

Introducción a la Geometría de Poisson

Bencomo Domínguez Martín

Dirigido por Edith Padrón Fernández

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Departamento de Matemática fundamental

4 de septiembre de 2012



Índice general

Introducción	5
1. Un ejemplo motivante	7
1.1. El principio de Fermat	7
1.2. Formulación hamiltoniana de sistemas ópticos de rayos	10
2. Variedades de Poisson y Ejemplos	15
2.1. Variedades casi Poisson	15
2.2. El corchete de Poisson	17
2.3. Ejemplos de variedades de Poisson	19
2.3.1. Variedades simplécticas	19
2.3.2. Variedades cosimplécticas	21
2.3.3. El dual de un álgebra de Lie	23
2.4. El álgebra de Lie de las 1-formas en una variedad de Poisson	25
2.5. Teorema Splitting de Weinstein	28
3. Morfismos de Poisson y foliación característica	33
3.1. Morfismos de Poisson	33
3.2. Campos de Poisson	36
3.3. Foliación simpléctica de una variedad de Poisson	39

Apéndice

A. El Teorema de Frobenius	45
-----------------------------------	-----------

Introducción

En un sistema mecánico el espacio de fases de momentos se puede identificar con el fibrado cotangente T^*Q de la variedad de configuración Q y el hamiltoniano con una función sobre T^*Q . La estructura clave sobre T^*Q que nos permite hacer una descripción intrínseca de las ecuaciones de Hamilton es la 2-forma simpléctica canónica de T^*Q . Esta estructura nos permite definir un corchete de funciones, el corchete de Poisson, que nos da información sobre la evolución de un observable a lo largo de las trayectorias. En presencia de un grupo de simetrías el sistema puede ser reducido a un nuevo sistema hamiltoniano que posee un corchete de funciones que describe de las ecuaciones de Hamilton pero que no procede de una estructura simpléctica y, de hecho, generalmente no está definido sobre el fibrado cotangente de una variedad.

En [Poi] Poisson definió por primera vez los corchetes de funciones que hoy llevan su nombre como una herramienta para la descripción de la dinámica del sistema. Posteriormente Jacobi [Ja] y Lie [Lie] hacen un exhaustivo estudio algebraico y geométrico, respectivamente. Desde entonces, la geometría de Poisson ha sido un campo activo de la investigación con conexiones con aplicaciones tan diversas como por ejemplo la mecánica de partículas (ver [Arn], [Lic] ó [MarWei]), teoría de singularidades (véase por ejemplo [Var]) o sistemas completamente integrables (véase [GelDik] ó [Kos]).

Destacamos aquí los trabajos de Lichnerowicz (véase [Lic]) en donde se hace un estudio geométrico, sistemático de las variedades de Poisson, esto es, variedades que admiten un corchete de funciones antisimétrico que satisface la identidad de Jacobi y que es una derivación en cada argumento.

En este trabajo pretendemos hacer una introducción a este tipo de variedades profundizando en sus propiedades geométricas. El trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se desarrolla un ejemplo físico en el que aparece el concepto de corchete de Poissonal reducir el sistema. Se trata del caso del comportamiento de los rayos ópticos. Este sistema está determinado por el principio de Fermat el cual puede diseñar una formulación hamiltoniana de los sistemas ópticos de rayos.

En el capítulo 2 introducimos la noción de variedad de Poisson, caracterizándolas a partir del corchete de Poisson, la estructura de Poisson y los campos hamiltonianos. Veremos tres ejemplos de variedades de Poisson: las variedades simplécticas, las variedades cosimplécticas y el dual de un álgebra

de Lie. Además, introducimos el álgebra de Lie de las 1-formas en una variedad de Poisson, lo que nos permite caracterizar la estructura de Poisson en términos de morfismos de álgebras de Lie. Finalizamos el capítulo con el Teorema Splitting de Weinstein que nos describe la estructura de Poisson (localmente) como el producto cartesiano de una variedad simpléctica de dimensión $2k$ (siendo K el rango de la estructura de Poisson) y una variedad de Poisson de rango 0. También analizaremos cómo se aplica este resultado al caso de las estructuras simpléctica, cosimpléctica y de Lie-Poisson.

Finalmente en el capítulo 3, introduciremos la noción de morfismo de Poisson y probaremos sus distintas caracterizaciones. Presentamos algunos ejemplos de morfismos de Poisson, como los isomorfismos simplécticos, cosimplécticos y los homomorfismos de álgebras de Lie. La noción de morfismo de Poisson está asociado a un tipo de campos que se denominan campos de Poisson. En la segunda parte del capítulo, se comprobará que cualquier variedad de Poisson posee una distribución generalizada completamente integrable, la foliación característica, siendo cada una de sus hojas una variedad simpléctica. El capítulo termina descubriendo la foliación característica en cada uno de los tres casos: variedades simplécticas, cosimplécticas y Lie-Poisson.

El trabajo tiene un apéndice en el que se hace un breve resumen de los resultados anteriores al Teorema de Frobenius para distribuciones y distribuciones generalizadas.

El trabajo se finaliza con una breve recopilación bibliográfica sobre la temática.

Capítulo 1

Un ejemplo motivante

1.1. El principio de Fermat

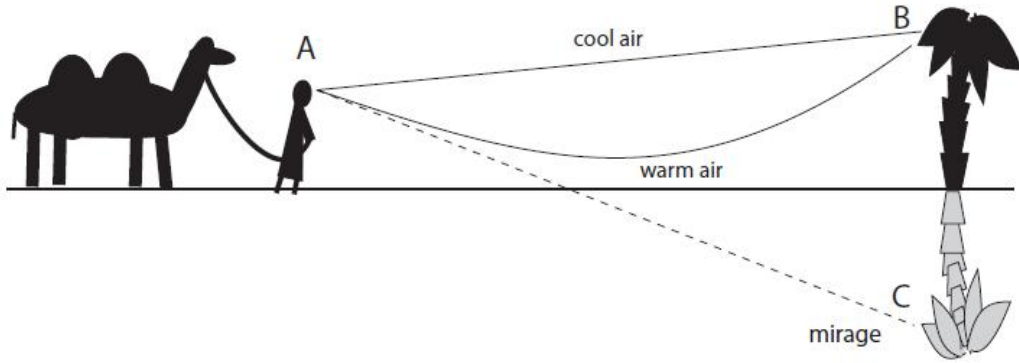
Es bien conocido que la Geometría simpléctica es la herramienta fundamental que permite modelar geoméricamente la formulación de la Mecánica hamiltoniana y lagrangiana. Sin embargo, cuando realizamos algunos procesos de reducción del sistema, no se puede inducir una estructura sobre el espacio reducido y sólo se preserva en la reducción una estructura más general que se denomina de Poisson. Este primer capítulo está dedicado a presentar un ejemplo físico que motiva la introducción de las variedades de Poisson.

En 1662 Fermat formuló el siguiente principio, que hoy se conoce como el principio de Fermat

“El camino descrito por un rayo de luz entre dos puntos se realiza en un tiempo mínimo”

Este principio es válido tanto para la luz que se desplaza entre dos espejos, como para la que atraviesa dos medios con diferentes índices de refracción o la que se transmite en un medio con índice de refracción que varía continuamente.

Un ejemplo real de esta última situación es el siguiente caso. Supongamos que estamos en una carretera en el desierto. Al estar caliente el suelo, la temperatura del aire más cercano al suelo disminuye a medida que aumenta la altura. Esto causa que los rayos de luz solar no sigan trayectorias rectas debido a una variación continua de los índices de refracción. Así algunos rayos de luz que deberían incidir en el suelo se curvan formando una trayectoria convexa llegando a nuestros ojos como si el suelo lo hubiera reflejado, como un espejismo. En las horas más calurosas la imagen del cielo parece venir del asfalto de la carretera y da la sensación de que el suelo está mojado.



A continuación mostraremos que este principio y la geometría que hay entorno a él es un antecedente de la Mecánica hamiltoniana y lagrangiana.

Primeramente daremos una descripción matemática de este principio. Previamente recordemos algunas nociones físicas.

El tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia r es $t = \frac{r}{v}$ donde v es la velocidad de la luz en ese medio (suponiendo $v = cte$). El *índice de refracción* es una medida de la reducción de la velocidad de la luz al propagarse por un medio homogéneo respecto de la velocidad que tendría si se desplazara en el vacío. De forma más precisa, el índice de refracción es el cociente $n = \frac{c}{v}$ donde c es la velocidad de la luz en el vacío, entonces $t = \frac{nr}{c}$. Si el índice de refracción depende de la posición entonces

$$dt = \frac{n(r)dr}{c}$$

Por tanto, buscamos el camino $\vec{r} = (x, y, z)$ descrito por el rayo al pasar del punto A al punto B que minimice el siguiente funcional

$$\mathcal{S} = \int_A^B n(x, y, z) \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Gran parte de los instrumentos ópticos tienen una línea de luz, que se denomina *eje óptico*, por donde se observa la imagen en un plano perpendicular al eje. Escojamos el eje z coincidiendo con el eje óptico. Supongamos entonces que (x, y) dependen de z . Entonces, se tiene que

$$\mathcal{S} = \int_{z_A}^{z_B} n(x, y, z) \left(\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + 1} \right) dz$$

1. Un ejemplo motivante

donde $\dot{x} = \frac{dx}{dz}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dz}$.

A la función $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) = n(x, y, z)\sqrt{1 + (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}$ se le llama *lagrangiano óptimo*. Denotemos por $q = (x, y)$ un punto perteneciente al plano perpendicular al eje z , y por $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y})$. Supongamos para simplificar, que n sólo depende de (x, y) , es decir, el índice de refracción permanece constante a lo largo del eje óptico. El tipo de medios en donde esto ocurre se llaman *medios de traslación invariante* que son invariantes por traslaciones a lo largo del eje óptico. Entonces el lagrangiano se puede expresar:

$$L(q(z), \dot{q}(z)) = n(q)\sqrt{1 + |\dot{q}|^2} \quad (1.1)$$

y

$$\mathcal{S} = \int_{z_A}^{z_B} L(q(z), \dot{q}(z)) dz$$

Así el principio de Fermat puede ser interpretado como la búsqueda de los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q(z) &\longrightarrow \mathcal{S} = \int_{z_A}^{z_B} L(q(z), \dot{q}(z)) dz \end{aligned}$$

Los puntos críticos de este funcional se caracterizan por ser las funciones $q \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ tales que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (\mathcal{S}(\bar{q}_\varepsilon)) = 0 \quad (1.2)$$

para toda aplicación diferenciable $\bar{q} :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{q}(0, z) = q(z)$, $\bar{q}(\varepsilon, z_A) = q(z_A)$ y $\bar{q}(\varepsilon, z_B) = q(z_B)$.

Desarrollando la ecuaci3n (1.2) resultan las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{z_A}^{z_B} L(\bar{q}(z, \varepsilon), \dot{\bar{q}}(z, \varepsilon)) dz = \\
 &= \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(z), \dot{q}(z)) \frac{d\bar{q}(z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z), \dot{q}(z)) \frac{d\dot{\bar{q}}(z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) dz = \\
 &= \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(z), \dot{q}(z)) - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z), \dot{q}(z)) \right) \frac{d\bar{q}(z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dz + \\
 &+ \int_{z_A}^{z_B} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z), \dot{q}(z)) \frac{d\bar{q}(z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) dz = \\
 &= \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(z), \dot{q}(z)) - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z), \dot{q}(z)) \frac{d\bar{q}(z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) dz + \\
 &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z_B), \dot{q}(z_B)) \frac{dq(z_B)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z_A), \dot{q}(z_A)) \frac{dq(z_A)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.
 \end{aligned}$$

por consiguiente concluimos que (1.2) es equivalente a

$$0 = \int_{z_A}^{z_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(z), \dot{q}(z)) - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z), \dot{q}(z)) \right) \frac{d\bar{q}(z, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dz$$

y, por tanto, como esta igualdad es cierta para cualquier \bar{q} , podemos deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(z), \dot{q}(z)) - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(z), \dot{q}(z)) = 0$$

Cualquier $q(z)$ que satisface estas ecuaciones es un punto *crítico* del funcional \mathcal{S} . Sustituyendo (1.1) en estas ecuaciones resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{q}|^2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{n(q)}{\sqrt{1 + |\dot{q}|^2}} \right) \frac{dq}{dz} = \frac{dn}{dq}.$$

En definitiva, buscamos $(q(z), \dot{q}(z))$ que sea soluci3n de esta ecuaci3n.

1.2. Formulaci3n hamiltoniana de sistemas 3pticos de rayos

El *momento 3ptico* asociado a un rayo $(q(z), z)$ que incide en la imagen de una pantalla colocada perpendicularmente al eje z para un cierto valor z se define como

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = \frac{n(q)}{\sqrt{1 + |\dot{q}|^2}} \dot{q} \tag{1.3}$$

1. Un ejemplo motivante

donde $\dot{q}(z) = \frac{dq}{dz}$.

¿Qué representa geoméricamente el momento óptico?

Observamos el siguiente dibujo en donde hemos colocado dos pantallas entre las que pasa un rayo. Sea s el parámetro arco de $r(z(s)) = (q(z(s)), z(s))$. Las pantallas son perpendiculares al eje z . Consideremos el vector

$$\vec{n}(q(z), z) = n(q(z)) \left(\frac{dq}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

Notar que

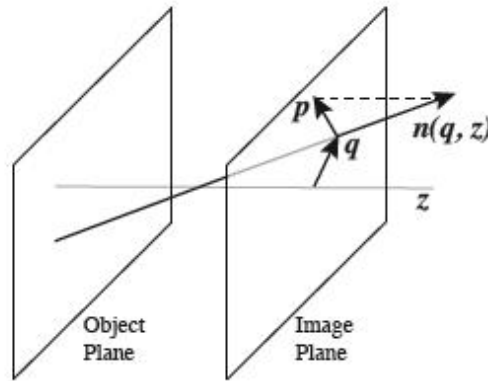
$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{dr(z)}{ds} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{q}|^2}}$$

Entonces

$$\vec{n}(q(z), z) = n(q(z)) \left(\frac{dq}{dz} \cdot \frac{dz}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = \frac{n(q(z))}{\sqrt{1 + |\dot{q}|^2}} \left(\frac{dq}{dz}, 1 \right)$$

Así que el momento óptico representa la proyección a lo largo del eje óptico del rayo sobre la imagen de la segunda pantalla. Por otra parte de (1.3) deducimos que

$$|p|^2 = n(q)^2 \left(1 - \frac{1}{1 + |\dot{q}|^2} \right)$$



Si queremos deducir de $p(z)$ el valor de $\dot{q}(z)$ debemos suponer que $n(q(z), z)^2 - |p(z)|^2 > 0$. En tal caso

$$\dot{q}(z) = \frac{dq}{dz} = \frac{p(z)}{\sqrt{n(q(z), z)^2 - |p(z)|^2}} \quad (1.4)$$

1.2. Formulaci3n hamiltoniana de sistemas 3pticos de rayos

Definimos para todo p tal que $|p| < n(q(z), z)$ la funci3n hamiltoniana

$$H(q, p) = p \frac{dq}{dz} - L(q, \frac{dq}{dz}, z)$$

esto es, (ver (1.2),(1.3) y (1.4))

$$H(q, p) = -\sqrt{n(q)^2 - |p|^2} = -n(q)\cos\theta \quad (1.5)$$

con $|p| = n(q)\text{sen}\theta$.

Las ecuaciones de Hamilton de este sistema entonces son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{H}p \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{H}n \frac{dn}{dq}$$

La variaci3n de un observable F , esto es, el corchete de Poisson $\{F, H\}$ viene dado por

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{1}{H}p - \frac{1}{H}n \frac{dn}{dq} \frac{\partial F}{\partial p}$$

Adicionalmente consideraremos simetrías axiales sobre materiales de traslaci3n invariante, esto es, materiales sobre los que $n(q)$ solo depende de la distancia al eje 3ptico

$$n(q) = n(|q|)$$

Pasando a coordenadas polares (r, ϕ)

$$q = (x, y) = r(\cos\phi, \text{sen}\phi)$$

Entonces

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\text{sen}\phi, \dot{r}\text{sen}\phi + r\dot{\phi}\cos\phi) \quad (1.6)$$

y por tanto

$$(\dot{r}, \dot{\phi}) = (\dot{x}\cos\phi + \dot{y}\text{sen}\phi, \dot{y}\frac{\cos\phi}{r} - \dot{x}\frac{\text{sen}\phi}{r})$$

Como

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \frac{d\dot{r}}{d\dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{d\dot{x}} = p_r \frac{d\dot{r}}{d\dot{x}} + p_\phi \frac{d\dot{\phi}}{d\dot{x}}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \frac{d\dot{r}}{d\dot{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{d\dot{y}} = p_r \frac{d\dot{r}}{d\dot{y}} + p_\phi \frac{d\dot{\phi}}{d\dot{y}}$$

Así que

$$p = (p_x, p_y) = (p_r \cos\phi - \frac{p_\phi \text{sen}\phi}{r}, p_r \text{sen}\phi + \frac{p_\phi \cos\phi}{r}) \quad (1.7)$$

Notar que $|p|^2 = p_r^2 + \left(\frac{p_\phi}{r}\right)^2$ y $p_\phi^2 = |p|^2 |q|^2 - (pq)^2 = |p \times q|^2$.

1. Un ejemplo motivante

Luego p_ϕ mide el área delimitada por p y q sobre la pantalla óptica.

Por otro lado, de (1.1) y (1.6) se tiene que la expresión del lagrangiano con respecto a las coordenadas $(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ es

$$L = n(r)\sqrt{1 + \dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}$$

y del hamiltoniano es entonces, (ver (1.5) y (1.7))

$$H = -\sqrt{n(r)^2 - p_r^2 - \left(\frac{p_\phi}{r}\right)^2} \quad (1.8)$$

Remarcamos que tanto el lagrangiano como el hamiltoniano no dependen de ϕ .

Las ecuaciones de Hamilton son entonces

$$\begin{cases} \frac{dr}{dz} = \frac{p_r}{H} \\ \frac{dp_r}{dz} = -\frac{1}{2H} \frac{d}{dr} \left(n(r)^2 - \left(\frac{p_\phi}{r}\right)^2 \right) \\ \frac{d\phi}{dz} = -\frac{p_\phi}{Hr^2} \\ \frac{dp_\phi}{dz} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

De la cuarta ecuación deducimos que p_ϕ es constante.

El espacio de fases de este sistema mecánico es $T^*(\mathbb{R} - \{0\}) \times S^1 \times \mathbb{R}$ con coordenadas (r, p_r, ϕ, p_ϕ) . Si observamos las anteriores ecuaciones de Hamilton, estas pueden ser resueltas por partes considerando

$$\begin{cases} \frac{dr}{dz} = -\frac{p_r}{H} \\ \frac{dp_r}{dz} = -\frac{1}{2H} \frac{d}{dr} \left(n(r)^2 - \left(\frac{p_\phi}{r}\right)^2 \right) \\ \frac{dp_\phi}{dz} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

y luego desde las soluciones de estas ecuaciones deducir las soluciones de las ecuaciones (1.9). El espacio donde se configuran las ecuaciones en (1.10) es $T^*(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \cong (\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}^2)$ que resulta ser difeomorfo al espacio reducido $(T^*(\mathbb{R} - \{0\}) \times S^1 \times \mathbb{R})/S^1$ respecto de la acción

$$\begin{aligned} S^1 \times T^*(\mathbb{R} - \{0\}) \times S^1 \times \mathbb{R} &\longleftrightarrow T^*(\mathbb{R} - \{0\}) \times S^1 \times \mathbb{R} \\ (\theta, (r, p_r, \phi, p_\phi)) &\longleftrightarrow (r, p_r, \theta + \phi, p_\phi) \end{aligned}$$

Además, la función Hamiltoniana sólo depende de las coordenadas sobre este espacio (ver (1.8)). Por tanto, uno podría sólo analizar las soluciones de este sistema reducido $T^*(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \cong (\mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}^2)$.

1.2. Formulación hamiltoniana de sistemas ópticos de rayos

Este espacio es de dimensión impar y, por consiguiente, no existe sobre él una estructura simpléctica que nos permita describir las ecuaciones (1.10). Una pregunta natural es si existe algún tipo de estructura geométrica intrínseca que nos permita describir estas ecuaciones sobre el espacio reducido. La noción de estructura de Poisson es la respuesta a esta cuestión. Esta memoria está dedicada a este tipo de estructuras.

En la Nota 2.3.7 describimos la estructura de Poisson que define las ecuaciones (1.10).

Capítulo 2

Variedades de Poisson y Ejemplos

2.1. Variedades casi Poisson

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Un *corchete casi Poisson* sobre M es un corchete de funciones

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

que satisface las siguientes propiedades:

- (1) es \mathbb{R} -bilineal
- (2) *antisimetría*, esto es, $\{f, g\} = -\{g, f\}$, para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$.
- (3) la *identidad de Leibniz*, esto es,

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

para cualquier $f, g, h \in C^\infty(M)$.

A continuación veremos que el primer ejemplo de corchete de Poisson es el inducido por un bivector y que, de hecho, cualquier corchete casi Poisson está determinado por un bivector. Previamente recordaremos la noción de *corchete de Schouten-Nijenhuis*.

Si M es una variedad arbitraria denotamos por $\mathcal{V}^p(M)$ el espacio de los p -vectores, es decir, tensores contravariantes de tipo $(p, 0)$ antisimétricos. Si $(\mathcal{V}(M), \wedge)$ es el álgebra contravariante de Grassmann de M , entonces uno puede definir una única extensión \mathbb{R} -bilineal del corchete de campos de vectores

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{V}^p(M) \times \mathcal{V}^q(M) \longrightarrow \mathcal{V}^{p+q-1}(M)$$

tal que verifica para cualesquiera $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$

$$[X_1 \wedge \dots \wedge X_p, Q] = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge X_p \wedge [X_i, Q]$$

para cualquier $Q \in \mathcal{V}^p(M)$.

A esta operación se la conoce como *corchete de Schouten-Nijenhuis* y satisface las siguientes propiedades:

1. $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$
2. $[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{pq+q}Q \wedge [P, R]$
3. $(-1)^{p(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{q(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{r(q-1)}[R, [P, Q]] = 0$
para cualesquiera $P \in \mathcal{V}^p(M), Q \in \mathcal{V}^q(M), R \in \mathcal{V}^r(M)$.

Nótese que el corchete de Schouten de campos de vectores es el corchete estándar de campos de vectores. Además $[f, g] = 0$ y $[f, X] = X(f)$ para $f, g \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Con estas relaciones y las propiedades 1. y 2. caracterizamos el corchete de Schouten-Nijenhuis. También la siguiente relación caracteriza el corchete de Schouten-Nijenhuis

$$i_{[P, Q]}\omega = (-1)^{q(p+1)}i_P d[i_Q \omega] + (-1)^p i_Q d[i_P \omega] - i(P \wedge Q)d\omega \quad (2.1)$$

para todo $P \in \mathcal{V}^p(M), Q \in \mathcal{V}^q(M), \omega \in \Omega^{p+q-1}(M)$.

Como comentamos anteriormente, un primer ejemplo de corchete casi Poisson es el determinado por un bivector Π sobre la variedad M . En este caso, el corchete está definido como sigue

$$\{f, g\}_\Pi = \Pi(df, dg) \quad (2.2)$$

Las propiedades para ser un corchete casi Poisson se derivan de las de ser un bivector sobre M . De hecho, en el siguiente resultado probaremos que cualquier corchete casi Poisson se deriva de un bivector.

Proposición 2.1.1 *Todo corchete casi Poisson determina un único bivector Π que satisface (2.2).*

Demostración. Consideremos el bivector caracterizado por (2.2). Este bivector es tal por la antisimetría del corchete y porque el corchete satisface la identidad de Leibniz, con lo que se puede asegurar que Π es una derivación en cada argumento. \square

Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad casi Poisson. Tomando coordenadas locales x_1, \dots, x_m en M , tenemos las funciones de estructura de la variedad casi Poisson

$$\pi_{ij}(x) = \{x_i, x_j\}$$

Entonces, respecto de estas coordenadas, la expresión local del corchete y del bivector de Poisson son respectivamente

$$\{f, g\} = \sum \pi_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum \pi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Todo bivector $\Pi \in \mathcal{V}^2(M)$, sobre la variedad M define el siguiente morfismo entre el fibrado cotangente de M , T^*M , y el fibrado tangente de M , TM

$$\begin{aligned} \#_{\Pi} : T^*M &\longrightarrow TM \\ \alpha_x &\longrightarrow i_{\alpha_x} \Pi(x) \end{aligned}$$

Por consiguiente tenemos una aplicación $C^\infty(M)$ -lineal entre 1-formas y campos de vectores sobre M dada por

$$\begin{aligned} \#_{\Pi} : \Omega^1(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \alpha &\longrightarrow i_{\alpha} \Pi \end{aligned}$$

Nótese que esta aplicación está bien definida, esto es, para toda 1-forma α sobre M , $\#(\alpha)$ define una derivación con respecto al producto de funciones sobre M .

Dada una variedad casi Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ uno puede definir para cada función $h \in C^\infty(M)$, la aplicación

$$\begin{aligned} X_h : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longrightarrow X_h(f) = \{f, h\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nótese que

$$X_h = \#_{\Pi}(dh)$$

y, por tanto, X_h es un campo de vectores que se denomina *campo hamiltoniano de h* respecto de la estructura casi Poisson Π .

2.2. El corchete de Poisson

Un corchete casi Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ en una variedad M es de *Poisson* si satisface la identidad de Jacobi, esto es,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (2.4)$$

para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$.

En este caso al par $(M, \{\cdot, \cdot\})$ se le denomina *variedad de Poisson*. El correspondiente bivector Π es entonces llamado *estructura de Poisson*.

Proposición 2.2.1 *Un corchete casi Poisson sobre una variedad M es Poisson si, y solo si, su bivector asociado Π satisface $[\Pi, \Pi] = 0$.*

Demostración. Para $f, g, h \in C^\infty(M)$, usando (2.1) y (2.2) se tiene

$$\begin{aligned} i_{[\Pi, \Pi]}(df \wedge dg \wedge dh) &= i_\Pi(di_\Pi(df \wedge dg \wedge dh)) + i_\Pi(di_\Pi(df \wedge dg \wedge dh)) = \\ &= 2(i_\Pi(d\{f, g\} \wedge dh) + i_\Pi(d\{h, f\} \wedge dg) + \\ &+ i_\Pi(d\{g, h\} \wedge df)) = \\ &= 2[\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}] = 0, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$[\Pi, \Pi] = 0.$$

□

Una propiedad interesante de los campos hamiltonianos de una estructura de Poisson es la siguiente

Proposición 2.2.2 *Si (M, Π) es una variedad de Poisson entonces para toda función $f \in C^\infty(M)$*

$$\mathcal{L}_{X_f} \Pi = 0. \quad (2.5)$$

En consecuencia Π se preserva a lo largo del flujo de cualquier campo hamiltoniano, esto es

$$\Pi(x)(\alpha_x, \beta_x) = \Pi(\varphi_{-t}(x))(\varphi_t^*(\alpha_x), \varphi_t^*(\beta_x))$$

para todo $x \in M$, donde φ_t es el flujo de X_f .

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que para cualesquiera $g, h \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\mathcal{L}_{\#_\Pi df} \Pi(dg, dh) = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

□

Los campos hamiltonianos permiten caracterizar una estructura de Poisson como sigue

Proposición 2.2.3 *Sea Π un bivector sobre la variedad M , Π es una estructura de Poisson si, y sólo si, satisface la siguiente propiedad*

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}} \quad (2.6)$$

para cualquier f y g funciones sobre M .

Demostración. En efecto, usando (2.3), deducimos

$$\begin{aligned} ([X_f, X_g] + X_{\{f, g\}})(h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) + X_{\{f, g\}}(h) = \\ &= X_f(\{h, g\}) - X_g(\{h, f\}) + \{h, \{f, g\}\} = \\ &= \{\{h, g\}, f\} + \{\{f, h\}, g\} + \{h, \{f, g\}\}. \end{aligned}$$

Así, que (2.6) se satisface si, y sólo si, el corchete $\{\cdot, \cdot\}$ verifica la identidad de Jacobi, esto es, es un corchete de Poisson. □

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

A continuación describiremos las relaciones que satisfacen las funciones de estructura de la variedad de Poisson que definen un bivector de Poisson Π . Si $\Pi = \frac{1}{2} \sum \pi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ entonces

$$\sum_{h=1}^n (\pi_{hi} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_h} + \pi_{hj} \frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_h} + \pi_{hi} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_h}) = 0$$

para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

2.3. Ejemplos de variedades de Poisson

2.3.1. Variedades simplécticas

Una *estructura simpléctica* sobre una variedad diferenciable M de dimensión $2n$ es una 2-forma ω cerrada y no degenerada, esto es,

$$d\omega = 0 \text{ y } \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0$$

En tal caso se dice que (M, ω) es una *variedad simpléctica*.

Sobre una variedad simpléctica (M, ω) se puede definir un corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ de la siguiente manera.

Consideremos el isomorfismo de fibrados vectoriales

$$\begin{aligned} \flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ X_x &\longrightarrow \flat(X_x) = i_{X_x}\omega(x) \end{aligned}$$

Este isomorfismo induce un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned} \flat : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longrightarrow i_X\omega \end{aligned}$$

Entonces el corchete de Poisson está definido por

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\}_\omega : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, g) &\longrightarrow \{f, g\} = \omega(X_f^\omega, X_g^\omega) \end{aligned}$$

para $f, g \in C^\infty(M)$ donde

$$X_f^\omega = \flat_\omega^{-1}(df) \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.7}$$

El bivector de Poisson es entonces

$$\Pi_\omega(\alpha, \beta) = \omega(\flat_\omega^{-1}(\alpha), \flat_\omega^{-1}(\beta)) \quad , \quad \sharp\alpha(\beta) = i_{\flat_\omega^{-1}(\alpha)}\omega(\flat_\omega^{-1}(\beta)) = \alpha(\flat_\omega^{-1}(\beta))$$

2.3. Ejemplos de variedades de Poisson

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

El campo hamiltoniano asociado a una función h sobre M respecto de esta estructura de Poisson es justamente el dado en (2.7).

Estamos interesados en dar las expresiones locales de la estructura de Poisson, el corchete de Poisson y los campos hamiltonianos de una variedad simpléctica. Para ello previamente recordamos el *Teorema de Darboux*.

Teorema 2.3.1 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Entonces para cada punto $p \in M$ existe una carta local $(U_p; (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$ que contiene a p tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i \quad (2.8)$$

Además por (2.8) se tiene que la expresión local de la estructura de Poisson viene dada por

$$\Pi_\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$$

La expresión local del campo hamiltoniano es

$$X_h^\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

y, por consiguiente, el corchete de Poisson viene dado por

$$\{f, g\}_\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

Una variedad de Poisson (M, Π) se dice *no degenerada* si

$$\#_{\Pi_\omega}^x : T_x^* M \longrightarrow T_x^* M$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales para todo $x \in M$.

Proposición 2.3.2 *Toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson no degenerada. Recíprocamente toda variedad de Poisson no degenerada es simpléctica.*

Demostración. Evidentemente $\#_{\Pi_\omega} = -b_\omega^{-1}$.

Si suponemos que (M, Π) es una variedad de Poisson no degenerada. Definimos la 2-forma

$$\omega(X, Y) = \Pi_x(b_\omega(X), b_\omega(Y)), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Veamos que ω es cerrada y no degenerada.

Para ver que es cerrada comprobamos que para toda $f, g, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f(\omega(X_g, X_h)) - X_g(\omega(X_h, X_f)) - X_h(\omega(X_f, X_g)) - \\ &- \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g) = \\ &= 2(\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}) = 0. \end{aligned}$$

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

Esta última igualdad es consecuencia de (2.6). Puesto que $\langle X_f | f \in C^\infty(M) \rangle$ genera TM deducimos que $d\omega = 0$. \square

Nótese que la condición de que la estructura de Poisson es no degenerada se traduce en la siguiente condición para el corchete

$$\{f, g\}(x) = 0, \forall g \in C^\infty(M) \Leftrightarrow df(x) = 0.$$

Esto es consecuencia de la igualdad

$$\{f, g\}(x) = X_g(x)(f) = df(x)(X_g(x)).$$

2.3.2. Variedades cosimplécticas

Una contrapartida en dimensión impar de las variedades simplécticas son las variedades cosimplécticas que se definen por una terna (M, Φ, η) , donde M es una variedad de dimensión impar $2n + 1$, Φ y η son una 2-forma cerrada y una 1-forma cerrada, respectivamente, y $\eta \wedge \Phi^n$ es una forma de volumen. Toda variedad cosimpléctica (M, Φ, η) induce un isomorfismo de fibrados vectoriales

$$\begin{aligned} \flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ X_x &\longrightarrow \flat(X_x) = i_{X_x}\Phi(x) + \eta(x)(X_x)\eta(x) \end{aligned}$$

Si denotamos también por \flat el correspondiente isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos

$$\begin{aligned} \flat : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longrightarrow \flat(X) = i_X\Phi + (i_X\eta)\eta \end{aligned} \quad (2.9)$$

entonces el campo $\xi = \flat^{-1}(\eta)$ es llamado *campo de Reeb de M* y está caracterizado por las siguientes relaciones

$$i_\xi\Phi = 0 \quad y \quad i_\xi\eta = 1. \quad (2.10)$$

Consideramos el bivector Π sobre M definido, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, por

$$\Pi(\alpha, \beta) = \Phi(\flat^{-1}(\alpha), \flat^{-1}(\beta)). \quad (2.11)$$

Entonces (M, Π) es una variedad casi Poisson y el corchete casi Poisson viene definido por

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg) = \Phi(\flat^{-1}(df), \flat^{-1}(dg)), \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

El campo hamiltoniano de $f \in C^\infty(M)$ respecto de esta estructura casi Poisson está caracterizado por

$$X_f(h) = \Phi(\flat^{-1}(df), \flat^{-1}(dh))$$

para $h \in C^\infty(M)$.

De (2.10) se deduce que

$$df = i_{b^{-1}(df)}\Phi + \eta(b^{-1}(df))\eta.$$

Usando esta relación y (2.10) tenemos que $\xi(f) = \eta(b^{-1}(df))$. Así que

$$df = i_{b^{-1}(df)}\Phi + \xi(f)\eta$$

por consiguiente

$$X_f(h) = b^{-1}(dh)(f) - \xi(f)\xi(h).$$

A continuación probaremos que toda variedad cosimpléctica es de Poisson. Para ello precisamos de una generalización del Teorema de Darboux que pasamos a enunciar.

Teorema 2.3.3 *Sea M una variedad de dimensión $2n+r$ y ω una 2-forma de rango constante $2n$. Entonces ω es cerrada si, y sólo si, para cada $x \in M$ existe una carta (U, ϕ) de M en x tal que si $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r})$ son las coordenadas en U*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Usando el Teorema generalizado de Darboux tenemos que existen coordenadas locales $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ de M tal que

$$\Phi = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Puesto que η es una 1-forma cerrada, por el Teorema de Poincare, es localmente exacta, entonces existe una coordenada t tal que

$$\eta = dt.$$

Del hecho que $\eta \wedge \Phi^n$ determine una forma de volumen, deducimos que $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ determina un sistema de coordenadas locales sobre M tal que

$$\Phi = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \quad \text{y} \quad \eta = dt.$$

Entonces usando (2.10) concluimos que $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Por consiguiente en coordenadas locales se tiene que la expresión de la estructura casi Poisson y del campo hamiltoniano son

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{2.12}$$

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

$$X_h = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

El corchete casi Poisson viene dado localmente por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right),$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$.

Notar que $\{t, f\} = 0$ para cualquier función f sobre el correspondiente entorno de M , esto es, t es un *Casimir* de la estructura Π .

Proposición 2.3.4 *El bivector definido en (2.11) define una estructura de Poisson.*

Demostración. Utilizando la expresión local del bivector casi Poisson Π (ver (2.12)) se comprueba fácilmente que $[\Pi, \Pi] = 0$, por lo que podemos concluir que Π es una estructura de Poisson. \square

2.3.3. El dual de un álgebra de Lie

Sea $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ un álgebra de Lie de dimensión n . Denotamos por \mathfrak{g}^* el álgebra dual. A continuación describiremos una estructura de Poisson sobre \mathfrak{g}^* .

Dadas dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, las 1-formas df, dg pueden ser interpretadas como aplicaciones $df, dg : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$.

Entonces definimos $\{f, g\} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ como la función sobre \mathfrak{g}^* dada por

$$\{f, g\}(\mu) = \mu([df(\mu), dg(\mu)]_{\mathfrak{g}}) \quad (2.13)$$

para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

A continuación describiremos este corchete en términos de los elementos de una base de \mathfrak{g}^*

Proposición 2.3.5 *Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base del álgebra de Lie \mathfrak{g} y (μ_1, \dots, μ_n) las correspondientes coordenadas en \mathfrak{g}^* respecto de la base dual $\{v^1, \dots, v^n\}$ de $\{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces (2.13) es justamente el corchete*

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \mu_k \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial g}{\partial \mu_j} \quad (2.14)$$

donde c_{ij}^k son las constantes de estructura de \mathfrak{g} , esto es, las constantes que satisfacen

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k.$$

En consecuencia, el corchete dado en (2.13) es lineal.

Demostración. Bajo la identificación $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$ tenemos que para cualquier $\mu \in \mathfrak{g}^*$

$$df(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu) v_i \quad y \quad dg(\mu) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial \mu_j}(\mu) v_j$$

Entonces

$$\{f, g\} = \mu([df(\mu), dg(\mu)]_{\mathfrak{g}}) = \mu\left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial g}{\partial \mu_j} [v_i, v_j]_{\mathfrak{g}}\right) = \mu\left(\sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial g}{\partial \mu_j} v_k\right)$$

Si $\mu = \sum_{h=1}^n \mu_h v^h$, entonces

$$\{f, g\} = \left(\sum_{h=1}^n \mu_h v^h\right) \left(\sum_{i,j,k=1}^n c_{ijk} \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial g}{\partial \mu_j} v_k\right) = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \mu_k \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial g}{\partial \mu_j}.$$

□

El corchete de funciones dado en (2.13) es \mathbb{R} -lineal, antisimétrico y es una derivación en cada argumento, por tanto, define una estructura casi Poisson Π . Las funciones de estructura de Π vienen dadas de la siguiente manera en términos de las constantes de estructura del álgebra de Lie \mathfrak{g} y las correspondientes coordenadas sobre \mathfrak{g}^* .

$$\pi_{ij}(\mu) = \{\mu_i, \mu_j\} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \mu_k$$

Usando (2.14) y las propiedades de las constantes de estructura c_{ij}^k del álgebra de Lie \mathfrak{g} deducimos

Proposición 2.3.6 *El corchete $\{\cdot, \cdot\}$ dado en (2.13) es un corchete de Poisson.*

A la correspondiente estructura de Poisson Π se la denomina *estructura de Lie-Poisson*. La expresión local en coordenadas de este bivector es

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \mu_k \frac{\partial}{\partial \mu_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \mu_j}$$

con c_{ij}^k funciones de estructura de \mathfrak{g} respecto de una base μ_1, \dots, μ_n .

Se tiene además que los campos hamiltonianos son de la siguiente forma

$$X_h = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \mu_k \frac{\partial h}{\partial \mu_j} \frac{\partial}{\partial \mu_i}$$

para $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

Nota 2.3.7 Retomemos el ejemplo motivante del Capítulo 1. Consideremos las funciones

$$e_1 = r^2, \quad e_2 = p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}, \quad e_3 = rp_r.$$

Consideramos la estructura simpléctica $\omega = dr \wedge dp_r + d\theta \wedge dp_\theta$. Respecto a esta estructura, el correspondiente corchete de Poisson satisface las siguientes igualdades

$$\{e_1, e_2\} = 4e_3, \quad \{e_2, e_3\} = -2e_2, \quad \{e_3, e_1\} = -2e_1 \quad (2.15)$$

y el resto de los corchetes entre los e_i son nulos. Denotamos por $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$ los elementos reales tales que

$$\{e_i, e_j\} = c_{ij}^k e_k.$$

Estas constantes c_{ij}^k satisfacen las condiciones de las constantes de estructura de un álgebra de Lie. De hecho, si consideramos el grupo lineal especial $SL(2)$ de las matrices reales 2×2 con determinante 1, su álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ es el álgebra de matrices reales 2×2 , con traza 0, donde el corchete de Lie es el conmutador. Una base para esta álgebra de Lie está definida por estas tres matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los conmutadores entre ellos son nulos salvo

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = -2E_2, \quad [E_3, E_1] = -2E_3$$

Si $E_1 = \frac{1}{2}e_1, E_2 = \frac{1}{2}e_2$ y $E_3 = e_3$ obtenemos las mismas relaciones que (2.15).

El corchete de Poisson que define las ecuaciones (1.10) es la estructura de Lie-Poisson inducida sobre el dual del álgebra de Lie cuyas constantes de estructura son

$$c_{12}^3 = 4, \quad c_{23}^2 = -2, \quad c_{3,1}^1 = -2$$

y el resto nulas.

2.4. El álgebra de Lie de las 1-formas en una variedad de Poisson

Si (M, Π) es una variedad de Poisson. En esta sección introduciremos una estructura de álgebra de Lie sobre el espacio de las 1-formas de M . Este corchete de 1-formas, que denotamos por $[[\cdot, \cdot]] : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ está definido de la siguiente manera

$$[[\alpha, \beta]] = \mathcal{L}_{\#\Pi\alpha}\beta - \mathcal{L}_{\#\Pi\beta}\alpha - d(\Pi(\alpha, \beta)) \quad (2.16)$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

2.4. El álgebra de Lie de las 1-formas en una variedad de Poisson

Proposición 2.4.1 *El corchete dado en (2.16) verifica las siguientes propiedades:*

(a) $\llbracket df, dg \rrbracket = d\{f, g\}$ para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$

(b) $\#_\Pi : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ es un morfismo de $C^\infty(M)$ -módulos que satisface

$$\#_\Pi \llbracket \alpha, \beta \rrbracket = [\#_\Pi \alpha, \#_\Pi \beta] \quad (2.17)$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

(c) $(\Omega^1(M), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un álgebra de Lie.

(d) $\#_\Pi : (\Omega^1(M), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket) \longrightarrow (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ es un morfismo de álgebras de Lie.

Demostración.

(a) Si $f, g \in C^\infty(M)$ entonces

$$\begin{aligned} \llbracket df, dg \rrbracket &= \mathcal{L}_{\#_\Pi df} dg - \mathcal{L}_{\#_\Pi dg} df - d(\Pi(\alpha, \beta)) = \\ &= d\{f, g\} - d\{g, f\} - d\{f, g\} = \\ &= d\{f, g\} \end{aligned}$$

donde hemos usado la antisimetría del corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ y (2.2).

(b) Nótese en primer lugar que

$$\llbracket \alpha, \beta \rrbracket = \mathcal{L}_{\#_\Pi \alpha} \beta - i_{\#_\Pi \beta} d\alpha$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Entonces

$$\#_\Pi \llbracket \alpha, \beta \rrbracket (f) = -\llbracket \alpha, \beta \rrbracket (\#_\Pi df) = -(\mathcal{L}_{\#_\Pi \alpha} \beta - i_{\#_\Pi \beta} d\alpha)(\#_\Pi df) \quad (2.18)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\#_\Pi \alpha} \beta)(\#_\Pi df) &= (\#_\Pi \alpha)(\beta(\#_\Pi df)) - \beta([\#_\Pi \alpha, \#_\Pi df]) = \\ &= -(\#_\Pi \alpha)(\#_\Pi \beta)(f) - \beta[\#_\Pi \alpha, \#_\Pi df] \end{aligned} \quad (2.19)$$

y

$$\begin{aligned} d\alpha(\#_\Pi \beta, \#_\Pi df) &= (\#_\Pi \beta)(\alpha(\#_\Pi df)) - (\#_\Pi df)(\alpha(\#_\Pi \beta)) - \alpha([\#_\Pi \beta, \#_\Pi df]) \\ &= -(\#_\Pi \beta)(\#_\Pi \alpha)(f) - (\#_\Pi df)(\alpha(\#_\Pi \beta)) - \\ &\quad - \alpha([\#_\Pi \beta, \#_\Pi df]) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Entonces sustituyendo (2.19) y (2.20) en (2.18) tenemos que

$$\#_\Pi \llbracket \alpha, \beta \rrbracket (f) = [\#_\Pi \alpha, \#_\Pi \beta](f) - (\mathcal{L}_{\#_\Pi df} \Pi)(\alpha, \beta) = [\#_\Pi \alpha, \#_\Pi \beta](f)$$

Concluimos que (2.17) se deduce entonces teniendo en cuenta (2.5).

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

(c) Para comprobar que $(\Omega^1(M), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un álgebra de Lie, bastará con que el corchete sea bilineal, antisimétrico y verifique la identidad de Jacobi.

Las dos primeras propiedades se derivan de la definición de $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$. Comprobamos que la identidad de Jacobi para $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ se satisface. En efecto, aplicando (2.16), (2.17) y las propiedades de la derivada de Lie se tiene que, para $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

$$\begin{aligned}
\llbracket \llbracket \alpha, \beta \rrbracket, \gamma \rrbracket &= \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \llbracket \alpha, \beta \rrbracket} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \llbracket \alpha, \beta \rrbracket - d\Pi(\llbracket \alpha, \beta \rrbracket, \gamma) = \\
&= \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \beta + \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \alpha + \\
&+ \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} d\Pi(\alpha, \beta) - d\Pi(\mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \beta - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \alpha - d(\Pi(\alpha, \beta)), \gamma) = \\
&= \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \beta + \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \alpha + \\
&+ d(\#_{\Pi} \gamma(\#_{\Pi} \alpha(\beta))) + d(\mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \beta)(\#_{\Pi} \gamma) - d(\mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \alpha)(\#_{\Pi} \gamma) - \\
&- d\#_{\Pi} \gamma(\#_{\Pi} \alpha(\beta)) = \\
&= \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \gamma - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \beta + \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \alpha + \\
&+ d(\#_{\Pi} \alpha(\beta(\#_{\Pi} \gamma))) - d(\beta(\llbracket \#_{\Pi} \alpha, \#_{\Pi} \gamma \rrbracket)) - \\
&- d(\#_{\Pi} \beta(\alpha(\#_{\Pi} \gamma))) + d(\alpha(\llbracket \#_{\Pi} \beta, \#_{\Pi} \gamma \rrbracket))
\end{aligned}$$

Análogamente deducimos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\llbracket \llbracket \gamma, \alpha \rrbracket, \beta \rrbracket &= \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \beta - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \beta - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \alpha + \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \gamma + \\
&+ d(\#_{\Pi} \gamma(\alpha(\#_{\Pi} \beta))) - d(\alpha(\llbracket \#_{\Pi} \gamma, \#_{\Pi} \beta \rrbracket)) - d(\#_{\Pi} \alpha(\gamma(\#_{\Pi} \beta))) + \\
&+ d(\gamma(\llbracket \#_{\Pi} \alpha, \#_{\Pi} \beta \rrbracket))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\llbracket \llbracket \beta, \gamma \rrbracket, \alpha \rrbracket &= \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \alpha - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \alpha - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \gamma + \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \alpha} \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \gamma} \beta + \\
&+ d(\#_{\Pi} \beta(\gamma(\#_{\Pi} \alpha))) - d(\gamma(\llbracket \#_{\Pi} \beta, \#_{\Pi} \alpha \rrbracket)) - d(\#_{\Pi} \gamma(\beta(\#_{\Pi} \alpha))) + \\
&+ d(\beta(\llbracket \#_{\Pi} \gamma, \#_{\Pi} \alpha \rrbracket))
\end{aligned}$$

Sumando las tres expresiones deducimos la siguiente igualdad

$$\llbracket \llbracket \alpha, \beta \rrbracket, \gamma \rrbracket + \llbracket \llbracket \beta, \gamma \rrbracket, \alpha \rrbracket + \llbracket \llbracket \gamma, \alpha \rrbracket, \beta \rrbracket = d(d\beta(\#_{\Pi} \alpha, \#_{\Pi} \gamma) - \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \Pi(\alpha, \gamma))$$

Comprobemos entonces que

$$d\beta(\#_{\Pi} \alpha, \#_{\Pi} \gamma) = \mathcal{L}_{\#_{\Pi} \beta} \Pi(\alpha, \gamma) \tag{2.21}$$

Supongamos que $\beta = gdf$ con $g, f \in C^\infty(M)$. Entonces

$$\mathcal{L}_{\#_{\Pi} gdf} \Pi = \#_{\Pi} dg \wedge \#_{\Pi} df$$

Luego

$$\mathcal{L}_{\#_{\Pi} gdf} \Pi(\alpha, \gamma) = (\#_{\Pi} dg \wedge \#_{\Pi} df)(\alpha, \gamma) = dg \wedge df(\#_{\Pi} \alpha, \#_{\Pi} \gamma) = d(gdf)(\#_{\Pi} \alpha, \#_{\Pi} \gamma)$$

Como gdf generan localmente el espacio de las 1-formas tenemos que $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ satisface la identidad de Jacobi.

(d) Es consecuencia directa de (b) y (c). □

Finalmente comprobaremos que todo morfismo de álgebras de Lie de $\Omega^1(M)$ a $\mathfrak{X}(M)$ caracteriza una estructura de Poisson sobre M .

Teorema 2.4.2 *Sea $\# : T^*M \rightarrow T(M)$ un morfismo de fibrados. Entonces sobre $\Omega^1(M)$ consideramos el corchete*

$$\llbracket \alpha, \beta \rrbracket = \mathcal{L}_{\#\alpha}\beta - \mathcal{L}_{\#\beta}\alpha - d(\#\alpha(\beta)), \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M)$$

Si $(\Omega^1(M), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$ es un álgebra de Lie tal que

$$\# : (\Omega^1(M), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket) \rightarrow (\mathfrak{X}(M), \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$$

es un morfismo de álgebras de Lie que verifica $\#(\alpha)(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$, si y sólo si $\#$ induce una estructura de Poisson Π sobre M tal que

$$\# = \#\Pi.$$

Demostración. El bivector Π se define como sigue

$$\Pi(\alpha, \beta) = \#\alpha(\beta) \quad , \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M)$$

Nótese de la condición $\#(\alpha)(\alpha) = 0$ deducimos que Π es un bivector. Para ver que Π es Poisson es suficiente comprobar que se verifica (2.6).

En efecto,

$$[X_f, X_g] = [\#df, \#dg] = \#\llbracket df, dg \rrbracket$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \llbracket df, dg \rrbracket &= \mathcal{L}_{\#df}dg - \mathcal{L}_{\#dg}df - d(\#df(g)) = \\ &= d(\#df(g)) - d(\#dg(f)) - d(\#df(g)) = \\ &= d\Pi(df, dg) = d\{f, g\} \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que (2.6) se satisface. □

2.5. Teorema Splitting de Weinstein

En esta sección enunciaremos y demostraremos el Teorema Splitting de Weinstein, que determinará la expresión local de una estructura de Poisson. Veremos que localmente una variedad de Poisson es el producto cartesiano de una variedad simpléctica de dimensión $2k$ por una variedad de Poisson de rango 0 donde k es el rango de la estructura de Poisson.

Antes de enunciar el teorema vamos a probar el siguiente resultado que, junto con el Teorema de Frobenius, será necesario para la demostración del Teorema de Weinstein.

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

Teorema 2.5.1 (Flow box) Si X es un campo de vectores sobre una variedad M de dimensión n , entonces para todo $p \in M$ con $X(p) \neq 0$ existe un entorno coordenado U tal que

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

donde y_1, \dots, y_n son las correspondientes coordenadas en U .

Demostración. Sea (\bar{U}, φ) una carta coordenada de M en el punto x tal que $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces en U la expresión de X es

$$X = \sum f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Nota que puesto que $X(p) \neq 0$ podemos suponer que, tras un cambio de coordenadas

$$f(0) = (1, 0, \dots, 0)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)$. Sea $\Phi(t, x)$ la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d\dot{x}}{dt} = f(x) \\ x(0) = x \end{cases}$$

y sea Ψ la aplicación diferenciable en U definida por

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n)).$$

Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(x) = f(\Psi(x))$$

y que $\Psi(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$. Por tanto, $d\Psi(0)$ es regular. Así, se tiene que $y = \Psi^{-1}(x)$ determina un nuevo sistema de coordenadas.

Finalmente, ya que $x = \Psi(y)$, tenemos

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_1} = f_j(\Psi(y)) = f_j(x)$$

En definitiva,

$$X = \sum f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial x_j}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

□

Ahora estamos en condiciones de poder demostrar el Teorema Splitting de Weinstein. Dada una variedad de Poisson (M, Π) , el rango de Π en el punto $x \in M$ es el rango de la aplicación

$$\#\Pi(x) : T_x^* M \longrightarrow T_x M$$

Puesto que Π es antisimétrico entonces el rango de Π en x es un número par.

Teorema 2.5.2 ([Wei]) *En una variedad de Poisson (M, Π) de dimensión n , para cada punto $x \in M$, existe un entorno coordenado U de x , tal que*

$$\Pi = \sum_i^k \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} \quad y \quad \varphi(x) = 0$$

donde k es el rango de Π en x y $(q^1, \dots, q^k, p_1, \dots, p_k, y_1, \dots, y_s)$ son las correspondientes coordenadas en U .

Demostración. Probamos el teorema por inducción sobre $\rho = \text{rang } \Pi(x)$.

Si $\rho = 0$, hemos terminado, ya que las únicas coordenadas que tenemos son (y_1, \dots, y_n) .

Si $\rho = 2$, existen dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$ tal que $\{f, g\} \neq 0$. Sea $p_1 = g$, tenemos que

$$X_{p_1}(f)(x) = \{f, p_1\}(x) = \{f, g\} \neq 0$$

Aplicando el Teorema 2.5.1, existen coordenadas en M para la cuales $X_{p_1} \in \mathfrak{X}(M)$ es uno de los campos de vectores coordenados. Sea q^1 la función coordenada tal que $X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}$. Por consiguiente,

$$\{q^1, p_1\} = X_{p_1}(q^1) = 1 \tag{2.22}$$

Los campos X_{p_1} y X_{q^1} son linealmente independientes en x y, por tanto, en un entorno de x , ya que si $X_{p_1}(x) = \lambda X_{q^1}$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$X_{p_1}(q^1)(x) = 1 \quad \text{y} \quad X_{p_1}(q^1)(x) = \lambda X_{q^1}(q^1)(x) = \lambda \{q^1, q^1\}(x) = 0$$

con lo que llegamos a una contradicción.

Veamos ahora que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Frobenius. Tomamos la distribución 2-dimensional en M

$$\varepsilon : x \longrightarrow \varepsilon_x \subset T_x M$$

$$\varepsilon_x = \langle X_{p_1}(x), X_{q^1}(x) \rangle$$

Además, sabemos que

$$[X_{p_1}, X_{q^1}] = -X_{\{p_1, q^1\}} = -X_1 = 0$$

y por consiguiente la distribución ε es involutiva. Por tanto, aplicando el Teorema de Frobenius existe un sistema coordenado $(U, \varphi \equiv (y^1, \dots, y^n))$ alrededor de x , tal que tenemos una subvariedad N de M tal que para todo $y \in N$

$$T_y i(T_y N) \subseteq \langle X_{p_1}(y), X_{q^1}(y) \rangle$$

De aquí podemos encontrar funciones y_1, \dots, y_{n-2} tal que

2. Variedades de Poisson y Ejemplos

- (a) dy_1, \dots, dy_{n-2} son linealmente independientes.
- (b) Como X_{p_1} y X_{q^1} son independientes, de (2.22) obtenemos que $X_{p_1}(y_j) = X_{q^1}(y_j) = 0$, es decir, $\{y_j, p_1\} = \{y_j, q^1\} = 0$. Por tanto, tenemos coordenadas tal que

$$X_{q^1} = -\frac{\partial}{\partial p_1}, \quad X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}$$

Nótese que

$$dq^1 \wedge dp_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-2} \neq 0$$

ya que en caso contrario, esto es, si existe $y \in M$ tal que

$$(dq^1 \wedge dp_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-2})(y) = 0$$

entonces contrayendo con los vectores $X_{q^1}(y)$, $X_{p_1}(y)$ y usando (2.22), deducimos que

$$(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-2})(y) = 0$$

Aplicando la identidad de Jacobi tenemos

$$\{\{y_i, y_j\}, p_1\} = \{\{y_i, y_j\}, q^1\} = 0$$

esto es, $\{y_i, y_j\}$ solo dependen de los y_i 's. De aquí, la estructura de Poisson sería

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial q^1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Si aplicamos el argumento anterior a la estructura de Poisson

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}$$

deducimos el teorema. □

Si estamos en el caso en el que el rango es localmente constante, entonces $\varphi_{ij} = 0$ y el siguiente resultado es un caso particular del teorema que acabamos de probar.

Teorema 2.5.3 ([Lie]) Sean Π una estructura de Poisson sobre M y $\Pi_{ij}(x)$ sus funciones de estructura, que suponemos tienen rango constante. Entonces para cada punto de M existe un sistema local de coordenadas tal que la matriz (π_{ij}) es constante.

Comprobamos qué ocurre en el caso de cada uno de los ejemplos de variedad de Poisson que hemos presentado en este capítulo:

- (a) *Varietad simpléctica*: En el caso de una variedad simpléctica, tenemos que es una variedad de Poisson (M, Π) donde $\text{rang}\Pi = \dim M = 2n$ en cualquier punto. El Teorema de Splitting nos proporciona coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ tal que

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Nótese que en este caso $\varphi_{ij}(y) = 0$.

- (b) *Varietad cosimpléctica*: Si consideramos una variedad cosimpléctica de dimensión $\dim M = 2n + 1$, $\text{rang}\Pi = 2n$ en todo punto. El Teorema de Splitting nos asegura la existencia de coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, t)$ tal que

$$\Pi = \sum_i \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

También en este caso $\varphi_{ij}(y) = 0$.

- (c) *Dual de un álgebra de Lie*: Sea \mathfrak{g}^* el dual de un álgebra de Lie de dimensión n . Entonces $\text{rang}\Pi = n$ donde Π es la correspondiente estructura de Lie-Poisson sobre \mathfrak{g}^* . Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathfrak{g} y (μ_1, \dots, μ_n) las correspondientes coordenadas en \mathfrak{g}^* respecto de la base dual $\{v^1, \dots, v^n\}$ de $\{v_1, \dots, v_n\}$. La forma normal de la estructura de Poisson es

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \mu_k \frac{\partial}{\partial \mu_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \mu_j},$$

$\varphi_{ij}(\mu) = \{\mu_i, \mu_j\} = c_{ij}^k \mu_k$ y no tenemos coordenadas correspondientes a “la parte simpléctica”.

Capítulo 3

Morfismos de Poisson y la foliación característica de una variedad de Poisson

En este capítulo abordaremos el estudio de los morfismos de Poisson, esto es, morfismos que “preservan” el corchete de Poisson de funciones. En la segunda parte del capítulo veremos como una variedad de Poisson puede verse como una variedad foliada por hojas simplécticas.

3.1. Morfismos de Poisson

Definición 3.1.1 Sean $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ y $(M', \{\cdot, \cdot\}_{M'})$ dos variedades de Poisson y $\varphi : M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable. Si para $f', g' \in C^\infty(M')$

$$\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\}_M = \{f', g'\}_{M'} \circ \varphi$$

se dice que φ es un morfismo de Poisson. Si además φ es un difeomorfismo entonces diremos que φ es un isomorfismo de Poisson.

A continuación daremos diversas caracterizaciones de los morfismos de Poisson en términos de la estructura de Poisson Π y del homomorfismo de fibrados vectoriales $\#\Pi : T^*M \rightarrow TM$.

Proposición 3.1.2 Sean $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ y $(M', \{\cdot, \cdot\}_{M'})$ dos variedades de Poisson y $\varphi : M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable. Si Π y Π' denotan las estructuras de Poisson inducidas por $\{\cdot, \cdot\}_M$ y $\{\cdot, \cdot\}_{M'}$, las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) φ es un morfismo de Poisson.
- (b) Para cada $q \in M$, $T_q\varphi \circ \#\Pi \circ T_q^*\varphi = \#\Pi'$
- (c) Para todo $\alpha', \beta' \in \Omega^1(M)$

$$\Pi(\varphi^*(\alpha'), \varphi^*(\beta')) = \Pi'(\alpha', \beta') \circ \varphi.$$

Demostración. Supongamos que se satisface (a). Para probar (b) es suficiente probar que para todo $q \in M$

$$T_q\varphi(\#_{\Pi}(T_q^*\varphi(df'(\varphi(q)))) = \#_{\Pi'}(df'(\varphi(q)))$$

para todo $f' \in C^\infty(M')$
Sea $v \in T_qM$, entonces

$$T_q^*\varphi(df'(\varphi(q)))(v) = df'(\varphi(q))(T_q\varphi(v)) = T_q(f' \circ \varphi)(v)$$

por consiguiente para todo $g' \in C^\infty(M')$

$$\begin{aligned} T_q\varphi(\#_{\Pi}T_q^*\varphi(df'(\varphi(q))))(g') &= T_q\varphi(\#_{\Pi}T_q(f' \circ \varphi))(g') = \#_{\Pi}(T_q(f' \circ \varphi))(T_q(g' \circ \varphi)) = \\ &= \{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\}_M(q) = \{f', g'\}_{M'} \circ \varphi(q) = \\ &= \#_{\Pi'}df'(\varphi(q))(g) \end{aligned}$$

Luego (b) se satisface.

Para probar que (b) \Rightarrow (c) consideramos $\alpha', \beta' \in T_{\varphi(q)}^*M'$

$$\begin{aligned} \Pi(q)(T_q^*\varphi(\alpha'), T_q^*\varphi(\beta')) &= T_q\varphi\#_{\Pi}(T_{\varphi(q)}^*\varphi(\alpha'))(\beta') = \\ &= \#_{\Pi'}(\alpha')(\beta') = \Pi'(\varphi(q))(\alpha', \beta') \end{aligned}$$

Finalmente comprobamos que (c) \Rightarrow (a). Sean $f', g' \in C^\infty(M')$ se sigue que

$$\Pi(\varphi^*(df'), \varphi^*(dg')) = \Pi'(df', dg') \circ \varphi$$

o equivalentemente

$$\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\}_M(q) = \{f', g'\}_{M'}(\varphi(q))$$

esto es, φ es un morfismo de Poisson. □

A continuación veremos algunos ejemplos de morfismos de Poisson

- (1) *Simplectomorfismos:* Sea $\varphi : M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable. Supongamos que ω (respectivamente ω') es una estructura simpléctica sobre M (respectivamente sobre M'). Entonces φ es *simpléctica* si

$$\varphi^*(\omega') = \omega$$

Si φ es un difeomorfismo entonces φ es un *simplectomorfismo*. Todo simplectomorfismo es un isomorfismo de Poisson. En efecto, para todo $f', g' \in C^\infty(M')$

$$\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\}_M = \omega(X_{f' \circ \varphi}, X_{g' \circ \varphi}) = \varphi^*\omega'(X_{f' \circ \varphi}, X_{g' \circ \varphi}) \quad (3.1)$$

Veamos que para todo $q \in M$

$$T_q\varphi(X_{f' \circ \varphi}(q)) = X_{f'}(q) \quad (3.2)$$

3. Morfismos de Poisson y foliación característica

En efecto, para todo $v \in T_q M$

$$\begin{aligned}\omega'_{\varphi(q)}(T_q \varphi(X_{f' \circ \varphi}(q)), T_q \varphi(v)) &= \omega_q(X_{f' \circ \varphi}(q), v) = v(f' \circ \varphi)(q) \\ &= T_q \varphi(v)(f')(\varphi(q)) = \omega'_{\varphi(q)}(X_{f'}(\varphi(q)), T_q \varphi(v))\end{aligned}$$

Como $T_q \varphi(v)$ cubre todo $T_{\varphi(q)} M'$ obtenemos (3.2). Sustituyendo en (3.1) deducimos que

$$\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\} = \omega'(X_{f'}, X_{g'}) \circ \varphi = \{f', g'\}_{M'} \circ \varphi$$

En general si φ es solo un morfismo simpléctico entonces puede ser que φ no sea un morfismo de Poisson. El siguiente ejemplo muestra esta situación. Si M_1 es un punto con forma simpléctica nula y M_2 es una variedad con dimensión no nula entonces $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ es un morfismo simpléctico pero no de Poisson.

- (2) *Isomorfismos cosimplécticos*: Sea $\varphi : M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable. Supongamos que (Φ, η) (respectivamente (Φ', η')) es una variedad cosimpléctica sobre M (respectivamente sobre M'). Entonces φ es un morfismo cosimpléctico si

$$\varphi^*(\Phi') = \Phi \quad \text{y} \quad \varphi^*(\eta') = \eta \quad (3.3)$$

Si φ es un difeomorfismo entonces φ es un *isomorfismo cosimpléctico*. Como en el caso de los simplectomorfismos, todo isomorfismo cosimpléctico es un isomorfismo Poisson. Lo comprobamos, sean $f', g' \in C^\infty(M')$

$$\begin{aligned}\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\}_M &= \Phi(b^{-1}(d(f' \circ \varphi)), b^{-1}(d(g' \circ \varphi))) = \\ &= \varphi^* \Phi'(b^{-1}(d(f' \circ \varphi)), b^{-1}(d(g' \circ \varphi)))\end{aligned} \quad (3.4)$$

Veamos entonces que

$$T_q \varphi(b^{-1}(d(f' \circ \varphi))(q)) = b'^{-1}(df')(q) \quad (3.5)$$

En efecto, sea $v \in T_q M$. Denotamos por $u = T_q \varphi(b^{-1}(df' \circ \varphi))(q)$. Entonces

$$\begin{aligned}b'(u)(T_q \varphi(v)) &= i_u \Phi'(\varphi(q))(T_q \varphi(v)) + \eta'_{\varphi(q)}(u) \eta'_{\varphi(q)}(T_q \varphi(v)) = \\ &= \Phi'(\varphi(q))(u, T_q \varphi(v)) + \eta'(\varphi(q))(u) \eta'(\varphi(q))(T_q \varphi(v))\end{aligned}$$

por consiguiente, usando (3.3)

$$\begin{aligned}b'(T_q \varphi(v)) &= \Phi'(\varphi(q))(b^{-1}(d(f' \circ \varphi))(q), v) + \eta'(q) b^{-1}(d(f' \circ \varphi))(q) \eta'(q)(v) = \\ &= d(f' \circ \varphi)(q)(v) = T_q \varphi(v)(f') = df'(q)(T_q \varphi(v))\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado (3.5).

Al igual que en el ejemplo anterior, como $T_q \varphi(v)$ cubre todo $T_{\varphi(q)} M'$ obtenemos (3.5). Si sustituimos en (3.4)

$$\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\}_M = \Phi'(b^{-1}(df'), b^{-1}(dg')) \circ \varphi = \{f', g'\}_{M'} \circ \varphi$$

También como en el caso simpléctico un morfismo cosimpléctico no es, en general, un morfismo de Poisson.

(3) *Homomorfismos de álgebras de Lie:* Supongamos que $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces el homomorfismo traspuesto $\varphi^* : (\mathfrak{g}')^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es un morfismo de Poisson entre las correspondientes estructuras de Poisson. En efecto

$$\{f \circ \varphi^*, g \circ \varphi^*\}_{\mathfrak{g}'^*} = \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ \varphi^* \quad (3.6)$$

Sea $\mu' \in (\mathfrak{g}')^*$

$$\{f \circ \varphi^*, g \circ \varphi^*\}_{\mathfrak{g}'^*}(\mu') = \mu'([d(f \circ \varphi^*)(\mu'), d(g \circ \varphi^*)(\mu')]_{\mathfrak{g}'})$$

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ \varphi^*(\mu') &= \varphi^*(\mu')[df(\varphi^*(\mu')), dg(\varphi^*(\mu'))]_{\mathfrak{g}} = \mu'(\varphi([df(\varphi^*(\mu')), dg(\varphi^*(\mu'))]_{\mathfrak{g}})) = \\ &= \mu'[\varphi(df(\varphi^*(\mu'))), \varphi(dg(\varphi^*(\mu')))]_{\mathfrak{g}'} \end{aligned}$$

y, como se cumple la igualdad,

$$d(f \circ \varphi^*)(\mu') = \varphi((df)(\varphi^*(\mu')))$$

tenemos que se verifica (3.6).

3.2. Campos de Poisson

Definición 3.2.1 Sean $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y Π el correspondiente 2-vector de Poisson. Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice que es un campo de vectores de Poisson si es un automorfismo infinitesimal de la estructura de Poisson, es decir,

$$\mathcal{L}_X \Pi = 0.$$

A continuación veremos una interpretación geométrica de lo que es un campo de Poisson.

Proposición 3.2.2 Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) X es un campo de vectores de Poisson.
- (b) El flujo (local) $\varphi_t : M \longrightarrow M$ de X es un isomorfismo de Poisson.
- (c) Para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$

$$X\{f, g\} = \{X(f), g\} + \{f, X(g)\} \quad (3.7)$$

3. Morfismos de Poisson y foliación característica

Demostración. Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces $\varphi_{t_0} : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo y, por tanto, $T\varphi_{t_0}\Pi$ determina un bivector sobre M caracterizado por

$$T\varphi_{t_0}\Pi(\alpha, \beta) = \Pi(\varphi_{t_0}^*(\alpha), \varphi_{t_0}^*(\beta))$$

con $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

De igual forma podemos considerar el bivector $T\varphi_{t_0}(\mathcal{L}_X\Pi)$. Entonces

$$\mathcal{L}_X T\varphi_{t_0}\Pi = T\varphi_{t_0}\mathcal{L}_X\Pi.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X T\varphi_{t_0}\Pi(\alpha, \beta) &= X(T\varphi_{t_0}\Pi(\alpha, \beta)) - T\varphi_{t_0}\Pi(\mathcal{L}_X\alpha, \beta) - T\varphi_{t_0}\Pi(\alpha, \mathcal{L}_X\beta) = \\ &= X(\varphi_{t_0}^*(\alpha), \varphi_{t_0}^*(\beta)) - \Pi(\varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X\alpha), \beta) - \Pi(\alpha, \varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X\beta)) \end{aligned}$$

como $\varphi_{t_0}^*\mathcal{L}_X\gamma = \mathcal{L}_X\varphi_{t_0}^*\gamma$ para cualquier $\gamma \in \Omega^1(M)$. Entonces

$$\mathcal{L}_X T\varphi_{t_0}\Pi(\alpha, \beta) = \mathcal{L}_X\Pi(\varphi_{t_0}^*(\alpha), \varphi_{t_0}^*(\beta)) = T\varphi_{t_0}\mathcal{L}_X\Pi(\alpha, \beta)$$

Además usando que

$$\mathcal{L}_X P(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T_{\varphi_t(q)}\varphi_{-t}(P(\varphi_t(q)))$$

Así que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_X T\varphi_{t_0}\Pi(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (T_{\varphi_t(q)}\varphi_{-t})(T\varphi_{t_0}\Pi(\varphi_t(q))) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (T_{\varphi_{t-t_0}(q)}\varphi_{t_0-t})(\Pi(\varphi_{t-t_0}(q))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (T_{\varphi_t(q)}\varphi_{-t})(\Pi(\varphi_t(q))) \end{aligned}$$

Entonces,

$$(T_{\varphi_t(q)}\varphi_{-t})(\Pi(\varphi_t(q))) = (T_{\varphi_0(q)}\varphi_0)(\Pi(\varphi_0(q))) = \Pi(q)$$

para cualquier t y todo $q \in M$, lo que quiere decir que

$$T_q\varphi_t(\Pi(q)) = \Pi(\varphi(q))$$

Esto es, φ_t es un isomorfismo de Poisson.

Para comprobar que $(b) \Rightarrow (a)$, usamos que

$$T_q\varphi_t(\Pi(q)) = \Pi(\varphi_t(q)), \forall t$$

tenemos entonces que

$$T_{\varphi_t(q)}\varphi_{-t}(\Pi(\varphi_t(q))) = \Pi(q)$$

Así

$$\mathcal{L}_X\Pi(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T_{\varphi_t(q)}\varphi_{-t}(\Pi(\varphi_t(q))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Pi(q) = 0$$

Nótese que para cualesquiera dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \Pi(df, dg) &= X(\Pi(df, dg)) - \Pi(\mathcal{L}_X df, dg) - \Pi(df, \mathcal{L}_X dg) = \\ &= X(\Pi(df, dg)) - \Pi(dX(f), dg) - \Pi(df, dX(g)) = \\ &= X\{f, g\} - \{X(f), g\} - \{f, X(g)\}\end{aligned}$$

□

Si X_f es un campo hamiltoniano ,

$$\begin{aligned}X_f\{h, g\} &= \{\{h, g\}, f\} = -\{\{f, h\}, g\} - \{\{g, f\}, h\} = \\ &= \{X_f(h), g\} + \{h, X_f(g)\}\end{aligned}$$

Así, cada campo hamiltoniano es un campo de vectores de Poisson. En particular, el flujo de un campo hamiltoniano está compuesto por isomorfismos de Poisson. Este hecho nos permite dar la siguiente caracterización de un morfismo de Poisson

Proposición 3.2.3 Sean $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ y $(M', \{\cdot, \cdot\}_{M'})$ dos variedades de Poisson y $\varphi : M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) φ es un morfismo de Poisson.

(b) Para cada $f' \in C^\infty(M')$ y cada $q \in M$,

$$T_q\varphi(X_{f' \circ \varphi}(q)) = X_{f'}(\varphi(q))$$

Demostración. Probaremos que para dos funciones $f', g' \in C^\infty(M')$ se tiene la siguiente equivalencia

$$\{f' \circ \varphi, g' \circ \varphi\} = \{f', g'\} \circ \varphi \Leftrightarrow T_q\varphi(X_{f' \circ \varphi}(q)) = X_{f'}(\varphi(q)), \forall q \in M$$

Ya que la primera condición implica que φ es un morfismo de Poisson, por la Proposición 4.1.2 el resultado estaría probado. La anterior equivalencia se deriva de estas igualdades

$$T_q\varphi(X_{f' \circ \varphi}(q))(g') = X_{f' \circ \varphi}(g' \circ \varphi)(q) = \{g' \circ \varphi, f' \circ \varphi\}(q)$$

$$X_{f'}(\varphi(q)) = \{g', f'\}' \circ \varphi(q)$$

para todo $g' \in C^\infty(M')$.

□

3.3. Foliación simpléctica de una variedad de Poisson

En esta sección probaremos que toda variedad de Poisson posee una distribución completamente integrable cuyas hojas son variedades simplécticas.

Definición 3.3.1 Sean $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson, Π la correspondiente estructura de Poisson y $q \in M$ un punto. La imagen de $\#\Pi(q) = C_q$ se denomina espacio característico en el punto q .

Nótese que la dimensión de C_q coincide con el rango de $\#\Pi$ en q . Así, la dimensión del espacio característico es siempre par. Si $\text{rang } \#\Pi(q) = \dim M$ decimos que Π es no degenerado en el punto q . Además, si el rango de $\#\Pi(q)$ no depende del punto q decimos que Π es una estructura de Poisson regular.

Otra manera de describir el espacio característico es en términos de los campos hamiltonianos:

$$C_q = \langle X_f(q) \mid f \in C^\infty(M) \rangle$$

Es inmediato que las dos definiciones son equivalentes.

El espacio característico C_q de una variedad de Poisson M , induce una distribución generalizada (ver apéndice). En efecto,

$$q \in M \longrightarrow C_q \subseteq T_q M$$

es una distribución generalizada ya que está generada por los campos hamiltonianos. La denotamos por \mathcal{C} . El siguiente resultado prueba que \mathcal{C} es una foliación generalizada en M (ver Apéndice) y que la hoja de \mathcal{C} a través de cada punto de M admite una estructura simpléctica.

Teorema 3.3.2 *La distribución característica \mathcal{C} de una variedad de Poisson M es completamente integrable y la estructura de Poisson induce estructuras simplécticas en sus hojas.*

Demostración. En primer lugar, probaremos que \mathcal{C} es invariante y por el Teorema de Frobenius generalizado (ver Apéndice) deducimos que es completamente integrable. Tenemos que ver que para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$

$$T_x \varphi_t^{X_f}(X_g(x)) \in \mathcal{C}_{\varphi_t^{X_f}(x)}$$

donde $\varphi_t^{X_f}$ es el flujo del campo hamiltoniano X_f . En efecto, usando la Proposición 2.2.2 tenemos que

$$\mathcal{L}_{X_f} \Pi = 0$$

3.3. Foliación simpléctica de una variedad de Poisson

y por tanto, de la Proposición 4.2.2

$$T_x \varphi_t^{X_f}(X_q(x)) = X_{g \circ (\varphi_t^{X_f})^{-1}}(\varphi_t^{X_f}(x)) \in \mathcal{C}_{\varphi_t^{X_f}(x)}$$

En consecuencia existe una hoja que pasa a través de cada punto de M . Vamos a probar que cada una de estas hojas tiene una estructura simpléctica. Sea L una hoja, entonces $\{\cdot, \cdot\}$ induce una estructura de Poisson en L como sigue

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\}_L : C^\infty(L) \times C^\infty(L) &\longrightarrow C^\infty(L) \\ (f, g) &\longrightarrow \{f, g\}_L = \{\tilde{f}, \tilde{g}\} \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(M)$ son tales que $\tilde{f}|_L = f$ y $\tilde{g}|_L = g$. Si $q \in L$ tenemos,

$$\{g, f\}_L(q) = X_{\tilde{f}}(\tilde{g})(q) = (T_0 \varphi_q^{X_{\tilde{f}}})(\tilde{g})$$

donde $\varphi_q^{X_{\tilde{f}}}$ es la curva integral del campo de vectores $X_{\tilde{f}}$ con condiciones iniciales $q \in L$. En particular, si la condición inicial está en L , la curva integral completa permanece en L y $\{\cdot, \cdot\}_L$ solo depende de g . Igualmente si intercambiamos f y g obtenemos que $\{\cdot, \cdot\}_L$ solo depende de f , por tanto, $\{\cdot, \cdot\}_L$ está bien definido. Por otra parte, es sencillo comprobar que $\{\cdot, \cdot\}_L$ es \mathbb{R} -bilineal, antisimétrico y satisface las identidades de Jacobi y de Leibniz. Así, $\{\cdot, \cdot\}_L$ es un corchete de Poisson en la hoja L . Finalmente, probaremos que tal estructura de Poisson es no degenerada y por la Proposición 2.3.1 concluimos que es simpléctica. Para ello, mostramos que $\#_{\Pi_L(q)} : T_q^*L \longrightarrow T_qL$ es un isomorfismo, siendo Π_L el bivector de Poisson sobre L . En efecto,

$$T_qL = \langle X_{\tilde{f}}(q) \mid \tilde{f} \in C^\infty(M) \rangle = \langle X_f(q) \mid f \in C^\infty(L) \rangle = \#_{\Pi_L(q)}(T_q^*L)$$

esto es, $\#_{\Pi_L(q)}$ es sobre. Ya que $\dim T_q^*L = \dim T_qL$, $\#_{\Pi_L(q)}$ es un isomorfismo. Por tanto, $\{\cdot, \cdot\}_L$ es no degenerado. \square

Definición 3.3.3 *Las hojas de la foliación característica son conocidas como hojas simplécticas de la variedad de Poisson M .*

De hecho, la estructura simpléctica de la hoja L se puede describir como sigue. Usando que $\#_{\Pi_L(q)}$ es biyectiva, para dos vectores $X, Y \in T_qL$ tenemos $X = \#_{\Pi_L(q)}(\alpha)$ y $Y = \#_{\Pi_L(q)}(\beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in T_q^*L$. Entonces, definimos la estructura simpléctica ω_L en L como

$$\omega_L(q)(X, Y) = \beta(X) = \beta(\#_{\Pi_L(q)}(\alpha)) = \Pi_L(q)(\alpha, \beta).$$

A continuación describiremos la foliación característica en los casos particulares de una variedad simpléctica, cosimpléctica y de Lie-Poisson.

3. Morfismos de Poisson y foliación característica

1. *Variedades simplécticas*: En este caso la foliación característica tiene una sola hoja que resulta ser la propia variedad. Nótese que

$$\#_{\Pi(y)}(T_y^*M) = T_yM, \quad \forall y \in M.$$

2. *Variedades cosimplécticas*: Sea (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica. Entonces para todo $y \in M$

$$\#_{\Pi(y)}(T_y^*M) = \{X_y \in T_yM \mid \eta(y)(X_y) = 0\}$$

En efecto, si $\alpha_y \in T_y^*M$, usando (2.10) y (2.11), deducimos que

$$\begin{aligned} \eta(y)(\#_{\Pi(y)}(\alpha_y)) &= \Phi(y)(b^{-1}(\alpha_y), b^{-1}(\eta(y))) = \\ &= \Phi(y)(b^{-1}(\alpha_y), \xi(y)) = 0 \end{aligned}$$

Ahora si $X_y \in T_yM$ tal que $\eta(y)(X_y) = 0$. Veamos que

$$\#_{\Pi(y)}(b(X_y)) = X_y.$$

Para todo $\alpha_y \in T_y^*M$

$$\begin{aligned} \alpha_y(\#_{\Pi(y)}(b(X_y))) &= \Phi(y)(X_y, b^{-1}(\alpha_y)) = -(i_{b^{-1}(\alpha_y)}\Phi(y))(X_y) = \\ &= \alpha_y(X_y) + \eta(y)(b^{-1}(\alpha_y))\eta(y)(X_y) = \alpha_y(X_y) \end{aligned}$$

Por consiguiente, la foliación característica de M es la distribución regular completamente integrable $\eta = 0$. Nótese que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\eta(X) = \eta(Y) = 0$, entonces

$$0 = d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y])$$

esto es, $\eta([X, Y]) = 0$.

3. *Variedades de Lie-Poisson*: Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Consideramos la *representación coadjunta*, esto es, la acción

$$Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$Ad^*(\alpha)(\xi) = \alpha(T_e I_{g^{-1}}(\xi))$$

tal que $I_{g^{-1}} : G \longrightarrow G$ es el automorfismo

$$I_{g^{-1}}(g') = g^{-1}g'g$$

si $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, una órbita de esta acción para α es el subconjunto

$$G \cdot \alpha = \{Ad_g^*(\alpha) \mid g \in G\}$$

3.3. Foliación simpléctica de una variedad de Poisson

Uno puede probar que (ver, por ejemplo [[LibMar]])

$$T_e Ad_\alpha^*(\xi)(\xi') = -\alpha([\xi, \xi'])$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ y donde e es el elemento neutro del grupo.

Por otra parte, la foliación característica está generada por los hamiltonianos de funciones lineales en \mathfrak{g}^* . Cualquier función lineal $\bar{\xi}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único $\xi \in \mathfrak{g}$ asociado por la relación

$$\bar{\xi}(\alpha) = \alpha(\xi), \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*$$

Entonces para todo $\xi' \in \mathfrak{g}$

$$X_{\bar{\xi}}(\alpha)(\xi') = \alpha([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}}) = T_e Ad_\alpha^*(\xi)(\xi').$$

Así

$$\#_{\Pi(\alpha)} T_\alpha \mathfrak{g}^* = T_e Ad_\alpha^*(\mathfrak{g}).$$

Usando el isomorfismo

$$\begin{aligned} G \cdot \alpha &\longrightarrow G/G_\alpha \\ Ad_g^* \alpha &\longrightarrow [g] \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde G_α es el subgrupo cerrado

$$G_\alpha = \{g \in G \mid Ad_g^* \alpha = \alpha\}$$

Entonces G/G_α es una variedad diferenciable tal que el isomorfismo (3.8) es un difeomorfismo. Deducimos que

$$T_e(G/G_\alpha) \cong T_e G / Ker T_e Ad_\alpha^* \cong T_\alpha(G \cdot \alpha)$$

ya que

$$T_e Ad_\alpha^*(\mathfrak{g}) \cong T_\alpha(G \cdot \alpha)$$

En definitiva hemos visto que las hojas de la foliación característica son las órbitas de la representación coadjunta.

Apéndice

Apéndice A

El Teorema de Frobenius

El *Teorema de Frobenius* caracteriza las distribuciones completamente integrables en términos del corchete de Lie para campos de vectores.

Veamos algunas definiciones y resultados necesarios para comprender el enunciado de dicho teorema.

Definición A.0.4 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y r un entero tal que $r \leq n$. Una distribución r -dimensional en M es una aplicación que a cada punto $x \in M$ asigna un subespacio r -dimensional ε_x del espacio tangente $T_x M$

$$\varepsilon : x \longrightarrow \varepsilon_x \subset T_x M$$

Diremos que un distribución ε es diferenciable si existe un entorno U de x y r campos de vectores X_1, \dots, X_r definidos en U tal que para todo $y \in U$ los vectores $X_1(y), \dots, X_r(y)$ forman una base de ε_y .

El conjunto $\{X_1, \dots, X_r\}$ se dice que es una base local de la distribución en un entorno del punto x .

Un campo de vectores X en M se dice que pertenece a la distribución ε si para todo $x \in M$, $X(x) \in \varepsilon_x$.

Se dice que una distribución ε es involutiva si existe una base local $\{X_1, \dots, X_r\}$ de la distribución en un entorno de cada punto tal que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k X_k, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

donde c_{ij}^k son funciones diferenciables en dicho entorno.

Una variedad integral de una distribución diferenciable ε en M es una subvariedad N de M tal que para todo $y \in N$

$$T_y i(T_y N) \subseteq \varepsilon_y$$

donde $T_y i : T_y N \rightarrow T_y M$ es la aplicación lineal inducida por la inclusión $i : N \rightarrow M$.

Definición A.0.5 Una distribución diferenciable ε es completamente integrable si para todo $x \in M$ existe una carta local $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$, con $x \in U$ tal que los r campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, r$ constituyen una base local en U de ε . En cualquier caso diremos que (U, φ) es un sistema coordenado adaptado a la distribución.

En este caso, tenemos una variedad integral r -dimensional N tal que para todo $y \in N$ se tiene que $T_y N = \varepsilon_y$. En efecto, si (y^1, \dots, y^n) son las coordenadas de y , entonces la variedad integral que pasa por y es el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen

$$x^{r+1} = y^{r+1}, \dots, x^n = y^n$$

esto es, $N = \varphi^{-1}(\{\xi \in \varphi(U) : \xi^j = y^j, j = r+1, \dots, n\})$. De hecho, en este caso la distribución es involutiva pues

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Entonces podemos concluir el siguiente resultado

Proposición A.0.6 Toda distribución completamente integrable es involutiva.

Estamos ahora en condiciones de enunciar la primera forma del Teorema de Frobenius que permite afirmar que el recíproco de la anterior proposición es cierto.

Teorema A.0.7 (Frobenius) Sea ε una distribución r -dimensional e involutiva sobre una variedad diferenciable M de dimensión n . Entonces, para cualquier punto $x_0 \in M$, existe un sistema coordenado $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$ cúbico de lado ε centrado en el origen, alrededor de x_0 , tal que la placa de U definida por las ecuaciones

$$x^{r+h} = \lambda^{r+h}, |\lambda^{r+h}| < \varepsilon, 1 \leq h \leq n-r$$

es una variedad integral de ε .

Existe una segunda versión del Teorema de Frobenius que es equivalente al anterior. Sea $\varepsilon : x \rightarrow E_x$ una distribución diferenciable de dimensión r sobre una variedad diferenciable M de dimensión n . Consideramos el subespacio vectorial de $T_x^* M$ de dimensión $n-r$

$$E_x^0 = \{\omega_x \in T_x^* M : \omega_x(X_x) = 0, \forall X_x \in E_x\}$$

A. El Teorema de Frobenius

esto es, el *anulador* de E_x .

La aplicación $\varepsilon^0 : x \rightarrow E_x^0$ es diferenciable. Como la distribución ε es diferenciable, existen en un entorno de cada punto r campos de vectores diferenciables X_1, \dots, X_r tales que $\{X_i(x)\}$ determina una base del subespacio E_x . Completamos hasta conseguir una base de $T_x M$, $\{X_1(x), \dots, X_r(x), X_{r+1}(x), \dots, X_n(x)\}$. Consideremos la base de 1-formas duales $\{\omega^1, \dots, \omega^r, \omega^{r+1}, \dots, \omega^n\}$, así las $n - r$ 1-formas $\omega^{r+1}, \dots, \omega^n$ son diferenciables y constituyen una base local para la distribución ε^0 .

Recíprocamente, una aplicación diferenciable $\varepsilon^0 : x \rightarrow E_x^0$, siendo E_x^0 un subespacio vectorial de dimensión $n - r$ de $T_x^* M$, define una distribución diferenciable $\varepsilon : x \rightarrow E_x$ de dimensión r .

Enunciamos entonces la segunda forma del Teorema de Frobenius

Teorema A.0.8 *Un sistema diferencial ε de dimensión r en una variedad diferenciable de dimensión n , dado por un sistema diferencial $\varepsilon^0 : x \rightarrow E_x^0$ un subespacio de $T_x^* M$, es completamente integrable, si y sólo si existe una base local $\{\omega^{r+1}, \dots, \omega^n\}$ de ε^0 y para todo ω de ε^0 , existen 1-formas diferenciables $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tales que*

$$d\omega = \sum_{i=r+1}^n \alpha^i \wedge \omega^i$$

La noción de distribución puede generalizarse relajando la condición de que la dimensión del subespacio $\varepsilon_x \subseteq T_x M$ sea constante para todo $x \in M$. De forma más precisa una *distribución generalizada* sobre una variedad de dimensión n es la aplicación

$$\varepsilon : M \rightarrow \varepsilon_x \subseteq T_x M$$

tal que $\varepsilon_x \subseteq T_x M$ es un subespacio de $T_x M$ y para todo $x \in M$ existe un entorno U de x y un número finito de campos $\{X_1(x), \dots, X_r(x)\}$ sobre U tal que

$$\varepsilon_x = \langle X_1(x), \dots, X_r(x) \rangle$$

Las nociones de distribución involutiva y subvariedad integral son las mismas que en el caso estándar. Sin embargo, este no es el caso de la propiedad completamente integrable. La distribución generalizada ε es *completamente integrable* si existe una subvariedad integral conexa maximal L_x de ε (a L_x se le denomina hoja de ε en x) tal que $x \in L_x$. Nótese que la dimensión de L_x puede variar con x y que este hecho establece la diferencia con el caso estándar. Una distribución generalizada completamente integrable es involutiva como en el caso estándar. El recíproco no es cierto en general.

Pero dar un Teorema de Frobenius para distribuciones generalizadas es necesario introducir la noción de *distribución invariante*. Se trata de una distribución para la cual para todo campo de vectores X tangente a ε (esto es, $X(x) \in \varepsilon_x, \forall x \in M$), satisface

$$T\varphi_t(\varepsilon_x) \subseteq \varepsilon_x(\varphi_t(x))$$

donde φ_t es el flujo del campo de vectores X .

Entonces el Teorema de Frobenius para distribuciones generalizadas establece que toda distribución generalizada, invariante es completamente integrable (véase [Su]).

Bibliografía

- [Arn] ARNOL'D V. I. *Small denominators III. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russ. Math. Surveys 18 no. 6 (1963), 85-191.
- [BhaVis] BHASKARA, K. H. AND VISWANATH, K. *Poisson Algebras and Poisson Manifolds*, Pitman Research Notes in Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988.
- [Bry] BRYLINSKI, J. -L. *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. 28 (1988), 93-114.
- [CaHaWei] CANNAS DA SILVA, A., HARTSHORN, K., AND WEINSTEIN, A. *Lectures on Geometric Models for Noncommutative Algebras*, American Mathematical Society in the Berkeley Mathematics Lecture Notes series, 1999.
- [GelDik] GELFAND, I. M. AND DIKII, L. A. *A family of Hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations*, (in Russian), Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint No. 136 (1978); English translation in Collected Papers of Izrail M. Gelfand, S. G. Gindikin, ed., Springer-Verlag, New York (1987), vol 1, pp. 625-646.
- [Ja] JACOBI, C. G. J. *Vorlesungen über Dynamik*, gehalten an der Universität zu Königsberg im Wintersemester 1842-1843 und nach einem von C.W. Borchardt ausgearbeiteten Hefte, herausgegeben von A. Clebsch, zweite revidierte Ausgabe (1884), Chelsea, New York, 1969.
- [Ki] KIRILOV, A. A. *The classification of Poisson homogeneous spaces of compact Poisson Lie groups* (in Russian), Mathematical Physics, Analysis and Geometry 3 (1996) 274-289.
- [Kos] KOSTANT, B. *On the solution to a generalized Schubert cells*, Ann. of Math., 77 (1) (1963), 72-144.
- [LibMar] LIBERMANN, P. AND MARLE, C. -M. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Reidel, Dordrecht, 1987.
- [Lic] LICHNEROWICZ, A. *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom. 12 (1977), 253-300.

- [Lie] S. LIE *Theorie der Transformationsgruppen*, (Zweiter Abschnitt, unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel), Teubner, Leipzig, 1890.
- [MarWei] MARDSEN, J. AND WEINSTEIN, A. *The hamiltonian structure of the Maxwell-Vlasov equations*, Physica 4D (1982), 394-406.
- [Poi] POISSON, S.-D. *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, J. Ecole Polytechnique 8 Cah. 15 (1809), 266-344.
- [Su] SUSSMANN, H. *J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Am. Math. Soc. 180 (1973) 171-188.
- [Va] I. VAISMAN *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Birkhäuser, 1994.
- [Var] VARCHENKO, A. N. AND GIVENTAL, A. B. *The period mapping and the intersection form*, Funct. Anal. Appl. 22 (1988), 1-9.
- [Wei] A. WEINSTEIN *The local structure of Poisson manifolds*, *J. Diff. Geom.* 18, 1983, 523-557.
- [Wei1] WEINSTEIN, A. *Lectures on Symplectic Manifolds*, Regional conference series in mathematics 29, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
- [Wei2] WEINSTEIN, A. *Poisson structures ad Lie algebras*, Astérisque, hors série (1985), 421-434.
- [Wei3] WEINSTEIN, A. *Poisson geometry*, Diff. Geom. Appl., 9 (1998) 213-238.