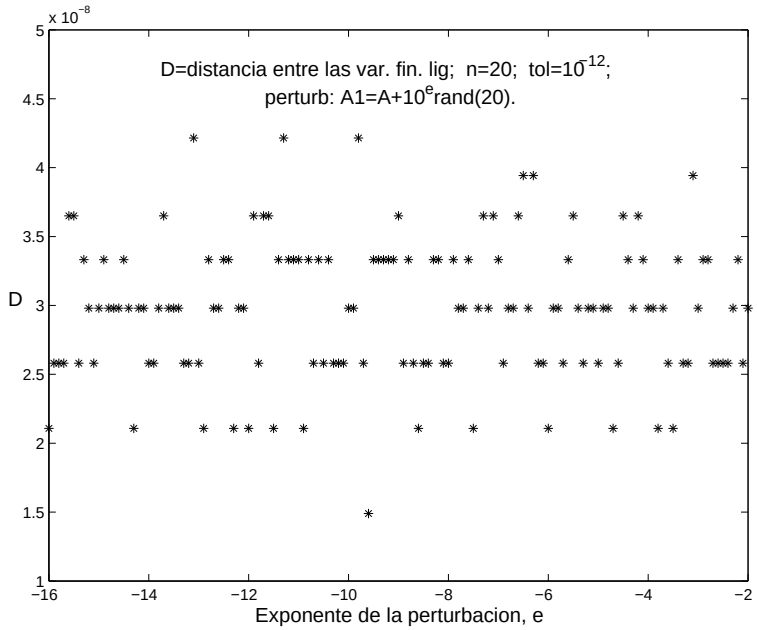
Éstas son para $n = 5$, en otras dimensiones mantendremos esa misma estructura por encima de la diagonal tendremos unos y en la esquina superior derecha también un uno. Aplicamos el algoritmo numérico a una matriz de esta clase con $n = 20$ y a una colección de matrices perturbadas a partir de ésta de la siguiente forma:

$$A_1 = A + delta * rand(20); \; P_1 = A_1 + A_1^T,$$

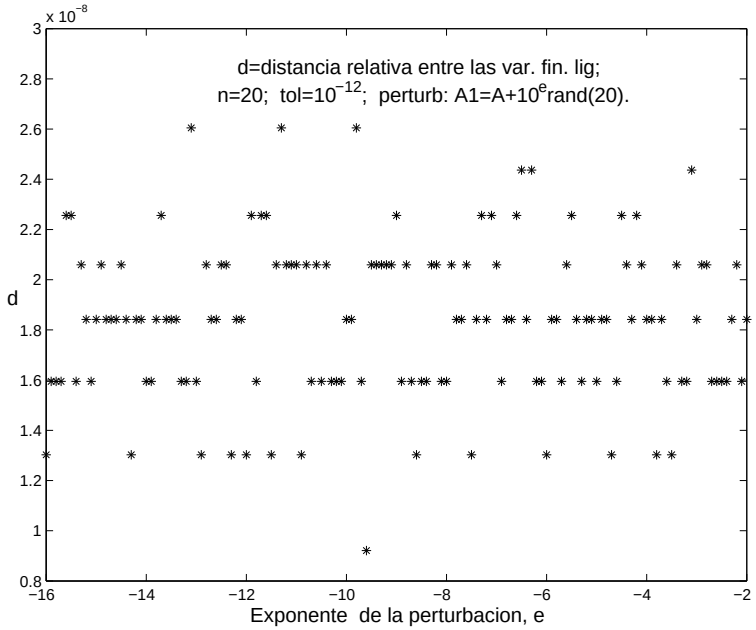
donde $delta = 10^e$ y e toma los valores $e = 0 : 0{,}01 : 1$. Analizamos los resultados del algoritmo, tanto el número de pasos, la distancia entre la subvariedad final de las ligaduras definida por el problema de partida y el perturbado como la norma de la matriz COR, que tiene que ser menor que la tolerancia, puesto que todas las ligaduras son de primera clase. Para el problema de partida y el perturbado la variedad final de las ligaduras ha de ser la misma. Veamos las gráficas obtenidas para $n = 20$. La primera de ellas nos informa sobre el número de pasos. Con una tolerancia igual o superior a 10^{-12} el número de pasos obtenidos es $k = 20$ en todo los casos, que es el resultado correcto, pero si ponemos una tolerancia menor que la anterior, nos aparecen algunos valores de la perturbación para los cuales el algoritmo termina en un número menor de pasos, porque el valor de ρ, aunque es muy pequeño, obliga al algoritmo a detenerse.



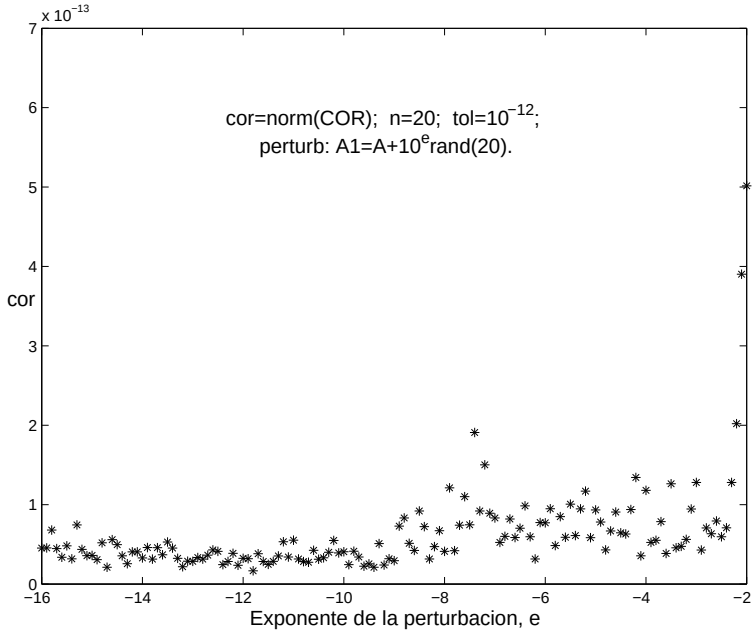
Como la subvariedad final de las ligaduras tiene que ser la misma para el problema de partida y para toda la colección de problemas perturbados, medimos la distancia entre las subvariedades finales de las ligaduras obtenidas. Eso lo hacemos con el comando de MatLab "subspace" que calcula el ángulo entre dos subespacios. El resultado lo muestra la siguiente gráfica.



Ahora mostramos la figura que representa la distancia definida anteriormente pero dividida por la norma de la matriz de partida, A, que denotamos como d.



Por último, mostramos una figura que representa la norma de la matriz COR donde se puede observar que es del orden de 10^{-13} y, por tanto, la función kernumerico, que separa las ligaduras de primera de las de segunda clase, va a tomar todas las ligaduras como ligaduras de primera clase.



Para terminar el estudio de este ejemplo mostramos, en la siguiente tabla, la tolerancia necesaria para obtener resultados correctos para distintos valores de n. Téngase en cuenta que para un n dado, el número de pasos a realizar es $k = n$ y las matrices son de tamaño $n \times n$.

n	tolerancia
2-3	cualquiera
4-8	10^{-14}
9-13	10^{-13}
14-20	10^{-12}
21-24	10^{-11}
25-30	10^{-10}
31-36	10^{-9}
37-40	10^{-8}
41-45	10^{-7}
46-50	10^{-6}
51-55	10^{-5}
56-60	10^{-4}

Segundo experimento: El algoritmo realiza 3 pasos, se perturban las matrices A y Q. Se prueba con n = 1000

Este segundo ejemplo que vamos a analizar aquí, dentro de este apartado de ejemplos complejos, es más simple, porque únicamente tiene que realizar un pequeño número de pasos. Lo que vamos a estudiar es cómo se comportan las matrices con n muy grande. Los resultados obtenidos son completamente satisfactorios, veámoslo.

El problema es un problema lineal cuadrático donde la matriz A es proporcional a la matriz identidad, $A = \alpha I$, hallamos primero la forma de las ligaduras y después lo que haremos será implementar un subcaso más simple en el cual el algoritmo sólo tiene 3 pasos. La forma explícita de las ligaduras, utilizando el Teorema 3.3.1, es:

$$f = \left[\begin{array}{c|c|c} -Q^T & B^T & R \\ U^1\left[-\alpha Q^T + B^T P\right] & -U^1\left[\alpha B^T\right] & U^1\left[-Q^T B + B^T Q\right] \\ -U^2U^1\left[\alpha^2 Q^T\right] & U^2U^1\left[\alpha^2 B^T\right] & U^2U^1\left[\alpha(-Q^T B - B^T Q) + B^T P B\right] \\ U^3U^2U^1\alpha^2\left[\alpha Q^T + B^T P\right] & -U^3U^2U^1\left[\alpha^3 B^T\right] & U^3U^2U^1\alpha^2\left[-Q^T B + B^T Q\right] \end{array}\right].$$

Como la cuarta fila se relaciona con la segunda con la fórmula $F_4 = U^3U^2\alpha^2 F_2$, quiere decir que el algoritmo termina aquí (si no lo ha hecho antes), ya que son linealmente independientes.

Escogemos las siguientes matrices $P = A = I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$B^T = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $Q^T = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $R = 0$; entonces la matriz de

ligaduras sólo tiene tres filas:

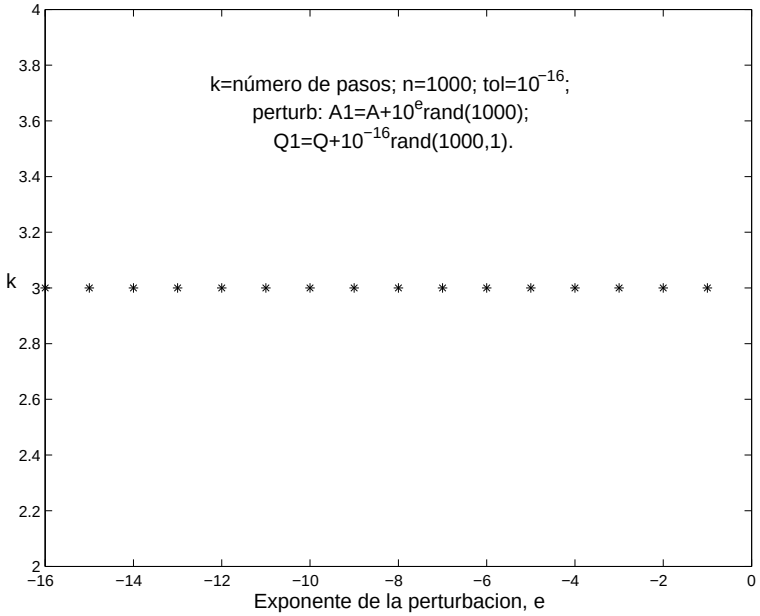
$$f = \left[\begin{array}{c|c|c} (0,\ldots,0) & (1,\ldots,1) & 0 \\ (1,\ldots,1) & -(1,\ldots,1) & 0 \\ (0,\ldots,0) & (1,\ldots,1) & n \end{array}\right],$$

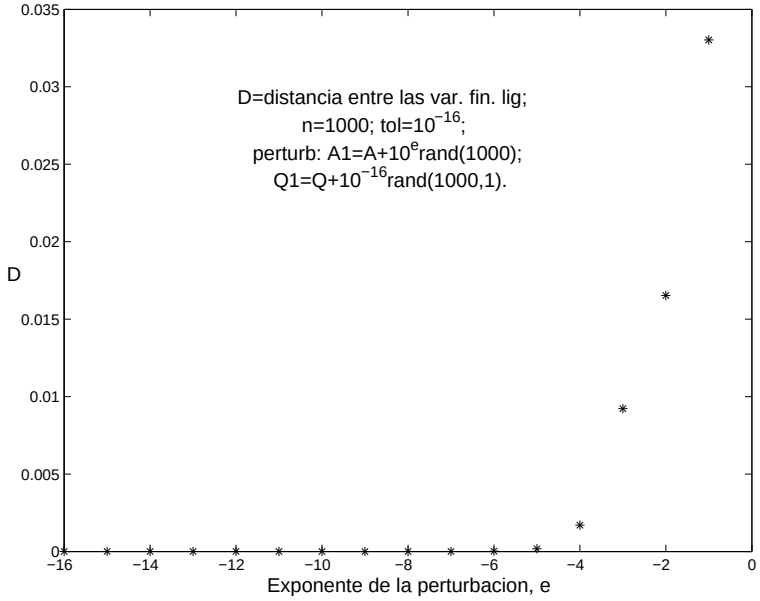
donde n es la dimensión de las matrices A y P. Por lo tanto, en la tercera fila aparece un "feedback" optimal y la subvariedad final es simpléctica, que viene dada por las ecuaciones $x_1 + \cdots + x_n = p_1 + \cdots + p_n = u = 0$.

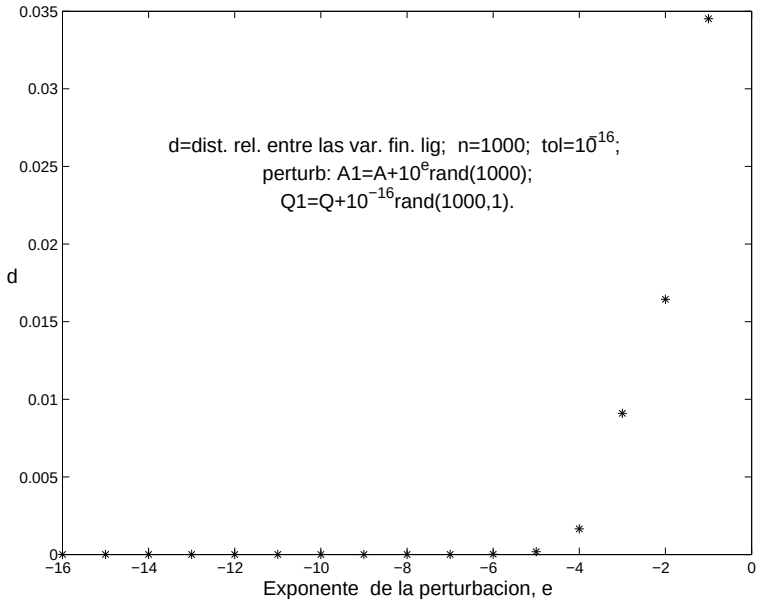
Veamos los resultados del algoritmo numérico aplicados sobre una matriz $A = I_n$ con $n = 1000$, $P = A$, $R = 0$, $B = ones(n, 1)$, $Q = B$; $tol = 1e - 16$; y las matrices perturbadas de la siguiente manera: $A1 = A + delta * rand(size(A))$; $Q1 = Q + delta * rand(size(Q))$ donde $delta = 10^e$ y e toma los valores $e = 0 : 0{,}01 : 1$. De nuevo, como la variedad final de las ligaduras del problema de partida y el perturbado han de ser iguales, medimos el ángulo entre estas, este va a ser el error, denotando como D. El error relativo, denotado por errorrel, es el error dividido por la norma de la matriz A. En la siguiente tabla mostramos algunos de los resultados.

n	$delta$	k exacto	k	codimension	error
1000	1e-016	3	3	0.00000033052374	0.00000033052374
1000	1e-015	3	3	0.00000033085947	0.00000033085947
1000	1e-014	3	3	0.00000033152991	0.00000033152991
1000	1e-013	3	3	0.00000027837666	0.00000027837666
1000	1e-012	3	3	0.00000027232866	0.00000027232866
1000	1e-011	3	3	0.00000008161702	0.00000008161702
1000	1e-010	3	3	0.00000005771195	0.00000005771195
1000	1e-009	3	3	0.00000000000000	0.00000000000000
1000	1e-008	3	3	0.00000034012533	0.00000034012533
1000	1e-007	3	3	0.00000186324110	0.00000186324110
1000	1e-006	3	3	0.00001849894992	0.00001849894992
1000	1e-005	3	3	0.00017928945709	0.00017928945709
1000	1e-004	3	3	0.00170179566370	0.00170179566370
1000	1e-003	3	3	0.00921722522445	0.00921722522445
1000	1e-002	3	3	0.01653407568550	0.01653407568550
1000	1e-001	3	3	0.03302253079414	0.03302253079414

Las siguientes gráficas muestran los resultados obtenidos.


k=número de pasos; n=1000; tol=10^−16;
perturb: A1=A+10^e rand(1000);
Q1=Q+10^−16 rand(1000,1).
k
Exponente de la perturbacion, e


D=distancia entre las var. fin. lig;
n=1000; tol=10^−16;
perturb: A1=A+10^e rand(1000);
Q1=Q+10^−16 rand(1000,1).
D
Exponente de la perturbacion, e



Tercer experimento: El algoritmo realiza 3 pasos, se perturba la matriz R

Las matrices $A,\ B,\ P$ y Q son la identidad $n \times n$. La matriz R es degenerada de rango 1, es una matriz de tamaño $n \times n$ cuyo elemento $r_{11} = 1$ y el resto son todos nulos. Se perturba la matriz R con perturbaciones aleatorias de tamaño del orden de *tol*. Se efectúa el cómputo para matrices de tamaños $n = 2, \ldots, 10$. Se representa el numero de pasos del algoritmo de ligaduras y el ángulo formado entre los subespacios de ligaduras. La perturbación sobre la matriz R es $R + delta * rand(size(R))$.

n	*delta*	k exacto	k	codimension	error
2	1e-016	3	3	4	0.00000003332001
2	1e-015	3	3	4	0.00000002580957
2	1e-014	3	3	4	0.00000001490116
2	1e-013	3	3	4	0.00000002980232
2	1e-012	3	3	4	0.00000002107342
2	1e-011	3	3	4	0.00000001490116
2	1e-010	3	3	4	0.00000001490116
2	1e-009	3	3	4	0.00000003332001
2	1e-008	3	3	4	0.00000002580957
2	1e-007	3	3	4	0.00000004942156
2	1e-006	3	3	4	0.00000039537248
2	1e-005	3	1	2	0.00000487880493
2	1e-004	3	1	2	0.00001805804337
2	1e-003	3	1	2	0.00034372942995
2	1e-002	3	1	2	0.00526915574630
2	1e-001	3	1	2	0.05589451451255

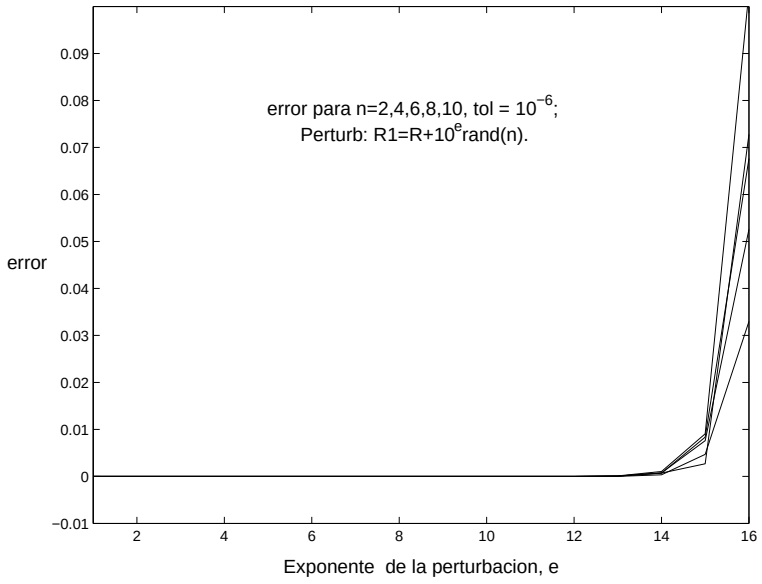
n	*delta*	k exacto	k	codimension	error
4	1e-016	3	3	10	0.00000003650024
4	1e-015	3	3	10	0.00000003942477
4	1e-014	3	3	10	0.00000002980232
4	1e-013	3	3	10	0.00000003650024
4	1e-012	3	3	10	0.00000002580957
4	1e-011	3	3	10	0.00000003332001
4	1e-010	3	3	10	0.00000002580957
4	1e-009	3	3	10	0.00000002580957
4	1e-008	3	3	10	0.00000002580957
4	1e-007	3	3	10	0.00000013160349
4	1e-006	3	3	8	0.00000064506712
4	1e-005	3	3	6	0.00000622677788
4	1e-004	3	1	4	0.00007143808146
4	1e-003	3	1	4	0.00068477146653
4	1e-002	3	1	4	0.00581794392304
4	1e-001	3	1	4	0.07538298627753

n	*delta*	k exacto	k	codimension	error
6	1e-016	3	3	16	0.00000002580957
6	1e-015	3	3	16	0.00000003650024
6	1e-014	3	3	16	0.00000002580957
6	1e-013	3	3	16	0.00000004214685
6	1e-012	3	3	16	0.00000003650024
6	1e-011	3	3	16	0.00000003942477
6	1e-010	3	3	16	0.00000002980232
6	1e-009	3	3	16	0.00000002580957
6	1e-008	3	3	16	0.00000003650024
6	1e-007	3	3	16	0.00000012555942
6	1e-006	3	3	14	0.00000105577645
6	1e-005	3	3	8	0.00000935019071
6	1e-004	3	3	8	0.00010755560816
6	1e-003	3	1	6	0.00082359077595
6	1e-002	3	1	6	0.00817169631273
6	1e-001	3	1	6	0.09843151527492

n	*delta*	k exacto	k	codimension	error
8	1e-016	3	3	22	0.00000003332001
8	1e-015	3	3	22	0.00000003332001
8	1e-014	3	3	22	0.00000002580957
8	1e-013	3	3	22	0.00000004214685
8	1e-012	3	3	22	0.00000003942477
8	1e-011	3	3	22	0.00000004214685
8	1e-010	3	3	22	0.00000003332001
8	1e-009	3	3	22	0.00000002980232
8	1e-008	3	3	22	0.00000004214685
8	1e-007	3	3	22	0.00000015485741
8	1e-006	3	3	18	0.00000110931114
8	1e-005	3	3	10	0.00001074353055
8	1e-004	3	1	8	0.00009129082427
8	1e-003	3	1	8	0.00081806634576
8	1e-002	3	1	8	0.00633310246368
8	1e-001	3	1	8	0.07345585140539

n	*delta*	k exacto	k	codimension	error
10	1e-016	3	3	28	0.00000003650024
10	1e-015	3	3	28	0.00000003650024
10	1e-014	3	3	28	0.00000004470348
10	1e-013	3	3	28	0.00000003650024
10	1e-012	3	3	28	0.00000003650024
10	1e-011	3	3	28	0.00000005161914
10	1e-010	3	3	28	0.00000003942477
10	1e-009	3	3	28	0.00000004712161
10	1e-008	3	3	28	0.00000004214685
10	1e-007	3	3	28	0.00000020157917
10	1e-006	3	3	22	0.00000104616340
10	1e-005	3	3	12	0.00000835236338
10	1e-004	3	3	12	0.00009933359611
10	1e-003	3	1	10	0.00092695927571
10	1e-002	3	1	10	0.01007537759575
10	1e-001	3	1	10	0.07903000012148

Los resultados muestran que el algoritmo funciona bien hasta perturbaciones del orden de tol. Además, muestran que el algoritmo es insensitivo al tamaño de las matrices originales. En la siguiente figura se representan estos errores.



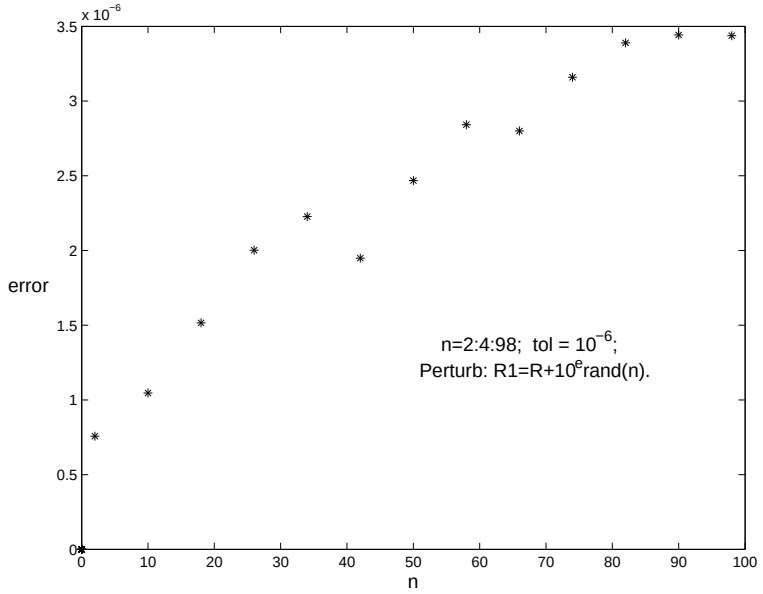
Cuarto experimento: El algoritmo realiza 3 pasos, se perturba la matriz R con una única perturbación, se prueban varios valores de n

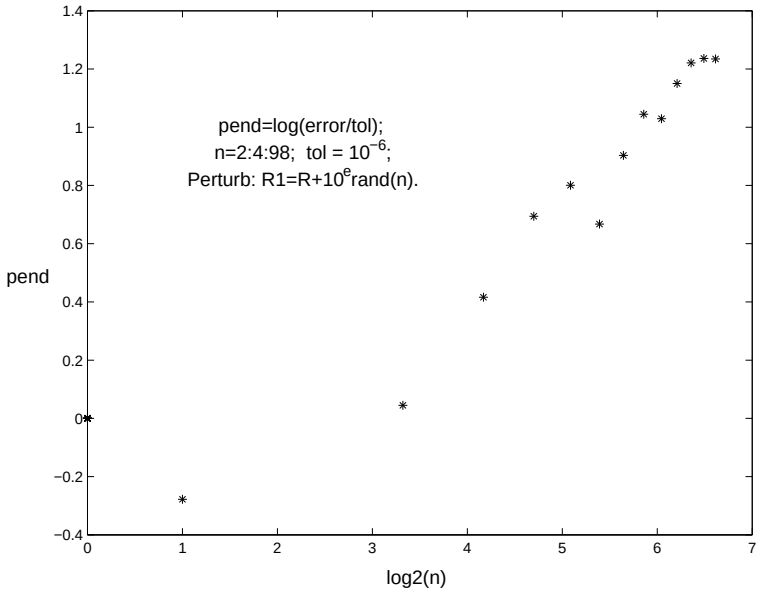
En este último experimento las matrices son de la misma forma que en el caso anterior, pero se utiliza una perturbación fija, $R1 = R + 10^{-6} * rand(n)$ y se

estudia el error para distintos valores de n.

n	*delta*	k exacto	k	codimension	error
2	1e-006	2	2	4	0.00000075732504
10	1e-006	2	2	20	0.00000104595113
18	1e-006	2	2	34	0.00000151596889
26	1e-006	2	2	48	0.00000200197530
34	1e-006	2	2	60	0.00000222721271
42	1e-006	2	2	68	0.00000194892150
50	1e-006	2	2	80	0.00000246779606
58	1e-006	2	2	92	0.00000284241359
66	1e-006	2	2	102	0.00000279955504
74	1e-006	2	2	110	0.00000315922189
82	1e-006	2	2	122	0.00000338980948
90	1e-006	2	2	132	0.00000344229725
98	1e-006	2	2	138	0.00000343710069

Estos datos vienen representados en las siguientes figuras.




pend=log(error/tol);
n=2:4:98; tol = 10^−6;
Perturb: R1=R+10^6rand(n).
pend
log2(n)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
0
1
2
3
4
5
6
7

Capítulo 4

Problemas de control óptimo singular generalizados

En el capítulo 3 estudiamos el algoritmo de ligaduras cuya validez se restringía al caso de sistemas completamente reducibles, esto es, aquellos en los que se garantiza la diferenciabilidad de los objetos que van apareciendo al aplicarlo. Sin embargo, es necesario considerar problemas de control singulares donde no se verifica esta propiedad (más adelante veremos dos ejemplos concretos). En este capítulo mostramos un algoritmo eficiente para la obtención de puntos integrables (aunque no necesariamente todos) para sistemas singulares genéricos. Discutiremos dos ejemplos de sistemas singulares, el frunce y el frenado óptimo, así como las primeras nociones de una familia de sistemas de control óptimo implícitos.

4.1. El algoritmo recursivo subregular

La idea central de este algoritmo consiste en separar en cada paso la parte regular de la ecuación de la parte singular y tratar la parte singular como una ecuación aislada. Así, si $E \subset TM$ es una ecuación implícita, con la notación utilizada previamente en § 3.1.2, podemos descomponerla como:

$$E = E_{\text{reg}} \cup C,$$

donde C es el conjunto singular. De acuerdo con la Proposición 3.1.1 los puntos de C se caracterizan porque el rango de la matriz $\partial F^a/\partial v^b$ no es máximo o, equivalentemente, porque la aplicación $\tau_M|_E$ no es una submersión. Denotamos C como C_0 y supongamos que el rango de la matriz $\partial F^a/\partial v^b$ en C_0 es constante (o que el rango de la aplicación $(\tau_M|_E)_*$ en C_0 es constante). De no ser así tomaríamos cada uno de los subconjuntos donde el rango es constante y aplicaremos el algoritmo a cada uno de ellos, es decir, si descomponemos:

$$C_0 = \bigcup_{a=1}^{r_0} C_0^a,$$

donde C_0^a tiene rango constante, aplicaremos la siguiente construcción a cada uno de ellos, que consiste en proyectarlos sobre M. Este proceso tiene sentido, ya que, debido al teorema de transversalidad de Thom, es posible probar que existen ecuaciones E' tan próximas a E como queramos en la topología C^∞, tal que tanto las componentes C_0^a de C_0 como sus proyecciones en M son uniones de subvariedades diferenciables, ver [7]. Denotaremos por Σ_1 la proyección de C_0 (o de las correspondientes componentes de C_0),

$$\Sigma_1 = \tau_M(C_0)$$

y construimos

$$C_1 = T\Sigma_1 \cap C_0.$$

Si $\xi \in C_0$ es un punto integrable, entonces existirá una curva $\gamma(t)$, tal que $\gamma(0) = \tau_M(\xi),\ \dot\gamma(0) = \xi$ y $(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \in E, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Si suponemos que la curva está contenida toda ella en la variedad singular $(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \in C_0$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $\xi \in T\Sigma_1$ y, por tanto, $\xi \in T\Sigma_1 \cap C_0 = C_1$. Consideramos ahora la ecuación diferencial $C_1 \subset T\Sigma_1$ sobre la variedad Σ_1 y aplicamos de nuevo el procedimiento anterior: descomponemos C_1 en su parte regular y singular,

$$C_1 = C_{1,\mathrm{reg}} \cup C_1^{'},$$

donde $C_{1,\mathrm{reg}}$ son los puntos regulares de C_1 sobre Σ_1 y $C_1^{'}$ son los puntos singulares sobre Σ_1, y definimos

$$\Sigma_2 = \tau_M(C_1^{'}), \qquad C_2 = T\Sigma_2 \cap C_1.$$

Procediendo recursivamente, definimos para todo $k \geq 1$ (denotando $C_0' = C_0$):

$$\Sigma_k = \tau_M(C_{k-1}^{'}), \qquad C_k = T\Sigma_k \cap C_{k-1}, \qquad C_k = C_{k,\mathrm{reg}} \cup C_k^{'}.$$

Si el algoritmo se estabiliza, esto es, $C_{r+k} = C_r,\ k \geq 0$, a partir de cierto índice r, entonces, salvo quizás algún conjunto discreto, $C_r = C_{r,\mathrm{reg}}$, lo que implica que todos los puntos de C_r son subregulares y, por tanto, integrables. Así, obtendríamos que el conjunto

$$E_{\mathrm{reg}} \cup \bigcup_{k\geq 1} C_{k,\mathrm{reg}}$$

está formado por puntos subregulares y regulares y, por tanto, integrables:

$$E_{\mathrm{reg}} \cup \bigcup_{k\geq 1} C_{k,\mathrm{reg}} \subset E_{\mathrm{int}}. \tag{4.1}$$

Y, si denotamos $\Sigma_{0,\mathrm{reg}} = \tau_M(E_{\mathrm{reg}})$, $\Sigma_{1,\mathrm{reg}} = \tau_M(C_{1,\mathrm{reg}}),\ldots,$ $\Sigma_{r,\mathrm{reg}} = \tau_M(C_{r,\mathrm{reg}})$, entonces la unión de estos subconjuntos estará contenido en la subvariedad final de las ligaduras:

$$\bigcup_{k\geq 0} \Sigma_{k,\mathrm{reg}} \subset M_\infty. \tag{4.2}$$

Denominaremos a este algoritmo el algoritmo recursivo subregular. Ahora bien, los contenidos en las ecuaciones (4.1) y (4.2) no son igualdades en general. El algoritmo propuesto construye un subconjunto de puntos integrables, aunque no necesariamente todos ellos, como muestra el siguiente ejemplo.

4.1.1. Ejemplos de ecuaciones singulares con puntos integrables no resolubles a través del algoritmo recursivo subregular

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (x, y) la ecuación diferencial ordinaria de primer orden E definida por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= y(\dot{x} - 1) = 0 \\ G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= \dot{y} - 1 = 0. \end{aligned}$$

La parte regular de la ecuación $E = \{\, (x, y, \dot{x}, \dot{y}) |\ y(\dot{x}-1) = 0,\ \dot{y} = 1 \,\}$ se obtiene estudiando el rango de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \partial F/\partial \dot{x} & \partial F/\partial \dot{y} \\ \partial G/\partial \dot{x} & \partial G/\partial \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la parte singular C_0 de E consiste en los puntos con $y = 0$:

$$C_0 = \{\, (x, 0, \dot{x}, \dot{y}) |\ \dot{y} = 1 \,\}.$$

La proyección de C_0 sobre $\mathbb{R}^2$ es $\tau_M(C_0) = \Sigma_1 = \{\, (x, 0) |\ x \in \mathbb{R} \,\}$ y, por tanto,

$$C_1 = T\Sigma_1 \cap C_0 = \varnothing.$$

El algoritmo se detiene y no encontramos puntos subregulares en C_0.

Sin embargo, la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t + x_0, t + y_0)$ es solución de la ecuación E $\forall (x_0, y_0)$ y, por tanto, por todos los puntos de Σ_1 pasan curvas integrales de la ecuación. De hecho, la parte integrable de C_0 resulta ser

$$C_{0,\mathrm{int}} = \{\, (x, 0, 1, 1) |\ x \in \mathbb{R} \,\}.$$

La siguiente sección estudia un ejemplo donde, al contrario que en el ejemplo precedente, el algoritmo recursivo subregular describe correctamente todos los puntos integrables de la ecuación, pero existen soluciones que atraviesan la parte singular, quebrando la hipótesis básica utilizada en el enunciado del algoritmo subregular.

4.2. Un ejemplo de sistema singular genérico: el frunce

La Teoría de Catástrofes estudia el comportamiento de sistemas singulares bajo perturbaciones o equivalentemente, aunque de manera más precisa, la estructura genérica universal de los puntos críticos de aplicaciones diferenciales. Rhené Thom estableció una clasificación de las catástrofes elementales en un teorema que describe los puntos críticos degenerados de funciones de codimensión máxima cuatro. El teorema muestra que sólo existen siete tipos de puntos críticos degenerados para este tipo de funciones, que son las llamadas siete catástrofes elementales y que listamos en la tabla 4.1 [18] (ver por ejemplo [7] para la descripción de la Teoría General de Singularidades y las referencias citadas).

Cuadro 4.1: Catástrofes elementales de Thom.

Germen	Codim	Desarrollo Universal	Nombre
$[u^3]$	1	$u^3 + xu$	Pliegue
$\pm[u^4]$	2	$u^4 + xu^2 + yu$	Frunce
$[u^5]$	3	$u^5 + xu^3 + yu^2 + zu$	Cola de golondrina
$[u^3 - uv^2]$	3	$u^3 - uv^2 + x(u^2 + v^2) + yu + zv$	Umbílico elíptico
$[u^3 + v^3]$	3	$u^3 + v^3 + xuv + yu + zv$	Umbílico hiperbólico
$\pm[u^6]$	4	$u^6 + xu^4 + yu^3 + zu^2 + wu$	Mariposa
$\pm[u^2v + v^4]$	4	$u^2v + v^4 + xu^2 + yv^2 + zu + wv$	Umbílico parabólico

Este ejemplo, que vamos a desarrollar ampliamente, representa una de las catástrofes elementales de Thom, el frunce, en el contexto del control óptimo. Lo más interesante de este ejemplo es que la matriz W, que mide la singularidad del problema, no tiene rango constante. En este supuesto, los teoremas del algoritmo de ligaduras presimpléctico no son aplicables estrictamente, aunque podemos aplicar el algoritmo interpretándolo adecuadamente y probar que todavía funciona. Además, se observa claramente la relación con el algoritmo recursivo subregular discutido en la sección anterior (§ 4.1.1). Con ambos algoritmos: el algoritmo de ligaduras general adecuadamente tratado y el algoritmo recursivo subregular, se obtienen las mismas subvariedades, aunque, como veremos, existen curvas solución que atraviesan la parte singular saliendo de la parte regular, soluciones, que como ya observamos, no son detectables por el algoritmo subregular.

El problema de control óptimo singular está dado por:

$$\dot{x} = u \tag{4.3}$$
$$L = -u^4 - xu^2, \tag{4.4}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable de estado y $u \in \mathbb{R}$ es el control del problema. Construimos el hamiltoniano y el campo vectorial dinámico solución de $i_{\Gamma_C} = dH$, que son respectivamente:

$$H = u^4 + xu^2 + pu \tag{4.5}$$
$$\Gamma_C = u\frac{\partial}{\partial x} - u^2\frac{\partial}{\partial p} + C\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.6}$$

Como vemos, el hamiltoniano H es exactamente igual al desarrollo universal del germen $[u^4]$, que corresponde a la catástrofe frunce en la tabla de las catástrofes elementales de Thom. En este caso, las variables (x, p) del problema de control se deben identificar con los parámetros de control (x, y) de la Teoría de Catástrofes.

La subvariedad M_1 de las ligaduras primarias es la siguiente:

$$M_1 = \left\{(x, p, u) \in \mathbb{R}^3 |\ \phi^{(1)} := \frac{\partial H}{\partial u} = 4u^3 + 2xu + p = 0\right\},$$

que es claramente una subvariedad regular del espacio de fases total $M = \{(x, p, u) \in \mathbb{R}^3\} \cong \mathbb{R}^3$. Representamos la subvariedad M_1 en la figura 4.1.

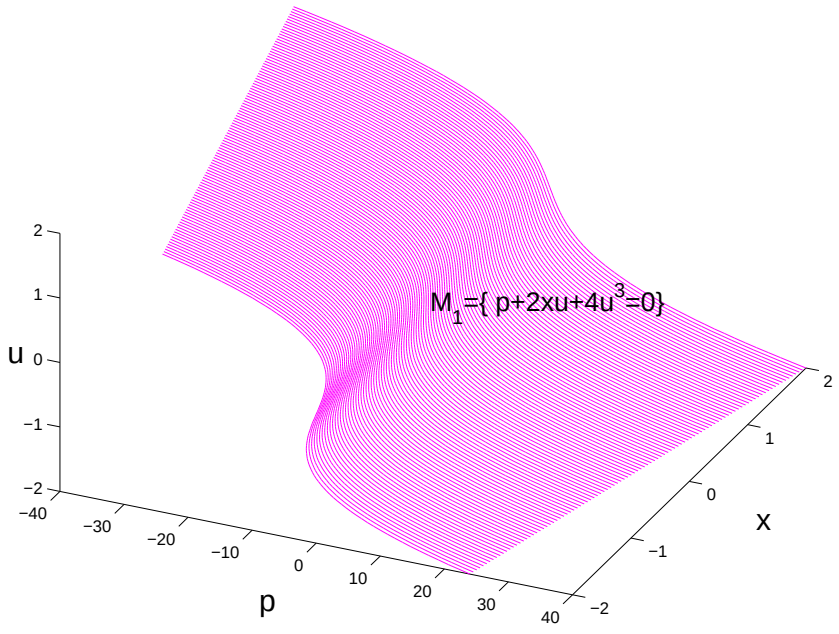


Figura 4.1: Subvariedad M_1.

La estabilidad de la ligadura $\phi^{(1)}$ con respecto a la dinámica impone que su derivada a lo largo del campo vectorial Γ_C se anule para algún C, obteniéndose la condición:

$$\begin{aligned}\Gamma_C(\phi^{(1)}) &= \dot{p} + 2\,\dot{x}\,u + 2x\dot{u} + 12\,u^2\,\dot{u} = u^2 + (12\,u^2 + 2x)\,C = \\ &= u^2 + CW = 0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Pero podemos observar que la matriz $W := 12u^2 + 2x$ no es de rango constante. Los puntos singulares, esto es, aquellos que anulan W, nos separan la subvariedad M_1 en dos partes:

- $W \neq 0$. Se tiene entonces que $C = -u^2/W$ y constituyen la proyección de la parte regular de la ecuación implícita, $\Sigma_{0,\mathrm{reg}}$. En estos puntos el problema de control es regular y existe "feedback" optimal. Las ecuaciones de movimiento que hay que integrar quedan de la forma que sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{p} &= -u^2 \\ \dot{u} &= -\frac{u^2}{W}.\end{aligned}$$

- $W = 0$. El conjunto $\Sigma_1 = \{(x,p,u) \in M_1 |\ x = -6u^2\}$ constituye el locus singular de la ecuación. Ahora bien, en la parte singular Σ_1 habrá soluciones para C donde se verifique la ecuación (4.7), es decir, cuando $u^2 = 0$, dando lugar a una segunda ligadura $\phi^{(2)}$ dentro de la parte singular Σ_1 de la ecuación:

$$\phi^{(2)} = u^2.$$

  De nuevo, estudiamos la estabilidad de esta ligadura obteniendo

$$\Gamma_C(\phi^{(2)}) = 2u\,\dot{u} = 2u\,C = 0.$$

  Por tanto, la subvariedad singular $\Sigma_{1,\mathrm{reg}}$, definida por

$$\Sigma_{1,\mathrm{reg}} = \{(x,p,u) \in\ M_0 |\, W = 0,\ \phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 0\}$$

  y que se reduce al punto $\{\,(0,0,0)\,\}$, es la variedad final singular de las ligaduras. La dinámica en ella resulta ser, por tanto,

$$\Gamma_C = C\frac{\partial}{\partial u}$$

  y si queremos estabilidad se debe tener $C = 0$, por lo que la solución de las ecuaciones en $\Sigma_{1,\mathrm{reg}}$ se reduce a la solución constante $(0,0,0)$. Posteriormente, veremos que ésta no es la única posibilidad, ya que existen soluciones que atraviesan el punto $(0,0,0)$ y salen fuera de $\Sigma_{1,\mathrm{reg}}$.

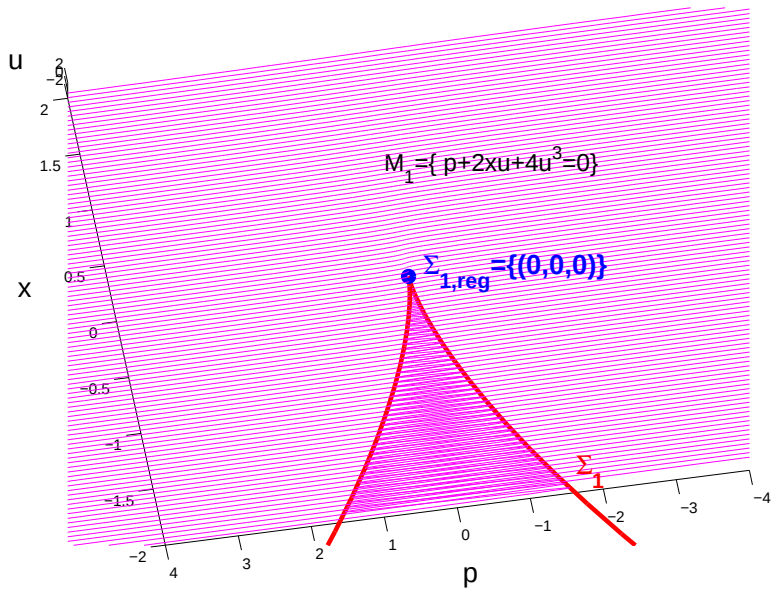


Figura 4.2: Subvariedad singular.

En la figura 4.2 mostramos la parte regular $\Sigma_{1,\mathrm{reg}}$ dentro de Σ_1.

Podemos representar mejor este proceso introduciendo unas variables más apropiadas. Hagamos el siguiente cambio de variable $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x,p,u) = (x,u,\phi), \tag{4.8}$$

donde $\phi = \phi^{(1)} = p + 2xu + 4u^3$. Nótese que F es un difeomorfismo global ya que $dx \wedge du \wedge d\phi = dx \wedge dp \wedge du \neq 0$ en todo punto.

Este cambio de variable F no preserva la 2–forma presimpléctica, ya que:

$$\begin{aligned} \Omega &= dx \wedge dp = dx \wedge d(\phi - 2xu - 4u^3) = \\ &= dx \wedge d\phi - (2x + 12u^2) dx \wedge du = dx \wedge d\phi - W\, dx \wedge du. \end{aligned}$$

Observamos que si restringimos Ω a M_1 tendremos $\Omega_1 = W dx \wedge du$ y aparece de nuevo la singularidad definida por $W = 0$. Cuando $W = 0$, la 2–forma Ω_1 se vuelve degenerada. En los puntos en los que $W \neq 0$, Ω_1 es simpléctica y el campo vectorial

$$\Gamma_1 = u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{u^2}{W}\frac{\partial}{\partial u}$$

es hamiltoniano, con hamiltoniano $H_1 = -u^2(x + 3u^2)$.

La subvariedad M_1 queda definida en las nuevas coordenadas como sigue:

$$M_1 = \{(x,u,\phi) \in M_0 |\ \phi = 0\}, \tag{4.9}$$

y las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente forma: ($W \neq 0$)

$$\dot{x} = u \tag{4.10}$$

$$\dot{u} = -\frac{u^2}{W} \tag{4.11}$$

$$\dot{\phi} = 0. \tag{4.12}$$

Tenemos una cantidad conservada, el hamiltoniano:

$$H = p\,u + x\,u^2 + u^4 = (\phi - 2xu - 4u^3)\,u + x\,u^2 + u^4,$$

que restringido a la subvariedad M_1 resulta ser:

$$H|_{M_1} = -u^2\,(x + 3u^2).$$

Por tanto, sus conjuntos de nivel, $H = \text{cte} = E$, son las curvas algebraicas

$$E = -u^2\,(x + 3u^2)$$

compuestas de curvas integrales de las ecuaciones del movimiento. Las trayectorias que pasan por el punto $(0, 0, 0)$ están contenidas en $H = 0$, pero la curva $H = 0$ tiene dos componentes, el punto $(0, 0, 0)$ citado y la curva $W = 6u^2$. Por tanto, las ecuaciones del movimiento (4.10), (4.11) sobre esta parábola resultan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= -\frac{u^2}{6u^2} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

es decir, por el punto $(0, 0, 0)$ pasa una solución de la ecuación implícita del problema optimal cuyo vector tangente es $(0, 0, -1/6)$. En la figura 4.3 mostramos una trayectoria atravesando la parte singular.

En la figura 4.4 hemos representado en el plano $x - u$ las trayectorias solución del problema. Podemos observar que la curva que pasa por el $(0, 0)$, $x = -3u^2$, divide el plano en dos regiones: a la derecha quedan las curvas cuyo hamiltoniano es negativo y a la izquierda aquellas con hamiltoniano positivo. Las curvas superiores de la región derecha se mueven en sentido positivo del eje x, por lo tanto, contienen a la curva con $x_0 = 1$ y $x_T = 8{,}75$, que representaremos posteriormente; en la región de abajo siguen el camino inverso. Sin embargo, en la región que queda a la izquierda de la curva correspondiente a $E = 0$, en la parte superior se acercan por las dos ramas a la curva singular, que tiene pendiente infinita, y en la parte inferior se alejan de ella (esto se deduce gracias al estudio de las isoclinas que realizamos posteriormente).

El problema de control óptimo singular (4.3), (4.4) es totalmente controlable. Si tomamos unos extremos fijos, $x(0) = x_0$ y $x(T) = x_T$, es posible probar que siempre hay un valor de E para el cual existe una trayectoria que los conecta.

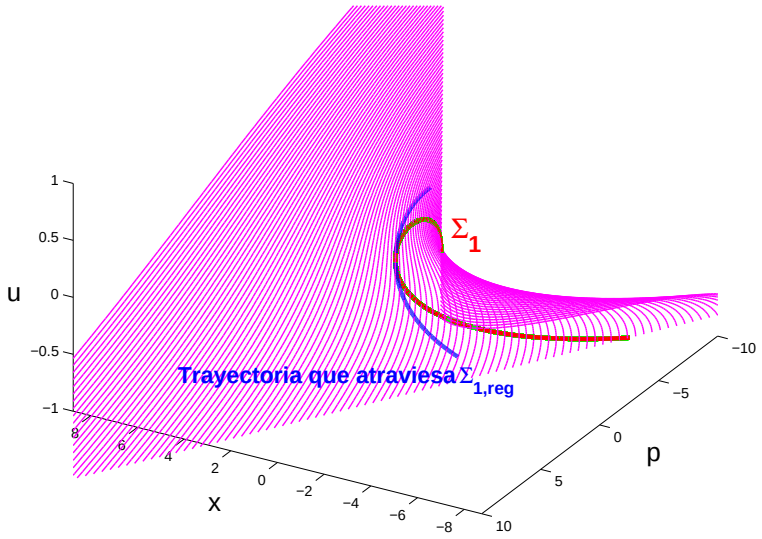


Figura 4.3: Trayectoria en M_1 que atraviesa la variedad Singular $\Sigma_{1,\text{reg}}$.

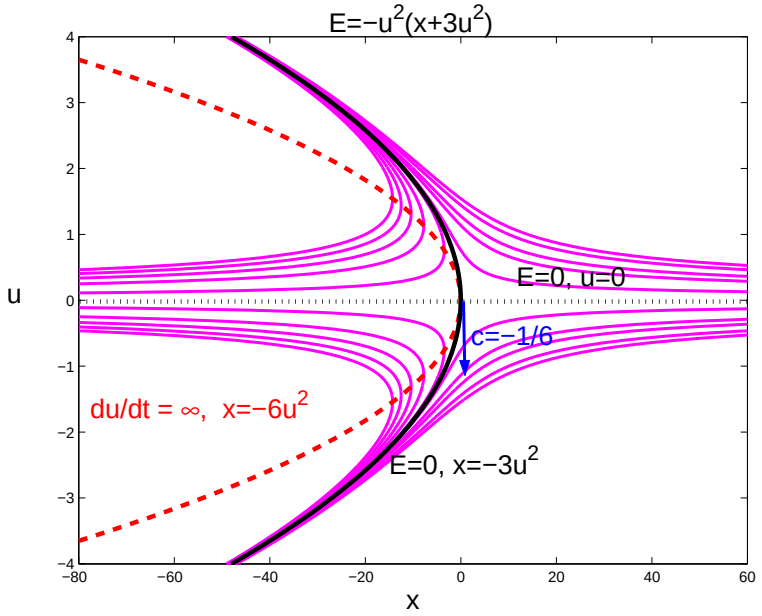


Figura 4.4: Trayectorias en el plano $x - u$.

Efectivamente, como $x = -E/u^2 - 3u^2$ y $\dot{x} = u$, entonces de $\dot{x} = (2E/u^3 - 6u)\dot{u}$ nos queda que

$$\dot{u} = \frac{u^4}{2E - 6u^4.} \tag{4.13}$$

Con esta ecuación podemos integrar la u, obtener el resultado exacto y dibu-

jarlo. En la figura 4.5 se muestra la trayectoria que parte de los puntos iniciales $x_0 = u_0 = 1$ con $x_T = 8{,}75$ integrada numéricamente.

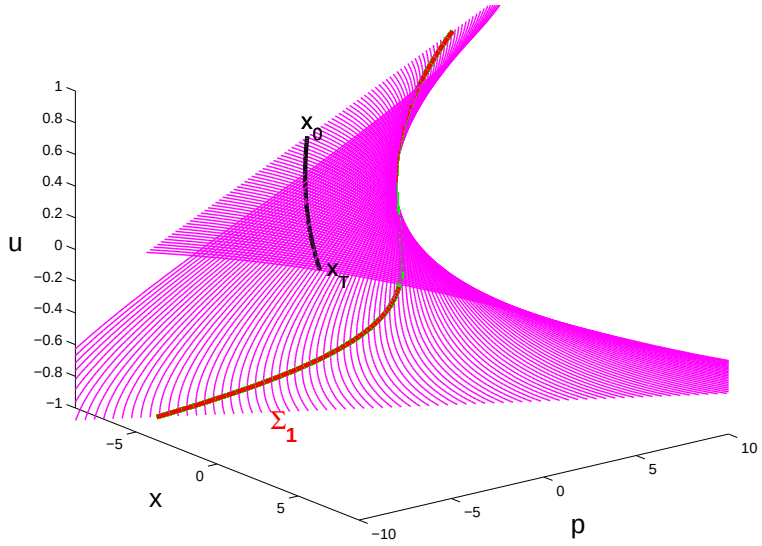


Figura 4.5: Trayectoria en la parte regular de M_1.

En la figura 4.6 mostramos el valor del estado x frente a la variable de evolución de la trayectoria que parte con $x_0 = 1$ y $u_0 = 1$ y termina en $x_T = 8{,}75$.

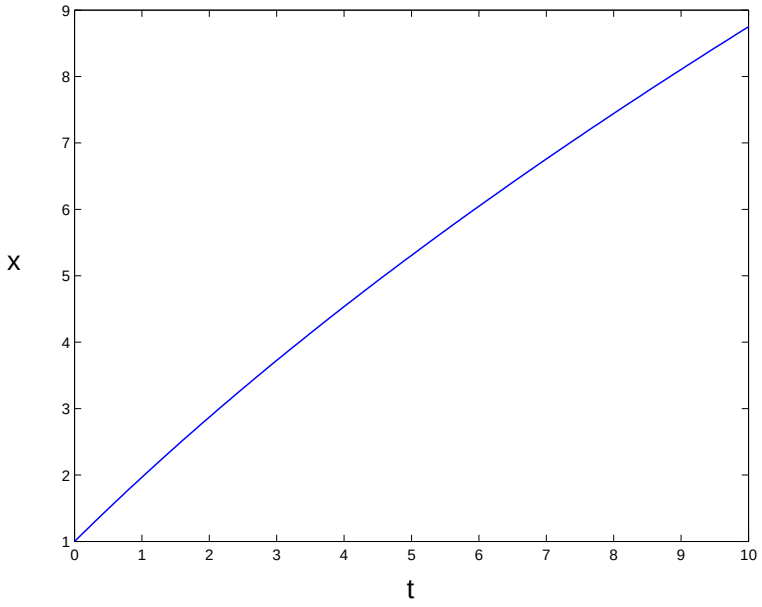


Figura 4.6: Proyección de la trayectoria con estado inicial $x_0 = 1$ y estado final $x_T = 8{,}75$.

Por último, mostramos en la figura 4.7 la trayectoria calculada numéricamente y la trayectoria exacta, que coinciden.

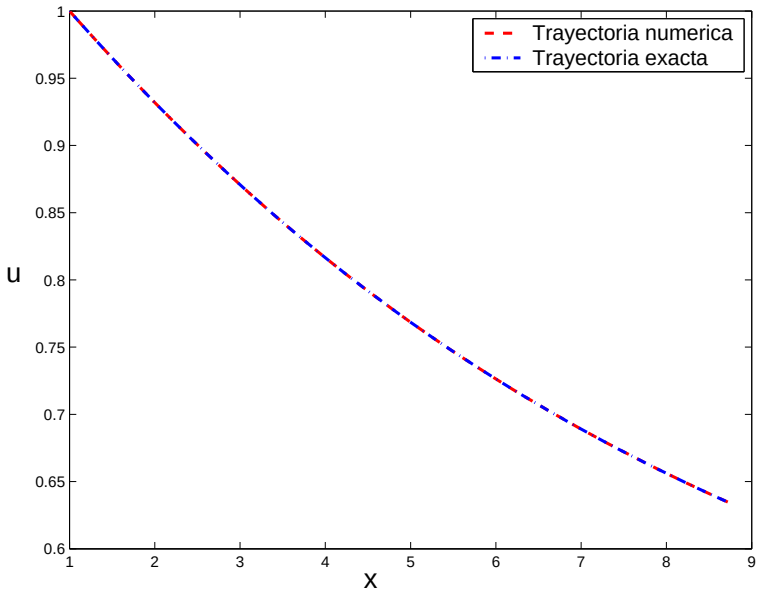


Figura 4.7: Trayectorias numérica y exacta.

Otro método alternativo para analizar las trayectorias consiste en estudiar las curvas isoclinas. Eliminando el parámetro tiempo obtenemos:

$$\frac{du/dt}{dx/dt} = \frac{du}{dx} = \frac{-u^2/(2x+12u^2)}{u} = -\frac{-u}{2x+12u^2}$$

lo que nos permite dibujar fácilmente las curvas con pendiente constante:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{-u}{2x+12u^2} = K$$

Las isoclinas con pendiente K son parábolas de ecuación:

$$x = -6u^2 - \frac{u}{2K}.$$

Para $K = 0$ tenemos que $u = 0$, es decir, $u = 0$ son todos puntos estacionarios. La tangente es infinita de nuevo en la curva singular $W = 2x + 12u^2 = 0$ y las parábolas se acercan a esta curva según $K \longrightarrow \infty$. Podemos ver todo esto en la figura 4.8

Hay otro cambio de variable muy natural, el dado por la aplicación $G\colon M \longrightarrow M$:

$$G(x, u, \phi) = (u, W, \phi).$$

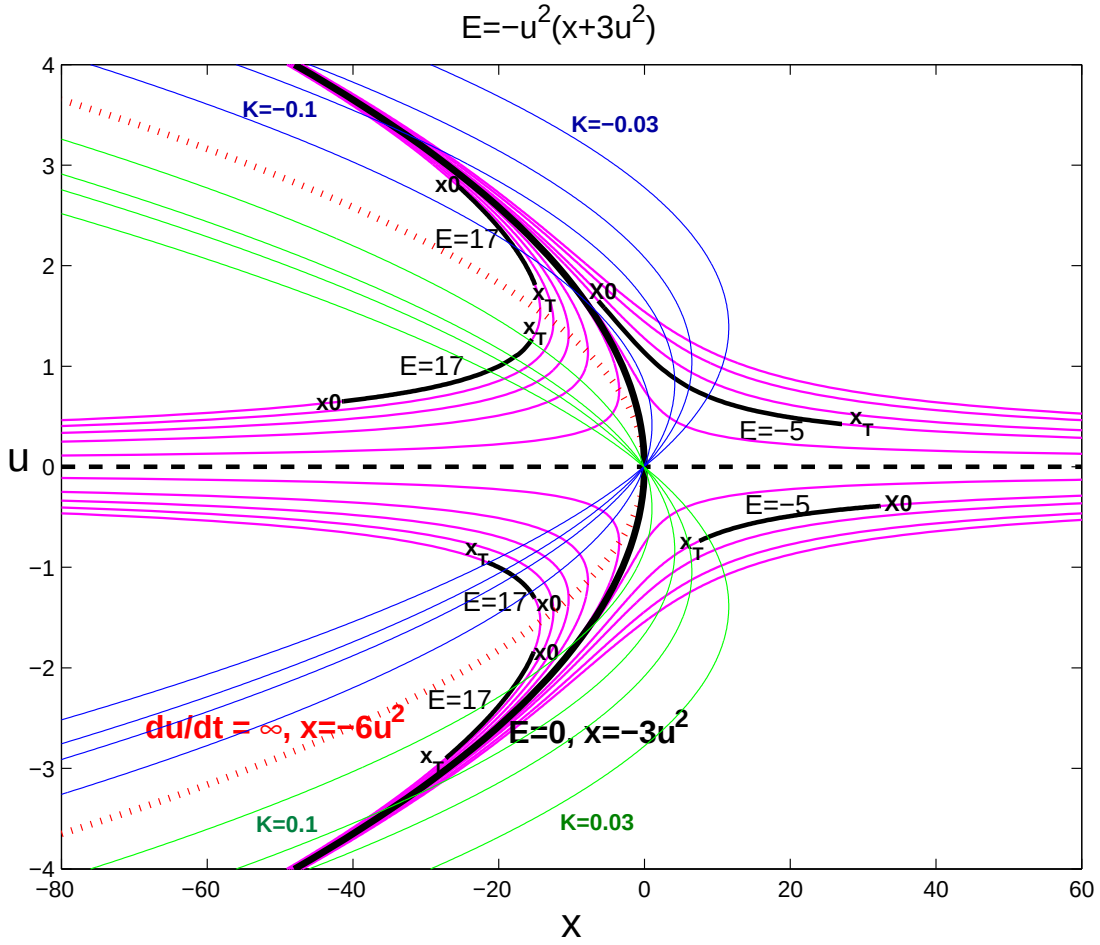


Figura 4.8: Trayectorias e isoclinas en el plano x-u

En las nuevas coordenadas las ecuaciones del movimiento quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 0 \\ \dot{u} &= -\frac{u^2}{W} \\ \dot{W} &= 2u - 24\frac{u^3}{W} \end{aligned}$$

y el hamiltoniano se transforma de la siguiente manera:

$$H = -\frac{1}{2}u^2(W - 6u^2),$$

Las soluciones halladas antes para el valor de $H = 0$ se recuperan: $u = 0$ y $W = 6u^2$.

Podemos reescribir las ecuaciones del movimiento como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 0 \\ W\dot{u} &= -u^2 \\ W\dot{W} &= 2uW - 24u^3 \end{aligned}$$

y, entonces, tenemos las ecuaciones en el plano (u, W) escritas de forma explícita como ecuaciones cuasilineales implícitas donde la matriz de coeficientes nos muestra la singularidad $W = 0$.

$$\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u^2 \\ 2uW - 24u^3 \end{bmatrix}$$

Es decir, aparece de nuevo la singularidad $W = 0$ que no nos permite despejar de la ecuación las derivadas de orden superior.

4.3. Un ejemplo de dinámica singular: frenado óptimo

4.3.1. Un modelo simple para el frenado óptimo

Un modelo simple que describe el frenado óptimo de un vehículo modelado como una única rueda viene gobernado por las siguientes ecuaciones de control propuestas en [21]:

$$\dot{x}_1 = u \tag{4.14}$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2), \tag{4.15}$$

donde la variable x_1 es proporcional al momento angular de la rueda y x_2 a la velocidad del vehículo v. La magnitud que se pretende minimizar es la distancia recorrida por el vehículo antes de frenar completamente, por tanto, la densidad lagrangiana ha de ser proporcional a la velocidad lineal:

$$L(x_1, x_2, u) \propto x_2. \tag{4.16}$$

El control u representa el par de fuerzas ejercido por el sistema de frenado sobre la rueda y la función $f(x_1, x_2)$ describe la fuerza de fricción debida al contacto del neumático con la carretera. Esta función f se construye en base a varios modelos y a distintas suposiciones sobre las características del neumático, estado de la carretera, etc. y es una función fuertemente no lineal en las variables $x_1,\ x_2$. Un ejemplo de esta función es la conocida como fórmula mágica de Pacejka [88] donde f toma la forma:

$$f(s) = D \sin\Big(C \arctan\big(Bs - A(Bs - \arctan\, Bs)\big)\Big), \tag{4.17}$$

siendo $s = rw/v - 1 = v_r/v = x_1/x_2 - (1+\rho)$; $\rho = mr^2/I$, donde r es el radio de la rueda, m su masa e I el momento de inercia.

Las condiciones iniciales del problema son $x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}$ y las finales han de ser cero para que se pare el vehículo en un tiempo desconocido a priori t_f:

$$x_1(t_f) = 0,\ x_2(t_f) = 0.$$

Algunos comentarios sobre el origen mecánico del modelo

Las ecuaciones de movimiento de una única rueda de acuerdo con los modelos de fricción carretera/rueda rugosa[1], son las siguientes [19], [20]:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= F_r \\ I\dot{w} &= -rF_r + u_\tau, \end{aligned}$$

donde v es la velocidad lineal de la rueda, w la angular, I es el momento de inercia respecto del eje de rotación perpendicular a la rueda, r el radio de la rueda, F_r la fuerza de fricción ejercida por la carretera sobre la rueda y u_τ, el control, es el par de fuerzas ejercidas por los frenos. La cuestión clave aquí es la elección adecuada de la función que modela la fuerza de fricción F_r. Un modelo dinámico para esta fuerza es la proporcionada por el modelo de fricción carretera/rueda rugosa que viene descrito por las ecuaciones

$$F_r = (\sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v_r)\, F_n,$$

donde F_n es la fuerza normal, $v_r = rw - v$ es la velocidad de deslizamiento, $\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2$ son parámetros y z es una variable auxiliar que cumple la ecuación diferencial auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v_r - \frac{\sigma_0 |v_r|}{g(v_r)} z, \\ g(v_r) &= \mu_c + (\mu_s - \mu_c) \exp^{-|v_r/v_s|^\alpha}. \end{aligned}$$

En la tabla 4.2 se muestran los parámetros utilizados.

El valor de $\alpha = 1/2$ reproduce bien la "fórmula mágica":

$$f(s) = D \sin\Big(C \arctan\big(Bs - A(Bs - \arctan\, Bs)\big)\Big),$$

donde, al igual que antes,

$$s = \frac{v_r}{v} = \frac{x_1}{x_2} - (1+\rho), \quad \rho = \frac{mr^2}{I}.$$

[1]Del inglés "lumped tire/road".

Cuadro 4.2: Descripción de los parámetros del modelo.

σ_0 :	rigidez de rugosidad ("lumped stiffness") longitudinal del caucho.
σ_1 :	empapamiento por rugosidad ("lumped damping") longitudinal del caucho.
σ_2 :	empapamiento relativo viscoso.
μ_c :	fricción de Coulomb normalizada.
μ_s :	fricción estática normalizada.
v_s :	velocidad relativa de Striebeck.
z :	estado de fricción interna.

Si redefinimos las variables como: $u = ru_\tau/I$ y $f(s) = F_r(v_r, v)/m$, donde se asume que la fuerza de fricción, F_r, sólo depende del coeficiente de deslizamiento s,

$$s = \frac{rw}{v} - 1 = \frac{v_r}{v},$$

esto es, suponemos un comportamiento "estático" para la fuerza de fricción, y si definimos las nuevas variables de estado $x_1,\ x_2$ como:

$$x_1 = v_r + (1+\rho)v, \quad x_2 = v,$$

se obtienen las ecuaciones anteriores (4.14) y (4.15):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= f(s), \end{aligned}$$

con $s = (x_1 - (1+\rho)x_2))/x_2 = x_1/x_2 - (1+\rho)$. Estas ecuaciones son las utilizadas en el diseño de los controladores para el sistema de frenado ABS.

Una aproximación de f comúnmente utilizada es $f(s) = a\sqrt{s} + bs$, que sigue siendo una función no lineal.

4.3.2. Resolución del problema de frenado óptimo con el algoritmo de ligaduras

El espacio de configuración es $P = \mathbb{R}^2$ con coordenadas (x_1, x_2). El espacio de controles está acotado, puesto que habrá un valor máximo del par de fuerzas que pueda ejercer el sistema sobre la rueda y, así, $C = [0, u_{\text{máx}}]$. Por tanto, el espacio total será $M = T^*P \times C \cong \mathbb{R}^4 \times [0, u_{\text{máx}}]$ con coordenadas (x_1, x_2, p_1, p_2, u). Las ecuaciones del movimiento y el funcional de acción serán:

$$\dot{x}_1 = u \tag{4.18}$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \tag{4.19}$$

$$S = \int_0^{t_f} x_2(t)\, dt. \tag{4.20}$$

El principio del máximo de Pontryagin establece que las trayectorias que minimizan S vienen dadas por las curvas que resuelven las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = u, & \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = f(x_1, x_2), \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 1 - p_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

y, por la condición de máximo,

$$H(x, p, u^*) = \max_{u \in C} H(x, p, u),$$

donde

$$H(x, p, u) = p_1 u + p_2 f(x_1, x_2) - L(x_1, x_2, u) = p_1 u + p_2 f(x_1, x_2) - x_2. \quad (4.21)$$

Como esta función es lineal en u y $\phi^{(1)} := \partial H / \partial u = p_1$, no van a existir puntos críticos de H, por lo que el máximo se alcanza en los extremos del intervalo $[0, u_{\text{máx}}]$, en $u = u_{\text{máx}}$ si $p_1 > 0$ o en $u = 0$ si $p_1 < 0$. La estrategia optimal de frenado es la siguiente:

$$u = \begin{cases} u_{\text{máx}} & \text{si } \phi^{(1)} = p_1 > 0 \\ 0 & \text{si } \phi^{(1)} = p_1 < 0 \end{cases}$$

Cuando se anule la ligadura primaria, $\phi^{(1)} = p_1 = 0$, entraremos en el contexto geométrico de los problemas optimales singulares discutidos previamente. Tendremos definida en este caso la subvariedad

$$M_1 = \{(x, p, u) \in M |\ \phi^{(1)} = p_1 = 0\},$$

donde deben permanecer las trayectorias mientras dure la condición $p_1 = 0$. Al hacer los cálculos nos encontramos que este sistema es singular y es necesaria la aplicación del algoritmo de ligaduras, ya que la matriz

$$W^{(1)} := \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0$$

es idénticamente nula. Con la notación utilizada al definir el algoritmo subregular, esta subvariedad M_1 coincide con $\Sigma_1 = \tau_M(C_0)$, ya que $E = C_0$, $E_{\text{reg}} = \varnothing$ y, entonces, $\tau_M(E_{\text{reg}}) = \Sigma_{0,\text{reg}} = \varnothing$. El campo vectorial dinámico queda de la forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_C &= u \frac{\partial}{\partial x_1} + f(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial p_2} + C \frac{\partial}{\partial u} = \\ &= u \frac{\partial}{\partial x_1} + f(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \left(1 - p_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \frac{\partial}{\partial p_2} + C \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Por tanto, existirán arcos extremales singulares si y sólo si existe C tal que $\Gamma_C(\phi^{(1)}) = 0$ en M_1:

$$\Gamma_C(\phi^{(1)}) = \dot{p}_1 = -p_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0,$$

lo nos define una ligadura secundaria

$$\phi^{(2)} := -p_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2),$$

de la que se deduce que o bien $\partial f/\partial x_1 = 0$ o bien $p_2 = 0$, pero esta última condición no puede darse, ya que entonces tendríamos
$0 = p_2 = \dot{p}_2 = (1 - p_2 \partial f/\partial x_2) = 1$. Por lo tanto, podemos reescribir esta segunda ligadura como

$$\phi^{(2)}(x_1, x_2) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2),$$

y la subvariedad definida por ella

$$\Sigma_2 = \{(x, p, u) \in M_1 |\ \phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 0\}.$$

Por tanto, cuando las trayectorias entren en la subvariedad M_1 para que permanezcan en ella han de entrar directamente a los puntos contenidos en Σ_2. Imponemos de nuevo la estabilidad de esta subvariedad,

$$\Gamma_C(\phi^{(2)}) = \Gamma_C \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) u + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) f,$$

esta ecuación podemos reescribirla como

$$\Gamma_C(\phi^{(2)}) = W^{(2)} u + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2} f, \tag{4.22}$$

donde

$$W^{(2)} := \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_1}.$$

Claramente, en los puntos donde $W^{(2)}$ sea invertible habrá "feedback" optimal que vendrá dado por $u = -\left(\partial \phi^{(2)}/\partial x_2\right) f/W^{(2)}$. Tenemos una primera subvariedad donde el campo vectorial es consistente, que denotamos por

$$\Sigma_{2,\text{reg}} = \left\{ (x, p, u) \in \Sigma_2 \,\middle|\, W^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \neq 0 \right\}.$$

Nótese que $\Sigma_{2,\text{reg}}$ corresponde al conjunto de puntos críticos no degenerados de f con respecto a la variable x_1.

Dentro del conjunto de puntos que anulan $W^{(2)}$ habrá solución en aquellos que anulen el resto de la ecuación (4.22), lo que nos define una nueva ligadura:

$$\phi^{(3)}(x_1, x_2) := \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2} f = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) \right] f(x_1, x_2)$$

y ésta a su vez, una nueva subvariedad

$$\Sigma_3 = \left\{ (x, p, u) \in \Sigma_2 \,\middle|\, W^{(2)} = \phi^{(3)} = 0 \right\}.$$

La situación es similar al paso anterior, pero ahora dentro de esta subvariedad Σ_3. Imponemos de nuevo la estabilidad de la ligadura y obtenemos

$$\Gamma_C(\phi^{(3)}) = W^{(3)} u + \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial x_2} f,$$

siendo de nuevo la expresión de $W^{(3)} := \partial \phi^{(3)} / \partial x_1$ y habrá "feedback" optimal si podemos despejar el control u, es decir, en aquellos puntos en los que no se anule $W^{(3)}$ que nos definen una subvariedad donde el campo vectorial es consistente:

$$\Sigma_{3,\mathrm{reg}} = \left\{ (x, p, u) \in \Sigma_3 \,\middle|\, W^{(3)} = \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial x_1} \neq 0 \right\}$$

El resto de puntos de esta subvariedad que anulan $W^{(3)}$ y $\Gamma_C(\phi^{(3)})$ nos definen de nuevo otra subvariedad, Σ_4, donde debemos seguir aplicando el algoritmo. La subvariedad final de ligaduras vendrá dada por la unión de las siguientes subvariedades:

$$M_\infty = \Sigma_{2,\mathrm{reg}} \cup \Sigma_{3,\mathrm{reg}} \cup \cdots \cup \Sigma_{k,\mathrm{reg}} \cup \cdots \tag{4.23}$$

obtenidas de forma recursiva partiendo de $\phi^{(2)} = \partial f / \partial x_1$ y siendo $\Sigma_1 = M_1$, definida anteriormente, para $k > 1$ con la siguiente familia de ecuaciones:

$$\Sigma_k := \left\{ (x, p, u) \in \Sigma_{k-1} \,\middle|\, W^{(k-1)} = \phi^{(k)} = 0 \right\} \tag{4.24}$$

$$\Sigma_{k,\mathrm{reg}} := \left\{ (x, p, u) \in \Sigma_k \,\middle|\, W^{(k)} \neq 0 \right\} \tag{4.25}$$

$$W^{(k)} := \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial x_1} \tag{4.26}$$

$$\phi^{(k+1)}(x_1, x_2) := \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial x_2} f, \tag{4.27}$$

y la condición de "feedback" optimal en la subvariedad $\Sigma_{k,\mathrm{reg}},\ k > 1$ es la siguiente

$$u = \frac{-1}{W^{(k)}} \left(\frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial x_2} \right) f.$$

Es de reseñar que la expresión para el feedback optimal singular fue obtenido por procedimientos *ad hoc* en [21] para $k = 2$ solamente.

Por otro lado, la condición singular de pertenencia a la subvariedad Σ_2 en el modelo de frenado estático corresponde a $f'(s) = 0$ si $f''(s) < 0$, esto es, el algoritmo se detiene en $k = 2$, de modo que el sistema se mueve de tal manera que la fuerza de fricción es máxima en todo instante, lo que constituye el principio de ingeniería del sistema ABS, "máxima fricción en todo instante".

Ejemplo de frenado optimal con una función de aproximación de la fórmula mágica

Una aproximación de la fórmula mágica, definida por la ecuación (4.17), es la siguiente:

$$f(s) = a\sqrt{s} + bs,$$

donde $s = x_1/x_2 - (1 + \rho)$ y $a,\ b$ y ρ son constantes. Las ligaduras primaria y secundaria son, respectivamente:

$$\phi^{(1)} = p_1,$$

$$\phi^{(2)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(\frac{1}{2a\sqrt{s}} + b\right)\frac{1}{x_2},$$

por lo tanto, la subvariedad donde puede haber trayectorias solución es

$$\Sigma_2 = \Big\{(x, p, u)|\ \phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 0\Big\} = \Big\{(x, p, u)|\ p_1 = 0,\ \sqrt{s} = \frac{-1}{2ab}\Big\}.$$

Calculamos $W^{(2)}$y se obtiene:

$$W^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{-1}{4as^{3/2}x_2^2} = \frac{-1}{4a(x_1 - x_2(1+\rho))^{3/2}x_2^{1/2}},$$

esta función no se anula nunca, por lo que tenemos aquí "feedback" optimal,

$$u = -\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x_2}\frac{f}{W^{(2)}} = \left(\frac{x_1 - 2sx_2}{4as^{3/2}x_2^3}\right)\frac{f}{W^{(2)}},$$

y la subvariedad donde el campo vectorial es consistente si $p_1 = 0$ es, simplemente, Σ_2.

Más adelante veremos varias simulaciones numéricas donde se contrastan las dos estrategias optimales: frenado "bang–bang" y frenado óptimo singular, observándose que esta segunda estrategia es más conveniente.

4.3.3. Un modelo vectorial de frenado óptimo

El modelo anterior se puede refinar si consideramos un vehículo de cuatro ruedas independientes con velocidades para cada rueda proporcionales a x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente y actuadores de freno independientes:

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = u_3, \quad \dot{x}_4 = u_4.$$

La velocidad del vehículo, x_5, cuya derivada va a ser una función no lineal que depende de las variables $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$, tendrá la forma:

$$\dot{x}_5 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

En este caso, no sólo queremos minimizar la distancia recorrida antes de parar, sino también el giro del coche, es decir, el torque total producido por la fricción en las cuatro ruedas sobre el coche. Supondremos que el valor sobre cada rueda de éste va a ser proporcional a $Rx_i - x_5$ para $i = 1, \ldots, 4$, por tanto, el momento de las fuerzas va a ser proporcional a
$Rx_1 + Rx_3 - 2x_5 - Rx_2 - Rx_4 + 2x_5 = R(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)$, por lo que podemos escribir el lagrangiano de la forma que mostramos a continuación:

$$L = \alpha x_5 + \beta(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)$$

y el hamiltoniano queda entonces:

$$H = p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 + p_4u_4 + p_5f - \alpha x_5 - \beta(x_1 + x_3 - x_2 - x_4).$$

Las ecuaciones del movimiento resultan ser:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = u_3, \quad \dot{x}_4 = u_4, \quad \dot{x}_5 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
\dot{p}_1 &= -p_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta, \quad \dot{p}_2 = -p_5\frac{\partial f}{\partial x_2} - \beta, \quad \dot{p}_3 = -p_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + \beta \\
\dot{p}_4 &= -p_5\frac{\partial f}{\partial x_4} - \beta, \quad \dot{p}_5 = -p_5\frac{\partial f}{\partial x_5} + \alpha.
\end{aligned}$$

La resolución de problema es completamente similar al modelo de una rueda. Primero, veamos que la variable p_5 no puede ser nula, porque entonces $\dot{p_5} = \alpha = 0$ y, puesto que α es no nulo, ya que entonces se perdería el sentido mecánico que hemos supuesto, ésta no puede anularse. Segundo, el máximo del hamiltoniano vuelve a alcanzarse en los extremos, por lo que la estrategia de frenado es similar al caso anterior. Finalmente, como

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = p_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = p_2, \quad \frac{\partial H}{\partial u_3} = p_3, \quad \frac{\partial H}{\partial u_4} = p_4, \tag{4.28}$$

en cuanto alguno de estos valores se anula entramos en el contexto de los problemas de control óptimo singulares. Si, por ejemplo, se anulase p_1 tendríamos que

la solución ha de permanecer en la subvariedad $M_1 = \{(x,p,u) \in M |\ p_1 = 0\}$, al imponer la estabilidad aparece la ligadura secundaria, puesto que de la primaria no puede obtenerse "feedback" optimal para u_1,

$$\phi^{(2)} := \dot{p_1} = \beta - p_5 \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Si ahora dividimos el campo vectorial en una parte correspondiente a la variable x_1 y otra al resto, es decir, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_{\text{resto}}$, donde $\Gamma_1 = \dot{x}_1 \partial/\partial x_1$ y $\Gamma_{\text{resto}} = \Gamma - \Gamma_1$, entonces la estabilidad de esta segunda ligadura queda como sigue:

$$\Gamma(\phi^{(2)}) = -p_5 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) u_1 + \Gamma_{\text{resto}}(\phi^{(2)}) = 0$$

y habrá "feedback" optimal en $\Sigma_2 = \{(x,p,u) \in M_1 |\ \phi^{(2)} = 0\}$ si

$$W^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \neq 0.$$

En los puntos donde esta función se anule debemos seguir aplicando el algoritmo como en el modelo anterior y, así, obtenemos, de manera completamente análoga, la subvariedad final de las ligaduras como la unión de subvariedades

$$M_\infty = \Sigma_{2,\text{reg}} \cup \Sigma_{3,\text{reg}} \cup \cdots \cup \Sigma_{k,\text{reg}} \cup \cdots \tag{4.29}$$

definidas de forma similar al caso anterior.

Si se anulan simultáneamente dos de las ecuaciones de (4.28), entonces se procede de manera idéntica, pero ahora tenemos un sistema vectorial. Supongamos que $p_1 = p_2 = 0$, entonces nos aparecen dos ligaduras secundarias:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(2)} &= \dot{p}_1 = -p_5 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta, \\ \phi_2^{(2)} &= \dot{p}_2 = -p_5 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \beta. \end{aligned}$$

Dividiendo el campo vectorial como antes, en una parte correspondiente a las dos variables donde no tenemos "feedback" óptimo y el resto, $\Gamma = \Gamma_{12} + \Gamma_{\text{resto}}$, la estabilidad de las ligaduras queda:

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi_1^{(2)}) &= -p_5 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) u_1 - p_5 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) u_2 + \Gamma_{\text{resto}}(\phi_1^{(2)}) = 0, \\ \Gamma(\phi_2^{(2)}) &= -p_5 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) u_1 - p_5 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) u_2 + \Gamma_{\text{resto}}(\phi_2^{(2)}) = 0, \end{aligned}$$

entonces habrá "feedback" óptimo en los puntos donde la matriz

$$W^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

sea invertible. En los puntos donde no lo sea, debemos imponer de nuevo la estabilidad obteniéndose, de nuevo, la subvariedad final de las ligaduras como la unión de las sucesivas subvariedades obtenidas al imponer la estabilidad de las ligaduras que van apareciendo.

4.3.4. Simulaciones numéricas

En esta sección mostramos los resultados de dos simulaciones numéricas que contraponen las dos estrategias de frenado óptimo distintas discutidas anteriormente: frenado bang-bang y frenado óptimo singular.

La primera se trata de un experimento de comparación de las estrategias de frenado utilizando soluciones optimales "bang-bang" y de frenado óptimo singular, es decir, en el primero comenzamos fuera de la subvariedad M_1 con $p_1 < 0$; el problema evoluciona hasta llegar a la subvariedad M_1, como ésta es singular, la trayectoria debe caer en la subvariedad Σ_2, que son los puntos de M_1 que, además, verifican que $\partial f/\partial x_1 = 0$. Se comprueba fácilmente que para el problema analizado obtenemos un "feedback" optimal en Σ_2. No hemos partido de condiciones iniciales para que la trayectoria cuando llegue a M_1 lo haga directamente a Σ_2. Suponemos que cuando llega a M_1 desplazamos instantáneamente la trayectoria a Σ_2 y despreciamos el coste de este tramo. El otro problema, que denominamos frenado óptimo singular, consiste en suponer que la trayectoria parte directamente desde la subvariedad Σ_2, que corresponde a un problema de control óptimo singular.

Utilizamos el modelo de fricción estática con la fórmula mágica que hemos visto anteriormente (4.17),

$$f(s) = D \sin\Big(C \arctan\big(Bs - A(Bs - \arctan\, Bs)\big)\Big),$$

con los siguientes valores de los parámetros $A = 0$, $B = 7$, $D = 0{,}7$ y el parámetro de "mojado", $C = 1 : 0{,}1 : 2$. Los datos iniciales son $v_0 = 15\text{m/s}$, $m = 250\text{Kg}$, $r = 0{,}25\text{m}$, $J = 1\text{Kg} \cdot \text{m}^2$, $u_T = 1500\text{Nm}$ y $\rho = 15{,}625$ que corresponden a valores iniciales de x_1 y x_2: $v_2 = 27{,}77$ y $v_1 = 461{,}68$.

En la siguiente tabla mostramos el parámetro de "mojado", C, el tiempo en segundos, t_sing, que tarda en detenerse el vehículo para la estrategia de frenado óptimo singular y el espacio en metros, s_sing, recorrido y los mismos datos para la estrategia de "bang–bang". La integración de las ecuaciones del movimiento se ha hecho en MatLab con un integrador "ode45".

C	t_sing (s)	s_sing (m)	t_bang (s)	s_bang (m)
1.1	3.94	53.3	4.01	56.84
1.2	3.94	53.3	4.05	58.21
1.3	3.94	53.3	4.21	60.57
1.4	3.94	53.3	4.32	64.03
1.5	3.94	53.3	4.57	68.61
1.6	3.94	53.3	4.83	74.49
1.7	3.94	53.3	5.07	81.64
1.8	3.94	53.3	5.34	90.32
1.9	3.94	53.3	5.61	100.50
2.0	3.94	53.3	6.02	112.43
2.1	3.94	53.3	6.43	125.91
2.2	3.94	53.3	6.86	141.16

Nótese que el tiempo de frenado y la distancia no depende de como esté de mojada la carretera en el frenado óptimo singular, ya que en cada momento el sistema se ajusta para frenar al "máximo" y, por tanto, la fuerza de frenado es siempre máxima, $f_{\text{máx}}$, independientemente de las condiciones de la calzada, y la estimación obtenida depende, entonces, del rango de aplicación de la fórmula mágica.

El segundo experimento consiste en la comparación de las estrategias de frenado utilizando "bang-bang" o frenado singular en el modelo de fricción estática con parámetros para la formula mágica $A = 0$, $B = 7$, $D = 0{,}7$. Los parámetros físicos son, al igual que antes: $m = 250\text{Kg}$, $r = 0{,}25\text{m}$, $J = 1\text{Kg} \cdot \text{m}^2$, $u_T = 1500\text{Nm}$ y $\rho = 15{,}625$.

Se comparan las distancias de frenado para el parámetro de "mojado" $C = 1{,}6$ con distintas velocidades iniciales v_0.

v_0 (Km/h)	t_sing (s)	s_sing (m)	t_bang (s)	s_bang (m)
54.00	2.19	15.35	2.66	24.14
57.60	2.27	17.40	2.89	27.44
61.20	2.43	19.59	3.11	30.91
64.80	2.56	21.98	3.21	34.62
68.40	2.69	24.58	3.43	38.54
72.00	2.81	27.31	3.65	42.66
75.60	2.97	30.07	3.75	46.97
79.20	3.19	33.11	3.97	51.50
82.80	3.31	36.28	4.19	56.23
86.40	3.44	39.59	4.41	61.17
90.00	3.56	43.05	4.49	66.33
93.60	3.69	46.64	4.69	71.70
97.20	3.81	50.37	4.89	77.21
100.80	3.97	54.13	5.09	82.99

4.4. El principio del máximo de Pontryagin para sistemas cuasilineales implícitos

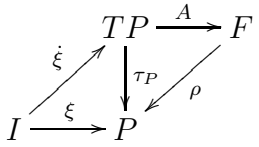
Finalmente, como una aplicación más teórica y general de las ideas expuestas hasta el presente en esta memoria, vamos a estudiar una generalización de gran interés en Teoría de Control Óptimo. Esta generalización consiste en suponer que la ecuación de estado no es una ecuación diferencial ordinaria en forma normal, sino que es una ecuación diferencial implícita (o DAE en la terminología propia de las aplicaciones a la ingeniería).

Este tipo de problemas emergen en multitud de problemas donde, junto a las ecuaciones dinámicas, habitualmente determinadas por leyes físicas fundamentales, se añaden condiciones o ligaduras introducidas al diseñar y concebir los sistemas o dispositivos específicos. Así, en problemas mecánicos habremos de considerar ligaduras holónomas o no, que convierten las ecuaciones de Euler–Lagrange que rigen la dinámica del sistema en sistemas implícitos en determinadas ocasiones. De la misma manera ocurre al tratar problemas de sistemas lineales, redes eléctricas, etc.

En lugar de un tratamiento lo más general posible, nos vamos a concentrar en ecuaciones de estado que sean cuasilineales y por ello utilizaremos la misma formulación que introdujimos en el capítulo 3, § 3.1, y que reproducimos brevemente de nuevo para comodidad del lector.

Denotaremos por P al espacio de estados o de configuraciones con coordenadas locales x^i, $i = 1, \ldots, n$. La variedad C, un fibrado afín sobre P, va a denotar el espacio total de controles con coordenadas locales (x^i, u^α), $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Finalmente, $\rho\colon F \longrightarrow P$ denotará un fibrado vectorial auxiliar sobre P, cuyas coordenadas en las fibras denotaremos por ξ^a, $a = 1, \ldots, r$, i.e.,

las coordenadas en el espacio total F serán (x^i, ξ^a), $i = 1, \ldots, n$, $a = 1, \ldots, r$. También necesitamos introducir una aplicación de fibrados vectoriales
$A\colon TP \longrightarrow F$ lineal a lo largo de las fibras del fibrado tangente
$\tau_P\colon TP \longrightarrow P$, cuyas coordenadas locales denotaremos por $(x^i, \dot{x}^i)$. Esto es, la aplicación A va a satisfacer $\rho \circ A = \tau_P$ y, en coordenadas locales va a tomar la forma siguiente: $\dot{x}^a \mapsto \xi^a = A_i^a(x)\dot{x}^i$.



Podemos tomar el pull-back de los fibrados TP y F a C a lo largo de la aplicación $\pi\colon C \longrightarrow P$ y obtendremos fibrados vectoriales $p_1\colon \pi^*(TP) \longrightarrow C$ y $q_1\colon \pi^*(F) \longrightarrow C$. En lo que sigue, siempre que no haya riesgo de confusión, vamos a denotar estos fibrados simplemente como TP y F de nuevo respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(TP) & \longrightarrow & TP \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_P} \\ C & \xrightarrow[\pi]{} & P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi^*(F) & \longrightarrow & F \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ C & \xrightarrow[\pi]{} & P \end{array}$$

La aplicación entre los fibrados vectoriales $A\colon TP \longrightarrow F$ se puede interpretar de esta forma como dependiente de los controles u, i.e., $\dot{x}^a \mapsto A_i^a(x, u)\dot{x}^i$.

La "fuerza" que controla el sistema se identifica con una sección f del fibrado F, i.e., $f\colon C \longrightarrow F$ tal que $\rho \circ f = \mathrm{id}_P$, en otras palabras, localmente vamos a tener $(x, u) \mapsto f^a(x, u)$.

Un sistema implícito de control va a consistir en un sistema de ecuaciones diferenciales implícitas de la forma descrita anteriormente y que, en el sistema local de coordenadas (x^i, u^a), tiene la forma:

$$A_i^a(x, u)\dot{x}^i = f^a(x, u), \quad a = 1, \ldots, \operatorname{rank} F.$$

Visto de una manera más intrínseca, si $\gamma\colon I \longrightarrow C$ es una curva en C, vamos a buscar curvas que satisfagan:

$$A(\dot{\gamma}(t)) = f(\gamma(t)), \quad \forall t \in I. \tag{4.30}$$

Diremos que el problema de control (4.30) es optimal si, además, buscamos soluciones γ que minimicen el funcional objetivo

$$S(x, u) = \int_0^T L(x, u)\, dt. \tag{4.31}$$

Estamos buscando, por tanto, aquellas soluciones γ del sistema implícito (4.30) que minimizan S y satisfacen condiciones en los extremos, como las siguientes:

$$pr_1 \circ \gamma(0) = x_0, \qquad pr_1 \circ \gamma(T) = x_T, \tag{4.32}$$

aunque, igual que en el caso estándar, podríamos considerar otras condiciones en los extremos sin mayores dificultades.

4.4.1. Principio de máximo de Pontryagin para sistemas de control óptimo cuasilineales implícitos

Utilizando la intuición ganada a partir de las consideraciones establecidas en el capítulo 2 en torno a las ecuaciones del principio de máximo de Pontryagin y los multiplicadores de Lagrange, podemos utilizar de manera heurística esta aproximación para obtener una primera aproximación a las ecuaciones dinámicas solución del problema. Nótese que no es posible aplicar el principio de máximo de Pontryagin a esta situación, ya que no tenemos una ecuación de control en forma normal. Así, resolver el problema de control optimal implícito dado por (4.30) con condiciones de contorno (4.32) y funcional objetivo (4.31) lleva a encontrar los extremales de funcional modificado

$$\mathbb{S}(x,u,\xi) = \int_0^T \left[L(x,u) + \xi_a \Phi^a(x,u)\right] dt, \tag{4.33}$$

donde hemos introducido las ligaduras $\Phi^a(x,u) = A_i^a(x,u)\dot{x}^i - f^a(x,u)$ y los multiplicadores de Lagrange ξ_a, que representan coordenadas a lo largo de las fibras del fibrado $F^* \longrightarrow C$. Una simple manipulación en el funcional $\mathbb{S}$ nos permite escribirlo en la forma equivalente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}(x,u,\xi) &= \int_0^T \Big[L(x,u) + \xi_a\big(A_i^a(x,u)\dot{x}^i - f^a(x,u)\big)\Big] dt = \\
&= \int_0^T \Big[\xi_a A_i^a(x,u)\dot{x}^i - \big(\xi_a f^a(x,u) - L(x,u)\big)\Big] dt = \\
&= \int_0^T \xi_a A_i^a(x,u) dx^i - H(x,u,\xi)\, dt,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

de donde obtenemos el hamiltoniano $H(x,u,\xi)$ de la teoría, que está dado por

$$H(x,u,\xi) = \xi_a f^a(x,u) - L(x,u),$$

en completa analogía con el hamiltoniano de Pontryagin de la teoría clásica.

Las variaciones de $\mathbb{S}$ se toman sobre todas las curvas diferenciables $\gamma(t) = (x(t), u(t), \xi(t))$ en F^* con extremos fijos x_0, x_T y las variaciones $\delta x^i(t)$ habrán, por tanto, de satisfacer que $\delta x^i(0) = 0$ y $\delta x^i(T) = 0$. Entonces, los puntos críticos de $\mathbb{S}$ satisfacen $\delta\mathbb{S}(\gamma) = 0$.

Tras los siguientes cálculos sencillos:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbb{S} &= \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha + \Big(A_i^a(x,u)\dot{x}^i - f^a(x,u)\Big)\delta\xi_a\right] dt + \\
&+ \int_0^T \xi_a\left(\frac{\partial A_i^a}{\partial x^j}\dot{x}^i\delta x^j + \frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{x}^i\delta u^\alpha + A_i^a(x,u)\delta\dot{x}^i - \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\delta x^i - \frac{\partial f^a}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha\right) dt = \\
&= \int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{x}^i - \xi_a\frac{\partial f^a}{\partial u^\alpha}\right)\delta u^\alpha + \Big(A_i^\alpha(x,u)\dot{x}^i - f^a(x,u)\Big)\delta\xi_a\right] dt + \\
&+ \int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} + \xi_a\frac{\partial A_j^a}{\partial x^i}\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\Big(\xi_a A_i^a(x,u)\Big) - \frac{\partial f^a}{\partial x^i}\right)\delta x^i + \frac{d}{dt}\Big(\xi_a A_i^a\delta x^i\Big)\right] dt = \\
&= \int_0^T \left[\left(\xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial u^\alpha}\right)\delta u^\alpha + \Big(A_i^a(x,u)\dot{x}^i - f^a(x,u)\Big)\delta\xi_a\right] dt + \\
&+ \int_0^T \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} + \xi_a\frac{\partial A_j^a}{\partial x^i} + \xi_a\frac{\partial A_j^a}{\partial x^i}\dot{x}^j - \dot{\xi}_a A_i^a(x,u) - \xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial x^j}\dot{x}^j - \xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\alpha - \right.\right. \\
&- \left.\left.\xi_a\frac{\partial f^a}{\partial x^i}\right)\delta x^i\right] dt + \xi_a A_i^a\delta x^i\Big|_0^T = \\
&= \int_0^T \left[\left(\xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial u^\alpha}\right)\delta u^\alpha + \Big(A_i^a(x,u)\dot{x}^i - f^a(x,u)\Big)\delta\xi_a\right] dt + \\
&+ \int_0^T \Big(- \dot{\xi}_a A_i^a(x,u) - \xi_a(F_A)_{ij}^a\dot{x}^j - \frac{\partial H}{\partial x^i} - \xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\alpha\Big)\delta x^i\, dt = 0,
\end{aligned}
$$

resultan las ecuaciones

$$A_i^a(x,u)\dot{x}^i = f^a(x,u) = \frac{\partial H}{\partial \xi_a} \tag{4.35}$$

$$A_i^a(x,u)\dot{\xi}_a + F_A(x,u)_{ij}^a\dot{x}^j\xi_a + \xi_a\dot{u}^\alpha\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \tag{4.36}$$

$$\xi_a\frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial u^\alpha}. \tag{4.37}$$

Podemos resumir la discusión anterior diciendo que las ecuaciones anteriores son las condiciones suficientes para que las curvas diferenciables en F^* sean extremales del funcional objetivo (4.31) y satisfagan la ecuación de control implícito (4.30).

Teorema 4.4.1 *Dada la curva C^∞, $\gamma(t) = (x(t), u(t))$, si existe un levantamiento $\widetilde{\gamma} = (x(t), u(t), \xi(t))$ de la curva γ en C al fibrado F^* satisfaciendo el conjunto de ecuaciones diferenciales implícitas:*

$$A_i^a(x,u)\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \xi_a} \tag{4.38}$$

$$A_i^a(x,u)\dot{\xi}_a + F_A(x,u)_{ij}^a \dot{x}^j \xi_a + \xi_a \dot{u}^\alpha \frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \tag{4.39}$$

$$\xi_a \frac{\partial A_i^a}{\partial u^\alpha}\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial u^\alpha}, \tag{4.40}$$

donde

$$H(x,u,\xi) = \xi_a f^a(x,u) - L(x,u)$$

es el hamiltoniano generalizado de Pontryagin y $x^i(0) = x_0$, $x^i(T) = x_T$, entonces γ es una solución del sistema implícito

$$A_i^a(x,u)\dot{x}^i = f^a(x,u)$$

y un extremal del funcional objetivo

$$S(x,u) = \int_0^T L(x,u)\, dt.$$

Observamos ahora que, aunque $A_i^a(x)$ dependiese sólo de x y $\partial^2 H/\partial u^2$ fuese invertible, no podríamos garantizar la existencia y/o unicidad de las soluciones de dichas ecuaciones diferenciales implícitas. Pondremos el conjunto de estas ecuaciones implícitas de una forma que nos ayude a discutir estas cuestiones.

Tal como hicimos en el caso estándar donde recurrimos a una formulación presimpléctica, haremos lo mismo.

4.4.2. Descripción presimpléctica del principio de máximo de Pontryagin para problemas cuasilineales implícitos

Si nos fijamos de nuevo en la expresión del funcional objetivo extendido $\mathbb{S}$, (4.33), como aparece en la ecuación (4.34), podemos observar que se puede escribir, en analogía con § 2.4.5, de una manera más intrínseca como:

$$\mathbb{S}(x,u,\xi) = \int \theta_A - H\, dt.$$

Para ser más precisos, si $\gamma(t) = (x(t), u(t), \xi(t))$ es un curva C^∞ en F^*, entonces,

$$\mathbb{S}(\gamma) = \int_\gamma \theta_A - \int_0^T H\big(\gamma(t)\big)\, dt = \int_0^T \big(\gamma^*\theta_A - H(\gamma)\big)\, dt,$$

puesto que $\theta_A = A_i^a(x,u)\xi_a dx^i$. Entonces, podemos computar $d\mathbb{S}$ de una forma distinta a la manera en que lo hicimos en la sección anterior.

Si denotamos por $\Omega = \Omega_{(x_0;x_T)}(F^*)$ el espacio de aplicaciones C^∞, $\widetilde{\gamma}\colon [0,T] \longrightarrow F^*$ tal que $\rho(\widetilde{\gamma}(0)) = x_0$ y $\rho(\widetilde{\gamma}(T)) = x_T$, un vector tangente al espacio Ω en la curva $\widetilde{\gamma}$ es una clase de equivalencia de curvas $\widetilde{\sigma}\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \Omega$ que tienen un contacto de primer orden y pasan por $\widetilde{\gamma}$, i.e., $\widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{\gamma}$. En la terminología del capítulo 2, § 2.4, $\widetilde{\sigma}$ es una variación de la curva $\widetilde{\gamma}$ y el vector tangente es una variación infinitesimal de $\widetilde{\gamma}$. Podemos pensar que la curva $\widetilde{\sigma}$ define una aplicación $\widetilde{\sigma}\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,T] \longrightarrow F^*$ definida como $\widetilde{\sigma}(s,t) = [\widetilde{\sigma}(s)](t)$. Por lo tanto, el vector tangente en $\widetilde{\gamma}$ va a ser un campo vectorial a lo largo de la curva $\widetilde{\gamma}$ definido por la expresión

$$U(t) = \frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\sigma}(s,t)\bigg|_{s=0}.$$

Por lo que podemos pensar en U como una aplicación,

$$U\colon [0,T] \longrightarrow TF^*$$

tal que

$$U(t) \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}F^*$$

y

$$\rho_*(\widetilde{\gamma}(0))U(0) = \rho_*(\widetilde{\gamma}(T))U(T) = 0 \tag{4.41}$$

que traslada las condiciones de contorno en propiedades de U.

El campo vectorial U a lo largo de $\widetilde{\gamma}$ puede extenderse a un entorno tubular de $\widetilde{\gamma}$ y será denotado como $\widetilde{U}$. Denotaremos el flujo de $\widetilde{U}$ por ϕ_s, i.e.,

$$\frac{d}{dt}\phi_s = \widetilde{U}\circ\phi_s.$$

Nótese que las curvas en $\widetilde{\gamma}(t)$ para un t fijo definidas por $\widetilde{\gamma}(s,t)$ y $\phi_s(t)$ tienen un contacto de primer orden debido a que definen el mismo vector tangente $U(t)$.

Ahora podemos calcular la diferencial de $\mathbb{S}$ como,

$$d\mathbb{S}(\widetilde{\gamma})(U) = \frac{d}{ds}\mathbb{S}(\phi_s)\bigg|_{s=0}, \tag{4.42}$$

donde U es un vector tangente al espacio de caminos Ω en el espacio total $F^* \longrightarrow P$ con las condiciones de contorno (4.41).

Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} d\mathbb{S}(\gamma)(U) &= \frac{d}{ds}\mathbb{S}(\phi_s)\Big|_{s=0} = \int_0^T \frac{d}{ds}\Big(\phi_s^*\theta_A - H(\phi_s)\Big)\Big|_{s=0} dt = \\ &= \int_0^T \widetilde{\gamma}^*(\mathcal{L}_U\theta_A - \mathcal{L}_U H)\, dt = \\ &= \int_0^T \widetilde{\gamma}^*\Big(i_U d\theta_A + d(i_U\theta_A) - i_U dH\Big)\, dt = \\ &= \int_0^T i_U(i_{\dot{\widetilde{\gamma}}}\Omega_A - dH)(\widetilde{\gamma}(t))\, dt + i_U\theta_A\Big|_0^T = \\ &= \int_0^T \Big[\Omega_A(\widetilde{\gamma}(t))(\dot{\widetilde{\gamma}}(t), U(t)) - dH(\widetilde{\gamma}(t))(U(t))\Big]\, dt + \qquad (4.43) \\ &+ \Big\langle \xi, \rho_*(\gamma(T))U(\gamma(T))\Big\rangle - \Big\langle \xi, \rho_*(\gamma(0))U(\gamma(0))\Big\rangle. \qquad (4.44) \end{aligned}$$

Pero $\langle \xi, \rho_*(\gamma(T))U(\gamma(T))\rangle = \langle \xi, \rho_*(\gamma(0))U(\gamma(0)\rangle = 0\ \forall \xi$ y, por lo tanto, la curva $\widetilde{\gamma}(t)$ es un extremal de $\mathbb{S}$ en el espacio Ω si y sólo si satisface la ecuación:

$$i_{\dot{\widetilde{\gamma}}}\Omega_A = dH \circ \widetilde{\gamma}$$

o, de forma equivalente, $\widetilde{\gamma}$ es una curva integral de un campo vectorial Γ en F^* que satisface la ecuación dinámica:

$$i_\Gamma \Omega_A = dH. \qquad (4.45)$$

Por lo tanto, hemos probado lo siguiente:

Teorema 4.4.2 *Las curvas integrales del sistema hamiltoniano presimpléctico, definido por la 2–forma presimpléctica Ω_A en el espacio total F^* y por la función hamiltoniana generalizada de Pontryagin H, son trayectorias extremales C^∞ para un sistema de control óptimo implícito.*

Nota. Las ecuaciones (4.38)-(4.40) se pueden derivar de nuevo simplemente expandiendo Ω_A y dH y computando $i_\Gamma\Omega_A = dH$ en coordenadas locales.

Nota. El sistema $i_\Gamma\Omega_A = dH$ es un sistema cuasilineal en F^* de la forma:

$$\widetilde{A}_z(\dot{z}) = \widetilde{f}(z), \qquad (4.46)$$

donde $z \in F^*$; la aplicación lineal entre fibrados vectoriales $\widetilde{A}(z)\colon TF^* \longrightarrow T^*F^*$ está definida por $\widetilde{A}(z)(V) = \Omega_A(z)(V, \cdot)$, $\forall V \in T_zF^*$ y $\widetilde{f}(z) = dH(z)$; i.e., $\widetilde{f}\colon F^* \longrightarrow T^*F^*$ es la sección definida por dH.

4.4.3. Una generalización de los fibrados cotangentes

Como vimos en la presentación estándar de los problemas de control optimal, los multiplicadores de Lagrange se identifican de manera natural con el momento conjugado de las variables x^i, entonces el problema se sitúa en el contexto de la geometría del fibrado cotangente T^*P acompañado de su estructura simpléctica canónica ω_P. En el caso del problema de control óptimo implícito (4.30) propuesto anteriormente, las fuerzas toman valores en F, por lo tanto, los multiplicadores de Lagrange que tenemos que introducir deben ser necesariamente elementos del dual de F, el fibrado dual $\rho^*\colon F^* \longrightarrow P$. El espacio total del fibrado dual F^* va a jugar el papel del fibrado cotangente T^*P en la teoría ordinaria. La similitud va mucho más allá en el sentido de que existe una 2–forma natural cerrada en F^* que juega el papel de la forma simpléctica canónica ω_P. La describimos primero.

La 1–forma canónica θ_A en F^*

Vamos a denotar los puntos en $\rho^*\colon F^* \longrightarrow P$ como $(x, u; \xi)$ y las coordenadas lineales a lo largo de las fibras como ξ_a. Éstas se definen, por ejemplo, eligiendo el dual e^a del sistema de referencia local e_a utilizado para definir ξ^a en F, i.e., $\xi = \xi_a e^a(x, u)$.

Tenemos la aplicación natural $T\rho^*\colon TF^* \longrightarrow TP$. Como

$$T\rho^*(x, u; \xi)\colon T_{(x,u;\xi)}F^* \longrightarrow T_xP,$$

entonces si $U \in T_{(x,u;\xi)}F^*$,

$$T\rho^*(x, u; \xi)(U) \in T_xP$$

y definimos θ_A por la fórmula:

$$\theta_A(x, u; \xi)(U) = \Big\langle \xi, A_{(x,u)}\Big(T\rho^*(x, u; \xi)(U)\Big)\Big\rangle, \qquad \forall U \in T_{(x,u;\xi)}F^*. \tag{4.47}$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en la parte derecha de la ecuación (4.47) denota la dualidad natural entre F y F^*. En coordenadas locales la 1–forma canónica θ_A resulta de nuevo:

$$\theta_A = A_i^a(x, u)\xi_a dx^i.$$

Definimos ahora la 2–forma canónica Ω_A en F^* asociada a A como se hace en el fibrado cotangente

$$\Omega_A = -d\theta_A. \tag{4.48}$$

Véase que Ω_A es no degenerada y, por lo tanto, simpléctica, si y sólo si A es un isomorfismo de fibrados vectoriales. Esto se ve claramente al escribir Ω_A en coordenadas locales:

$$\Omega_A = A_i^a(x, u)dx^i \wedge d\xi_a + F_A(x, u)_{ij}^a \xi_a dx^i \wedge dx^j,$$

donde

$$F_A(x,u)^a_{ij} = \partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i$$

es la "curvatura" de A. Entonces, si la aplicación entre fibrados A^a_i es invertible Ω_A es no degenerada. Recíprocamente, si analizamos $\ker \Omega_A$ encontramos que se anula sólo si $\ker A = 0$ y la afirmación previa queda probada.

4.4.4. Algoritmo de las ligaduras para el problema de control óptimo implícito

Como sabemos bien, por la discusión de sistemas implícitos generales, realizada en el capítulo 3, la ecuación del sistema presimpléctico (4.45) o en la forma equivalente como una ecuación cuasilineal singular, $\widetilde{A}(z)\dot{z} = \widetilde{f}(z)$, requiere un estudio cuidadoso de su consistencia. Reproduciremos de forma breve el algoritmo de ligaduras para sistemas cuasilineales realizado en las secciones 3.1.4 y 3.1.5. Definiremos una familia de subvariedades M_k recursivamente como:

$$M_0 = F^*; \quad M_k = \{z \in M_{k-1} |\ \widetilde{f}_{k-1}(z) \in \operatorname{Im} \widetilde{A}_{k-1}(z)\},$$

donde $\widetilde{f}_{k-1} = \widetilde{f}|_{M_{k-1}}$ es una sección del fibrado $T^*_{M_{k-1}}F^*$ subfibrado de T^*F^*, definido como la restricción de T^*F^* a M_{k-1}. De forma similar $\widetilde{A}_{k-1}\colon TM_{k-1} \longrightarrow T^*F^*$ es la restricción de la aplicación $\widetilde{A}\colon TF^* \longrightarrow T^*F^*$ a $TM_{k-1} \subset TF^*$. La secuencia de subconjuntos

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq M_{k+1} \supseteq \cdots$$

se estabiliza si $\exists\, r \in \mathbb{N}$ tal que $M_r = M_{r+n},\ \forall n \geq 0$. Bajo unas condiciones de regularidad similares a las del Teorema 3.1.3 obtendremos una subvariedad diferenciable. Tal subvariedad se llamará la subvariedad final de las ligaduras y será denotada por M_∞. En esta subvariedad existirá siempre al menos un campo vectorial Γ_∞ tal que

$$i_{\Gamma_\infty}\Omega_\infty = dH_\infty,$$

donde $\Omega_\infty = \Omega_A|_{M_\infty}$ y $H_\infty = H|_{M_\infty}$. Diremos que las condiciones de los extremos (4.41) son consistentes (o compatibles) si $x_0, x_T \in M_\infty$. En tal caso, esto significa que pueden existir soluciones al problema de control óptimo satisfaciendo las condiciones de contorno. Si no es así, el problema no tendrá soluciones en sentido estricto, aunque todavía tenemos la posibilidad de considerar curvas que estén cercanas a las soluciones la mayor parte del tiempo y, aunque no minimizen estrictamente el funcional objetivo, la desviación de ellas respecto al mínimo local obtenido por soluciones contenidas en M_∞ estará dentro de un rango de tolerancia. Este tipo de soluciones se llaman controles baratos (cheap controls), controles cuasioptimales o "turnpikes" en la literatura.

Sistemas de control óptimo generalizados planos y sistemas LQ generalizados

Supongamos que nuestro sistema generalizado de control óptimo está descrito por la ecuación

$$A_i^a(x)\dot{x} = f^a(x,u),$$

donde $F_A = 0$, i.e.,

$$\frac{\partial A_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j^a}{\partial x^i} = 0.$$

Diremos en este caso que nuestro sistema es plano. En esta situación las ecuaciones de la dinámica adquieren una forma sencilla, ya que

$$\Omega_A = -d\theta_A = A_i^a(x) d\xi_a \wedge dx^i$$

y, entonces, la ecuación de evolución presimpléctica simplemente se convierte en:

$$\begin{aligned} A_i^a(x)\dot{x} &= f^a(x,u), \\ A_i^a(x)\dot{\xi}_a &= -\xi_a \frac{\partial f^a}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

junto a la ligaduras primarias clásicas $\phi_a^{(1)} = \partial H/\partial u^a$. Entonces, si $\partial^2 H/\partial u^a \partial u^b$ es invertible podremos obtener un "feedback" optimal y nuestras ecuaciones se reducirán a las ecuaciones implícitas:

$$A_i^a(x)\dot{x}^i = \widetilde{f}^a(x,\xi), \quad A_i^a(x)\dot{\xi}_a = -\xi_a \frac{\partial \widetilde{f}^a}{\partial x^i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x^i},$$

que a su vez habrá que analizar aplicando el algoritmo de ligaduras general para ecuaciones cuasilineales implícitas.

En particular, podemos considerar los sistemas LQ generalizados, donde ahora la matriz A es constante y las ecuaciones tienen la forma:

$$\begin{aligned} A \cdot \dot{x} &= B \cdot x + C \cdot u \\ L &= \frac{1}{2} x^T P x + x^T Q u + \frac{1}{2} u^T R u. \end{aligned}$$

En este tipo de problemas tendremos que la ecuación para los "coestados" será:

$$A_i^a \dot{\xi}_a = -\xi_a B_i^a + P_{ij} x^j + Q_{i\alpha} u^\alpha$$

y si $\partial^2 H/\partial u^\alpha \partial u^\beta = R_{\alpha\beta}$ es invertible, obtenemos el "feedback" optimal:

$$u^\beta = R^{\alpha\beta} C_\alpha^a \xi_a - R^{\alpha\beta} Q_{i\alpha} x^i,$$

con $R^{\alpha\beta}R_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$. Las ecuaciones hamiltonianas presimplécticas resultan:

$$\begin{aligned} A^a_i \dot{x}^i &= \widetilde{B}^a_i x^i + \widetilde{C}^{ab}\xi_b \\ A^a_i \dot{\xi}_a &= \widetilde{Q}_{ij}x^j - \widetilde{B}^b_i \xi_b, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{B}^a_i &= B^a_i - C^a_\beta R^{\alpha\beta} Q_{i\alpha} \\ \widetilde{C}^a_\beta &= C^a_\beta R^{\alpha\beta} C^b_\beta \\ \widetilde{Q}_{ij} &= P_{ij} - Q_{i\beta} R^{\alpha\beta} Q_{j\alpha}, \end{aligned}$$

exactamente como las ecuaciones (1.11) y (1.12) excepto por el prefactor A que aparece ahora en las derivadas. El sistema hamiltoniano presimpléctico puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{B} & \widetilde{C} \\ \widetilde{Q} & -\widetilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

y podemos transformarlo en una ecuación de tipo Ricatti utilizando el "ansatz" $\xi = KAx$. Tras las manipulaciones obvias, obtenemos la ecuación de Ricatti implícita:

$$A\dot{K}A = \widetilde{Q} - AK\widetilde{B} - \widetilde{B}KA - AK\widetilde{C}AK. \tag{4.49}$$

Nótese que las soluciones estacionarias, que en los sistemas LQ ordinarios corresponden a la situación $\dot{K} = 0$, corresponden ahora simplemente a $A\dot{K}A = 0$.

Capítulo 5

Conclusiones y problemas abiertos

5.1. Conclusiones

A lo largo de la tesis se han discutido los siguientes problemas de Teoría de Control Óptimo:

1. Se ha realizado el análisis directo de las condiciones para que una curva en el espacio de estados y controles sea un punto crítico del funcional objetivo restringido por las condiciones diferenciales impuestas por las ecuaciones de control. Este análisis se ha hecho en el marco analítico del análisis global considerando variedades de Hilbert de curvas y las correspondientes generalizaciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange. Los resultados obtenidos reproducen las conocidas condiciones del teorema del máximo de Pontryagin para extremales normales con condiciones de regularidad apropiadas.

2. La derivación intrínseca de las condiciones de Euler-Lagrange para este funcional ha permitido obtener directamente las ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas extremales en forma intrínseca en la formulación presimpléctica de la teoría.

3. Las condiciones de regularidad de los puntos del espacio total de la Teoría de Control Óptimo, estados, momentos y controles, se han analizado desde un punto de vista geométrico caracterizándose en términos de singularidades de aplicaciones. Se ha estudiado en detalle el sistema de control óptimo de tipo frunce demostrando su controlabilidad global.

4. Se ha estudiado el problema de los puntos singulares de los problemas de control óptimo en el marco general de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Implícitas. Se ha planteado el problema de la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones implícitas definidas por un problema de control óptimo a través de puntos singulares. Para el análisis de dicho problema se ha

utilizado el algoritmo de ligaduras en su formulación global que, tras sucesivas particularizaciones, se ha adaptado finalmente al problema de control óptimo singular. En este proceso se han obtenido sucesivamente las formulaciones del algoritmo de ligaduras de Marmo, Mendella y Tulzczjev [84], de Rabier y Rheinbold [91], de Gràcia y Pons [49, 50], de Sniatycki [97] y, eventualmente, de Ibort y Marín [57]. Se presenta finalmente un formalismo hamiltoniano extendido del algoritmo de ligaduras muy conveniente para el cálculo y manipulación de dichos sistemas.

5. Se ha analizado con detalle el problema de los sistemas singulares LQ. Se ha adaptado el algoritmo de ligaduras a este caso y se ha formulado un algoritmo numérico lineal que utiliza en su formulación recursos del álgebra lineal numérica, tales como la descomposición en valores singulares, el rango numérico y el núcleo numérico. Este algoritmo realiza también la clasificación de las ligaduras del problema en primera y segunda clase. Se muestra evidencia empírica de las propiedades de estabilidad numérica del algoritmo propuesto.

6. Se presentan diversos ejemplos que ilustran o sirven de aplicación de las ideas y resultados descritos en la memoria. En particular se han estudiado analíticamente sistemas singulares de rango no constante como el sistema del frunce mencionado anteriormente y el sistema de frenado óptimo en modelos estáticos de fricción, obteniéndose, en este último caso, las condiciones suficientes de estabilidad y las ecuaciones que deben verificar los arcos singulares que se corresponden con las estrategias de frenado de los sistemas ABS.

7. La combinación de las técnicas analíticas conducentes a las ecuaciones del principio de máximo de Pontryagin desarrolladas en el capítulo 2, junto al algoritmo general de ligaduras analizado en el capítulo 3, permiten resolver una formulación más general de los problemas de control óptimo consistente en suponer que la ecuación de control es, a su vez, una ecuación diferencial implícita cuasilineal. Se obtienen, en este caso, las ecuaciones diferenciales implícitas que deben satisfacer las curvas extremales, mostrando de nuevo su naturaleza presimpléctica. Se caracterizan analítica y geométricamente los puntos regulares y se formula el algoritmo de ligaduras que determina la existencia y unicidad de soluciones a través de puntos singulares para estos sistemas.

5.2. Algunos problemas abiertos

En el desarrollo de las investigaciones conducentes a esta tesis han surgido diversos problemas, que o bien no han sido resueltos o sólo han sido resueltos parcialmente y que se han englobado en la categoría de "problemas abiertos" y su discusión no se ha incluido en la memoria . Enumeramos a continuación una selección de aquellos que resultan más relevantes en el contexto de esta tesis y que seguramente determinarán de manera importante la investigación futura que se derivará de este trabajo.

1. Extensión, en el sentido ya apuntado en el texto, del algoritmo de ligaduras para ecuaciones diferenciables implícitas no completamente reducibles.

2. En el contexto del problema anterior, habiéndose obtenido ya resultados parciales, se puede enunciar la siguiente conjetura [Cendra 2004]: *Es posible extraer la parte integrable de una ecuación diferencial ordinaria implícita real algebraica a través de una secuencia finita bien definida de pasos del algoritmo de ligaduras general combinado con blow ups algebraicos.*

3. Determinar la estabilidad numérica del algoritmo de ligaduras para sistemas singulares LQ.

4. Extensión del algoritmo de ligaduras para sistemas singulares LQ a sistemas LQ dependientes del tiempo.

5. Clasificar las singularidades genéricas estables de los problemas de control óptimo.

6. Probar la conjetura: *El algoritmo recursivo subregular determina la parte integrable de los sistemas de control óptimo singulares estables genéricos.*

7. Caracterización de los minimizadores anormales de la teoría de Pontryagin en el contexto del análisis global establecido en la memoria y los correspondientes minimizados singulares.

8. Adaptación y extensión de la Teoría de Perturbaciones Singulares al estudio de sistemas de control óptimo singular.

Finalmente, hay todo un catálogo de problemas pendientes de un análisis más detallado desde el punto de vista global presentado en esta memoria, como son los problemas del análisis de las soluciones de la dinámica, su estabilidad, propiedades asintóticas, etc.

Bibliografía

[1] R. Abraham, J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Benjamin-Cummings, Reading, MA, 2nd edition (1978).

[2] R. Abraham, J. E. Marsden, T. S. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, New-York-Heidelberg-Berlin (1988).

[3] A. A. Agrachev, R. V. GamKrelidze. *Simplectic Geometry for Optimal Control, in Nonlinear Controllability and Optimal Control*. Ed. H.J. Sussmann. Marcel & Dekker Inc., N. Y. 263-277 (1990).

[4] A. V. Arutyunov, S. M. Aseev. *The maximum principle in optimal control problems with phase constraints. Nondegeneracy and stability*. Russian Acad. Sci. Dokl. Math. **49**, 38-42 (1994).

[5] V. I. Arnol'd. *Les méthodes mathématiques de la Mécanique classique*. Éditions Mir, Moscou (1976).

[6] V. I. Arnol'd. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag, Berlin (1983).

[7] V. I. Arnol'd, A. Varchenco, S. Goussein-Zadé. *Singularités des Applications Différentiables*. Vol 1. Éditions Mir, Moscou (1986).

[8] D. J. Bell, D. H. Jacobson. *Singular Optimal Control Problems*. New York Academic Press, London (1975).

[9] A. M. Bloch, P. E. Crouch. *Optimal control, optimization and analytical mechanics*. Mathematical Control Theory. J. Baillieul and J. C. Willems Eds., Springer-Verlag, 265-321 (1999).

[10] K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold. *Numerical solutions of initial value problems in differential-algebraic equations*. North-Holland, Amsterdam (1989).

[11] R. W. Brockett. *Systems theory on group manifolds and coset spaces*. SIAM J. Control Optim., **10**, 265-284 (1970).

[12] R. W. Brockett. *Lie theory and control systems defined on spheres*. SIAM J. Appl. Math., **25**, 213-225 (1973).

[13] R. W. Brockett. *Lie Algebras and Lie groups in Control Theory*. Geometrical Methods in System Theory. D. Q. Mayne, R. W. Brockett Eds., Reidel, Drodrechet, 43-82 (1973).

[14] R. W. Brockett. *Feedback invariants for nonlinear systems*. Proceedings of IFAC Congress, Helsinki (1978).

[15] R. W. Brockett. *Non linear Control theory and differential geometry*. Proceedings of the ICM Warszawa, august 16-24, 1357-1368 (1983).

[16] S. L. Campbell. *Singular systems of differential equations*. Pitman, San Francisco (1980).

[17] S. L. Campbell.*Singular systems of differential equations II*. New york. Pitman (1982).

[18] D. P. L. Castrigiano, S. A. Hayes. *Catastrofe Theory*. Addison–Wesley Publishing. Co. (1993).

[19] C. Canudas-de-Witt, H. Olsson, K. J. Astrom, P. Lisdenky. *A new model for control of systems with friction*. IEEE Trans. Automatic Control, **40** (3), 419-425 (1995).

[20] C. Canudas-de-Witt, P. Tsiotras. *Dynamic tire friction models for vehicle traction control*. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix AZ, 3746-3751 (1999).

[21] C. Canudas-de-Witt, P. Tsiotras, X. Claeys, J. Yi, R. Horowitz. *Friction tire/road modeling, estimation and optimal braking control*. Nonlinear and Hybrid systems in automotive control. Ed. R. Johnson & A. Rantzer. Springer-Verlag, London, 147-209 (2003).

[22] J. F. Cariñena, C. López, E. Martínez. *A new approach to the converse of Noether's Theorem*. J. Phys. A: Math.& Gen., **22**, 4777-4486 (1989).

[23] J. F. Cariñena. *Theory of singular Lagrangians*. Fortschr. Phys. **38**, 641-679 (1990).

[24] J. F. Cariñena, C. López, E. Martínez. *Sections along a map applied to higher-order Lagrangian Mechanics*. Acta Apli. Mathematicae, **25**, 127-151 (1991).

[25] J. F. Cariñena, A. Ibort, G. Marmo, G. Morandi. *Dynamical systems*. En preparación (2004).

[26] H. Cendra, M. Delgado, M. Ectchetury, A. Ibort. *A desingularization algorithm for singular DAE's*. En preparación (2004).

[27] L. O. Chua, H. Oka. *Normal formas for constrained nonlinear differential equations. Part I: theory*. IEEE Trans. Circuits Syst. **35**, 881-901 (1988).

[28] D. J. Clements, B. D. O. Anderson. *Singular Optimal Control: The Linear-Quadratic Problem*. Lect. Notes Control Inf. Sciences. Vol. **5**, Springer-Verlag, Berlin (1978).

[29] J. Cortés Monforte, *Geometric, Control and numerical aspects of Nonholonomic Systems*. Lect. Notes. in Maths. Vol. **1793**, Springer-Verlag (2002).

[30] M. Crampin, W. Sarlet, F. Cantrijn. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99**, 565-587 (1986).

[31] P. E. Crouch, A. J. van der Schaft, *Variational and Hamiltonian Control Systems*. Lect. Notes in Control and Inf. Theory, Vol. **101**, Springer-Verlag (1987).

[32] L. Dai. *Singular Control Systems*. Lect. Notes Control Inf. Sciences. Vol. **118**, Springer (1989)

[33] M. Delgado-Téllez, A. Ibort. *On the Geometry and Topology of Singular Optimal Control Problems and their solutions*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, a suplement volume, 223-333 (2003).

[34] M. Delgado-Téllez, A. Ibort. *A Panorama of Geometrical Optimal Control Theory*. Extracta Mathematicae, Vol. **18** (2), 129-151 (2003).

[35] M. Delgado-Téllez, A. Ibort. *Singular Optimal Control: A geometric approach*. En preparación (2004).

[36] M. Delgado-Téllez, A. Ibort. *Implicit Optimal Control: a maximum principle*. En preparación (2004).

[37] P. A. M. Dirac. *Generalized Hamiltonian dynamics*. Canad. J. Math., **2**, 129-148 (1950).

[38] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science Monograph Series, Vol. **2**, Yeshiva Univ. (1964).

[39] L. E. Faybusovich. *Explicitly solvable optimal control problems*. Int. J. Control, **48**, 235-250 (1988).

[40] L. E. Faybusovich. *Hamiltonian structure of dynamical systems which solve linear programming problems*. Physica D, **53**, 217-232 (1991).

[41] N. Fenichel. *Geometric singular Perturbation theory for ordinary differential equations*. J. Diff. Equations, **31**, 53-98 (1979).

[42] G. Gaeta, G. Marmo. *Non-perturbative linearization of dynamical systems*. J. Phys. A: Math. & Gen., **29**, 5035-5048 (1996).

[43] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Vol. II. Chelsea, New York, (1959).

[44] G. H. Golub, C. F. van Loan. *Matrix Computations*. 2nd ed., Baltimore, Johns Hopkins University Press (1989).

[45] M. J. Gotay, J. M. Nester, G. Hinds. *Presymplectic manifolds and the Dirac–Bergmann Theory of constraints*. J. Math. Phys., **19**, 2388-2399 (1978).

[46] M. J. Gotay, J. M. Nester. *Presymplectic Lagrangian Systems I: The constraint algorithm and the equivalence problem*. Ann. Inst. Henri Poincaré, A **30**, 129-142 (1979).

[47] M. J. Gotay, J. M. Nester. *Presymplectic Lagrangian Systems II: The second order equation problem*. Ann. Inst. Henri Poincaré, A **32**, 1-13 (1980).

[48] M. Gotay, J. Sniatycki. *Coisotropic embedding and quantization*. Math. Phys., **82**, 377-389 (1981).

[49] X. Gràcia, J. M. Pons. *Constrained systems: a unified approach*. Int. J. Theor. Phys., **30**, 511-516 (1991).

[50] X. Gràcia, J. M. Pons. *A generalized framework for constrained systems*. Diff. Geom. Appl., **2**, 223-247 (1992).

[51] X. Gràcia, M. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy. *Singular systems: their origins, general features and non-numerical solutions*. IFAC conference system structure and control. Ed. M. Gugliemi-IFAC, 37-42 (1995).

[52] X. Gràcia, J. Marín–Solano, M. C. Muñoz–Lecanda. *Some geometric aspects of variational calculus in constrained systems*.
arXiv: math-ph/0004019 v1 13 Apr 2000.

[53] X. Gràcia, M. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy. *On some aspects of the Geometry of Differential equations in Physics*. arXiv: math-ph/0402030 v1 12 Feb 2004.

[54] M. Guerra. *Soluções Generalizadas para Problemas L-Q Singulares*.
Ph. D. dissertation, Univ. de Aveiro (2001).

[55] A. Ibort. *Estructura geométrica de los sistemas con simetría en Mecánica Clásica y Teoría Clasica de Campos*. Publicaciones del seminario García de Galdeano. Serie II, **7** (1985).

[56] A. Ibort, J. Marín-Solano, *On the inverse problem of the calculus of variations for a class of coupled dynamical systems*. Inverse Problems, **7**, 1-13 (1991).

[57] A. Ibort, J. Marín-Solano, *Coisotropic regularization of singular Lagrangians*. J. Math. Phys. **36** (10) (1995).

[58] A. Ibort, M. de León, G. Marmo, D. Martín de Diego. *Non-holonomic constrained systems as implicit differential equations*. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **54**, 295-317 (1996).

[59] A. Ibort, M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego. *Dirac brackets in constrained dynamics*. Forschritte der Physik. **47** (5), 459-492 (1999).

[60] B. Jakubczyk, W. Respondek. *On linearization of control systems*. Bull. Acad. Pol., Sci. Ser. Sci. Math., **28**, 517-522 (1980).

[61] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).

[62] V. C. Klema, A. J. Laub. *The Singular Value Decomposition: its Computation and some Aplications*. IEEE Trans. Automat. Control Vol. AC-25 (2), 164-176 (1980).

[63] W. Klingerberg. *Lectures on closed geodesics*. Springer Verlag (1978).

[64] P. V. Kokotovic. *Applications of singular perturbation techniques to control problems*. SIAM Review **26**, 501-550 (1984).

[65] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control*. Academic Press, London (1986).

[66] V. I. Korobov. *A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem*. Math. USSR Sb., **37**, 535 (1979).

[67] A. J. Krener. *Feedback linearization*. Mathematical Control Theory, J. Baillieul and J.C. Willems eds., Springer Verlag, 66-98 (1999).

[68] P. Kunkel, V. Mehrmann. *Canonical forms for linear differential–algebraic equations with variable coeficients*. J. of Computational and Applied Maths., **56**, 225-251 (1994).

[69] B. Langerock. *Geometrical aspects of the maximum principle and lifts over a bundle map*. Acta Applicandae Mathematicae, **77**, 71-104 (2003).

[70] B. Langerock. *Autonomous optimal control problems*. Rep. Math. Phys., **51**, 259-267 (2003).

[71] B. Langerock. *Generalised Connections and Applications to Control Theory*. Ph. D. dissertation, Universiteit Gent (2003).

[72] M. de León, P. Rodríguez. *Generalized Clasical Mechanics and Field Theory*. North Holland (1985).

[73] M. de León, D. Martín de Diego, P. Pitanga. *A new look at degenerate Lagrangian dynamics from the viewpoint of almost product structures*. J. Phys. A: Math. Gen. **28**(17), 4951-4971 (1995).

[74] M. de León, D. Martín de Diego. *On the geometry of non-holonomic Lagrangian systems*. Journal of Mathematical Physics, **37** (7), 3389-3414 (1996).

[75] M. de León, J.C. Marrero y D. Martín de Diego. it Time-dependent constrained hamiltonian systems and Dirac brackets. Journal of Physics A: Math. Gen. **29**, 6843-6859(1996).

[76] M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego. *Non-holonomic Lagrangian systems in jet manifolds*. Journal of Physics A: Math. and Gen. **30**, 1167-1190 (1997).

[77] C. López. Conferencia en: *I Encuentros de Invierno: Física Matemática y Teoría Geométrica de Control*. Zaragoza (1999).

[78] C. López, E. Mártinez. *Subfinslerian metrics associated to an optimal control problem*. SIAM J. Control Opt. 39(3), 798-811 (2000).

[79] R. E. O'Malley, Jr. *Singular Perturbations and Optimal Control*. Lect. Notes in Maths., **680**, Springer-Verlag, Berlin, 170-218 (1978).

[80] J. E. Marsden, G. W. Patrick, S. Shkoller. *Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs*. math.DG/9807080 (1998).

[81] E. Martínez. *Geometría de Ecuaciones Diferenciales aplicada a la Mecánica*, Publ. Sem. García Galdeano, Sec 2, **36** (1989).

[82] E. Martínez, J. F. Cariñena, W. Sarlet. *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection*. Diff. Geometry and its applications **3** 1-29 (1993).

[83] E. Martínez. Conferencia en: *I Encuentros de Invierno: Física Matemática y Teoría Geométrica de Control*. Zaragoza (1999).

[84] G. Marmo, G. Mendella, W. Tulczyjew. *Integrability of implicit differential equations*. J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 149-163 (1995).

[85] S. Martínez Díaz. *Geometric Methods in Nonlinear Control Theory with Applications to Dynamic Robotic Systems*. Ph. D. dissertation, Univ. Carlos III de Madrid (2002).

[86] M. C. Muñoz–Lecanda, N. Román–Roy. *Hamiltonian systems with constraints: a geometric approach*. Int. J. Theor. Phys. **28** (11), 1405-1417 (1989).

[87] M. C. Muñoz–Lecanda, N. Román–Roy. *Lagrangian Theory for presymplectic systems*. Ann. Inst. Henri Poincaré **57** (1), 27-45 (1992).

[88] H. B. Pacejka, R. R. Sharp. *Shear force for Pneumatic tires in Steady-state conditions: a review of modelling aspects*. Vehicle systems dynamics, **20**, 121-176 (1991).

[89] G. Pidello, W. Tulczyjew. *Derivations of differential forms and jet bundles*. Ann. Math. Pure et Appl., **147**, 249-265 (1987).

[90] L. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelidze, E.R. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, N.Y. (1962).

[91] P. J. Rabier, W. C. Rheinboldt. *A geometric treatment of implicit differential-algebraic equations*. J. Diff. Equations. **109**, 110-146 (1994).

[92] S. Reich. *On a geometrical interpretation of differential–algebraic equations*. Circuits, systems, signal process. **9**, 367-382 (1990).

[93] W. C. Rheinboldt. *Differential-algebraic systems as Differential equations on Manifolds*. Mathematics of computation, **43** (168), 473-482 (1984).

[94] R. Riaza, P. J. Zufiria. *Stability of singular equilibria in quasilinear implicit differential equations*. J. Diff. Equations, **171**, 24-53 (2001).

[95] J. Sanz-Serna, M. Calvo. *Numerical Hamiltonian problems*. Chapman and Hall, London (1994).

[96] R. Skinner, R. Rusk. *Generalized Hamiltonian dynamics I. Formulation on $T^*Q \oplus TQ$*. J. Math. Phys., **24** (11), 2589-2594 (1983).

[97] J. Sniatycki. *Dirac Brackets in Geometric Dynamics*. Ann. Inst. H. Poincaré A. **20**, 365-372 (1974).

[98] S. L. Sobolev. *Applications of functional analysis in Mathematical Physics*. Trans. Math. Monographs Vol. **7**, AMS, Providence, R. I. (1964).

[99] K. Spindler. *Optimal Control on Lie groups with applications to attitude control*. Math. Control Signal Systems. **11**, 197-219 (1998).

[100] R. Su. *On the linear equivalents of control systems*. Syst. Control Lett., **2**, 48-52 (1982).

[101] H. J. Sussmann. *Geometry and Optimal Control*. Mathematical Control Theory. J. Baillieul and J. C. Willems Eds., Springer Verlag, 140-198 (1999).

[102] F. Takens. *Implicit differential equations: some open problems*. Singularités d'Applications Differentiables, Lect. Notes in Maths., **535**, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[103] F. Takens. *Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions*. In Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences. P. Hilton ed., Lect. Notes in Maths., **525**, Springer-Verlag, Berlin, 143-235 (1976).

[104] A. P. Veselov. *Integrable Lagrangian correspondences and the factorization of matrix polynomials*. Funct. Anal. Pril., **25**, 38-49 (1991).

[105] J. C. Willems, A. Kitapçi, L. M. Silverman. *Singular Optimal Control: A geometric approach*. Siam J. Control and Optimization. **24** (2), 323-337 (1986).