La Geometría de la Ecuación de Hamilton-Jacobi

Daniel Rodríguez Díaz

Dirigido por Edith Padrón Fernández

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Departamento de Matemática fundamental

Diciembre 2010

Índice general

Introducción

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) llevó a cabo uno de los primeros estudios en óptica geométrica en un medio arbitrario con diferentes índices de refracción. Encontró una expresión de una función característica, que representa la longitud del camino de un rayo, considerada como una función de las posiciones inicial y final y el tiempo. Estas funciones satisfacen unas ecuaciones en derivadas parciales, y determinan las trayectorias de los rayos. Esta idea le sugerió relacionar los rayos y las trayectorias de un sistema mecánico. Así, Hamilton extendió estos conceptos a la Mecánica tras la incorporación de las ideas de Lagrange y otros investigadores de la época en relación con coordenadas generalizadas. La Mecánica hamiltoniana se ha convertido hoy en día en una piedra angular de la Física Teórica.

Sin embargo, Hamilton no se planteó el problema de cómo resolver las ecuaciones resultantes. Fue Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) quien observó que la solución de esta ecuación en derivadas parciales se reduce a la solución de un sistema hamiltoniano de ecuaciones diferenciales ordinarias. Desde entonces la teoría se llama ”Teoría de Hamilton-Jacobi”.

Es de sobra conocido que las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange (ecuaciones diferenciales de segundo orden) para sistemas mecánicos nos describe la dinámica del sistema. Las ligaduras en las posiciones nos obligan a trabajar sobre un espacio de configuración que resulta ser una variedad Q. Geométricamente, el lagrangiano es una función diferenciable del espacio de fases de velocidades (el espacio tangente de una variedad, TQ). Cuando esta función es regular (esto es, el Jacobiano del lagrangiano es regular) podemos introducir una función H (la función hamiltoniana) definida sobre el espacio de fases de momentos (el fibrado cotangente de la variedad, T^*Q). Entonces las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange se convierten (usando la transformación de Legendre) en las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden sobre T^*Q. Geométricamente las soluciones de estas ecuaciones no son más que las curvas integrales del campo hamiltoniano asociado a la función $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ (un campo sobre T^*Q) cuando consideramos la estructura simpléctica canónica sobre T^*Q.

La resolución de las ecuaciones de Hamilton no es un problema trivial. En numerosas ocaciones estas ecuaciones son difíciles de resolver. Por ello es fundamental obtener métodos que simplifiquen su resolución. Uno de estos métodos es el de Hamilton-Jacobi. La ecuación de Hamilton-Jacobi clásica es una ecuación en derivadas parciales de primer orden que involucra a la función hamiltoniana y cuyas soluciones son funciones sobre Q. El método consiste en encontrar una cierta función S sobre Q que satisfaga la ecuación de Hamilton-

Jacobi y que nos permita construir un campo de vectores sobre Q cuyas curvas integrales junto con la función S nos permite generar soluciones de la ecuación de Hamilton a lo largo de las imagenes de dS. Es evidente que estas no son todas las soluciones de la ecuación de Hamilton. Si uno desea obtener todas las soluciones entonces debe abordar la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi total.

En este trabajo detallaremos esta teoría, desarrollando previamente algunos aspectos de la Mecánica Hamiltoniana.

El primer capítulo está dedicado a las nociones y resultados básicos de la geometría simpléctica, herramienta fundamental para el desarrollo del formalismo hamiltoniano. En él definimos la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente de una variedad, gracias a la cual podemos expresar de forma global las ecuaciones de Hamilton.

En el segundo profundizamos en uno de los resultados más importantes de la geometría simpléctica, el Teorema de Darboux, y caracterizaremos las transformaciones entre coordenadas de Darboux a otras coordenadas de Darboux, lo que es interesante a la hora de simplificar la resolución de las ecuaciones de Hamilton.

Y por último, en el capítulo 3 describiremos la ecuación de Hamilton-Jacobi y probaremos la relación que existe entre las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi y las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. La última parte de este capítulo está dedicada al estudio de la ecuación de Hamilton-Jacobi total.

Durante estos últimos años la teoría de Hamilton-Jacobi ha sido extendida a diversos contextos como la Mecánica no holónoma o las Teorías Clásicas de campos.

Los sistemas no holónomos están caracterizados por imponer ligaduras en las velocidades. Este tipo de sistemas aparecen cuando por ejemplo hay rodadura y no deslizamiento. La extensión de la teoría de Hamilton-Jacobi para este tipo de sistemas ha sido un campo de investigación de estos últimos años. Algunas referencias sobre este tema son [Ed, Pa, Ru, Va1, Va2, Va3, Va4, BaMaMaPa, IgLeMa, LeMaMa1, CaGaMaMaMuRo, OB].

La teoría clásica de campos describe la dinámica de los fenómenos físicos macroscópicos descriptibles mediante un campo físico. Algunos intentos de extender la teoría geométrica de Hamilton-Jacobi a teorías clásicas de campo de primer orden están recogidos en los trabajos [LeMaMa2, PaRo1, PaRo2, LeMaMaSaVa].

Agradecimientos: En primer lugar, agradecer a Edith el que me hubiera dado esta oportunidad y sobretodo la dedicación y paciencia que me ha prestado. También agradecer a mis compañeros de carrera por el apoyo recibido durante todo este tiempo.

Capítulo 1

Variedades simplécticas y campos hamiltonianos

Las estructuras simplécticas juegan un papel central en la descripción geométrica de la Mecánica Hamiltoniana. Desde un punto de vista analítico un sistema mecánico es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (*las ecuaciones de Hamilton*). El espacio de fases de un sistema mecánico hamiltoniano (*posiciones y momentos, con ligaduras en las posiciones*) se describe en términos geométricos como el espacio cotangente de una variedad diferenciable (*espacio de configuración del sistema*). Este espacio (que resulta ser de nuevo una variedad) tiene siempre una estructura geométrica especial asociada (*la estructura simpléctica canónica*) con la que podemos desarrollar una formulación geométrica de la Mécanica Hamiltoniana. Así un sistema mecánico se puede describir globalmente como una variedad simpléctica, junto con un campo de vectores (*el campo hamiltoniano*) asociado a una cierta función que se denomina la función Hamiltoniana del sistema.

Este modelo geométrico para la Mecánica Hamiltoniana admite una descripción local en términos de coordenadas que entrelazan la descripción geométrica (con la estructura simpléctica y el campo hamiltoniano) con la descripción analítica (como un sistema de ecuaciones diferenciables de primer orden).

El término simpléctico fue establecido por Herman Weyl que sustituyó el término latino "complexus"por el término griego "symplectikos", tratando de evitar la confusión que se derivaba de llamar al grupo simpléctico grupo de líneas complejo. Tanto el término "complexus"como "symplectikos"se pueden traducir como entrelazado.

En este primer capítulo mostraremos algunas de las nociones y resultados sobre variedades simplécticas y campos hamiltonianos que resultan de utilidad para desarrollar la teoría de Hamilton-Jacobi a la que está dedicado este trabajo.

1.1. Espacios vectoriales simplécticos

Con el fin de introducir la noción de estructura simpléctica sobre una variedad diferenciable arbitraria, desarrollaremos en esta sección la teoría de este tipo de estructuras sobre espacios vectoriales de dimensión finita.

A lo largo de este texto consideraremos V como espacio vectorial de dimensión m y denotaremos por V^* a su espacio vectorial dual.

Definición 1.1.1 *Una k-forma (o forma de grado k) sobre V es una aplicación*

$$\alpha : V\times \overset{k}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

multilineal y antisimétrica.

Definición 1.1.2 *Sean α y β formas de grado k_1 y k_2, respectivamente. Definimos el producto exterior de α y β como la siguiente (k_1+k_2)-forma*

$$\begin{array}{rll} \alpha\wedge\beta : & V\times \overset{k_1+k_2}{\ldots} \times V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (v_1,\ldots,v_{k_1+k_2}) & \longmapsto (\alpha\wedge\beta)(v_1,\ldots,v_{k_1+k_2}) \end{array}$$

$$(\alpha\wedge\beta)(v_1,\ldots,v_{k_1+k_2}) := \sum_\sigma (-1)^\sigma \alpha(v_{i_1},\ldots,v_{i_{k_1}})\beta(v_{j_1},\ldots,v_{j_{k_2}})$$

donde

$$\sigma = \begin{cases} 0 & si\ \{i_1,\ldots,i_{k_1},j_1,\ldots,j_{k_2}\}\ es\ una\ permutación\ par\ de\ \{1,\ldots,k_1+k_2\} \\ 1 & si\ \{i_1,\ldots,i_{k_1},j_1,\ldots,j_{k_2}\}\ es\ una\ permutación\ impar\ de\ \{1,\ldots,k_1+k_2\} \end{cases}$$

con $i_1 < \ldots <_{k_1}$ y $j_1 < \ldots < j_{k_2}$. Cada 2-forma $\omega : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre V, define un morfismo de espacios vectoriales $b_\omega : V \longrightarrow V^*$ dado por

$$b_\omega(v)(v') = \omega(v,v') \qquad \forall\, v,v'\in V. \tag{1.1}$$

Si A es la matriz de orden $m\times m$ asociada al morfismo de espacios vectoriales b_ω, entonces

$$A^t = -A.$$

Recíprocamente toda matriz real A de orden $m\times m$ que satisface esta propiedad induce una 2-forma sobre V.

Si b_ω es sobre o inyectiva, entonces b_ω es un isomorfismo.

Definición 1.1.3 *Si $b_\omega : V \longrightarrow V^*$ es un isomorfismo, decimos que la 2-forma ω sobre el espacio vectorial V es no degenerada.*

En tal caso la matriz A asociada a b_ω es regular, esto es, $det\,A \neq 0$. Recíprocamente, cualquier matriz que satisface que $A^t = -A$ y que $det\,A\neq 0$ define una 2-forma no degenerada.

La siguiente proposición caracteriza las 2-formas no degeneradas.

Proposición 1.1.4 *Sea ω una 2-forma sobre V. Entonces ω es no degenerada si y sólo si se satisface la siguiente propiedad*

$$\omega(v_1, v_2) = 0 \ , \ \forall\, v_2 \in V \ \Rightarrow \ v_1 = 0 \tag{1.2}$$

Demostración. Sea v_1 un elemento de V tal que $\omega(v_1, v_2) = 0$, para todo $v_2 \in V$. Entonces $v_1 \in Ker\, b_\omega$. Como b_ω es un isomorfismo lineal, se tiene que $Ker\, b_\omega = \{0\}$ y, por tanto, $v_1 = 0$.

Recíprocamente, supongamos que (1.2) se satisface. Entonces el homomorfismo de espacios vectoriales $b_\omega : V \longrightarrow V^*$ es un isomorfismo. En efecto, de la condición (1.2) se tiene que $Ker\, b_\omega = \{0\}$ y la biyectividad de b_ω se deduce del hecho que $dim\, V = dim\, V^*$.

□

Una cuestión interesante es si sobre cualquier espacio vectorial uno puede construir una 2-forma no degenerada. La respuesta a esta cuestión es negativa, como veremos a continuación. Mostraremos que la existencia de este tipo de 2-formas implica restricciones sobre la dimensión del espacio vectorial.

Teorema 1.1.5 *Si ω es una 2-forma no degenerada sobre V, entonces $dim\, V = 2n$. Además, existe una base $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ de V tal que*

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \qquad y \qquad \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \quad \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}. \tag{1.3}$$

Demostración. Sea A la matriz de orden $m \times m$ asociada a b_ω. Como $A^t = -A$ y $\det\, A \neq 0$, deducimos que

$$\det A = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^m \det A.$$

Así, $m = dim\, V$ debe ser un número par.

Supongamos que $dim\, V = 2n$. Sea $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ una base de V. Por la Proposición 1.1.4 tenemos que para cada v_i existe al menos un v_j con $j \neq i$ tal que $\omega(v_i, v_j) \neq 0$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\omega(v_i, v_{i+n}) = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Una base que verifica la condición (1.3) es construida de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 \\
f_1 &= v_{1+n} \\
e_i &= \sum_{j=1}^{i-1} (-\omega(v_i, e_{j+n}) e_j + \omega(v_i, e_j) f_j) + v_i \\
f_i &= \sum_{j=1}^{i-1} (-\omega(v_{i+n}, e_{j+n}) e_j + \omega(v_{i+n}, e_j) f_j) + v_{i+n}.
\end{aligned}$$

□

Este resultado nos permite obtener una descripción simple de la 2-forma no degenerada en términos de una cierta base.

Proposición 1.1.6 *Si ω es una 2-forma sobre V, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *ω es no degenerada.*

2. *Existe una base $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ de V tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge f^i,$$

   donde $\{e^i, f^i\}_{i=1}^n$ es la base dual de $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$.

3. *$\omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega \not\equiv 0$.*

Demostración.

1. ⇒ 2. Como ω es una 2-forma no degenerada sobre V, de la Proposición 1.1.5 tenemos que existe una base $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ de V verificando la condición (1.3). Denotaremos por $\{e^i, f^i\}_{i=1}^n$ a la base dual de $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$.

Sean u_1, $u_2 \in V$. Entonces

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 e_i + \mu_i^1 f_i \qquad \text{y} \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_i + \mu_i^2 f_i\,,$$

donde $\lambda_i^1 = e^i(u_1)$, $\mu_i^1 = f^i(u_1)$, $\lambda_i^2 = e^i(u_2)$ y $\mu_i^2 = f^i(u_2)$. Por consiguiente,

$$\omega(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^1 \mu_i^2 - \mu_i^1 \lambda_i^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} e^i \wedge f^i \right) (u_1, u_2).$$

2. ⇒ 3. Si $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ es una base de V y denotamos por $\{e^i, f^i\}_{i=1}^n$ a la base dual de $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$.

Usando la propiedades de antisimetría y la distributiva respecto de la suma del producto exterior de 1-formas, se prueba fácilmente que

$$\omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega = n!(e^1 \wedge f^1) \wedge \ldots \wedge (e^n \wedge f^n)$$

Si evaluamos dicha expresión en $(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)$ obtenemos

$$(\omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega)(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)) = n! \neq 0.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Como $\omega\wedge \overset{n}{\dots} \wedge\omega \neq 0$, existe $(v_1, \dots, v_{2n}) \in V\times \overset{2n}{\dots} \times V$, tal que

$$(\omega\wedge \overset{n}{\dots} \wedge\omega)(v_1, \dots, v_{2n}) \neq 0.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad[1], que $\omega(v_i, v_{i+n}) = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Además, se tiene que $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ determina una base de V. En efecto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v_{2n} = \sum_{i=1}^{2n-1} \lambda_i v_i$. Entonces

$$(\omega\wedge \overset{n}{\dots} \wedge\omega)\left(v_1, \dots, v_{2n-1}, \sum_{i=1}^{2n-1} \lambda_i v_i\right) = 0.$$

Nótese que a partir de $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ podemos construir una base $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ de V que verifica la condición (1.3) de la misma forma que en la prueba de la Proposición 1.1.5.

Sea v_0 un elemento de V tal que $\omega(v_0, v) = 0$ para todo $v \in V$. Supongamos que $v_0 \neq 0$, entonces $v_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \lambda_{i+n} f_i$ con $\lambda_{i_0} \neq 0$ para algún $i_0 \in \{1, \dots, 2n\}$. Se tiene que:

a) Si $i_0 \leq n$, entonces $\omega(v_0, f_{i_0}) = \lambda_{i_0} \neq 0$.

b) Si $i_0 > n$, entonces $\omega(v_0, e_{i_0-n}) = -\lambda_{i_0} \neq 0$.

En ambos casos llegamos a una contradicción con la hipótesis. Luego $v_0 = 0$. Usando la Proposición 1.1.4, concluimos que ω es no degenerada.

□

Introducimos ahora la noción de estructura simpléctica sobre un espacio vectorial.

Definición 1.1.7 *Si ω es una 2-forma sobre V no degenerada, entonces diremos que ω es una estructura simpléctica en V y que (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico.*

Ejemplo 1.1.8 *La 2-forma simpléctica estándar de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2n}$. Denotamos por $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ a las coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$ respecto de una base en $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

define una estructura simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$.

[1] Como $(\omega\wedge \overset{n}{\dots} \wedge\omega)(v_1, \dots, v_{2n}) \neq 0$ existirá una permutación $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{2n}}\}$ de $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ en la que $\prod_{j=1}^n \omega(v_{i_j}, v_{i_j+n}) \neq 0$, luego $\omega(v_{i_j}, v_{i_j+n}) \neq 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Además, si $\omega(v_i, v_{i+n}) \neq 0$ podemos considerar que toma el valor 1, pues basta intercambiar v_i por $\frac{v_i}{\omega(v_i, v_{i+n})}$.

En la categoría de los espacios simplécticos se define de forma natural la noción de aplicación simplética.

Definición 1.1.9 *Sea $h : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales simplécticos (V, ω) y (V', ω'). Diremos que h es simpléctica si*

$$\omega'(h(u), h(v)) = \omega(u, v), \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Si además h es biyectiva, entonces se dice que h es un simplectomorfismo.

Proposición 1.1.10 *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Entonces toda aplicación simpléctica $h : V \longrightarrow V$ es un simplectomorfismo.*

Demostración. Si probamos que h es inyectiva, es decir, $Ker\, h = \{0\}$, entonces habremos visto que h es biyectiva por ser una aplicación entre espacios vectoriales de la misma dimensión. En efecto, si $v \in Ker\, h$ entonces $\omega(v, u) = \omega'(h(v), h(u)) = 0$ para todo $u \in V$. De la no degeneración de ω concluimos que $v = 0$.

□

1.2. Estructuras simplécticas sobre variedades diferenciables

En esta sección generalizamos la noción de estructura simpléctica para una variedad diferenciable. Veremos que, como en el caso de espacios vectoriales simplécticos, la existencia de este tipo de estructuras condiciona la dimensión de la variedad sobre la que está definida.

Antes de iniciar esta sección fijaremos algunas notaciones. Supongamos que M es una variedad diferenciable de dimensión n. Denotaremos por

- $C^\infty(M, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones reales diferenciables sobre M.
- $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de los campos de vectores sobre M.
- $\Omega^k(M)$ el espacio de las k-formas sobre M.
- $\pi_M : TM \longrightarrow M$ el fibrado tangente sobre M.
- $\pi_M^* : T^*M \longrightarrow M$ el fibrado cotangente sobre M.
- d la diferencial exterior de formas sobre M.

Sea ω una 2-forma sobre una variedad diferenciable M. Consideremos la siguiente aplicación diferenciable $b_\omega : TM \longrightarrow T^*M$

$$b_\omega(x, v) = (x, b_{\omega_x}(v)), \qquad \forall\, x \in M, \quad \forall\, v \in T_xM$$

donde $b_{\omega_x} : T_xM \longrightarrow T_x^*M$ es la aplicación lineal asociada a la 2-forma ω_x sobre T_xM.

Si U es un entorno coordenado de M y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las correspondientes coordenadas en U, entonces la expresión local de b_ω es

$$b_\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} dx_j$$

donde ω_{ij} son las funciones asociadas a ω por la relación

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

De hecho, $b_\omega : TM \longrightarrow T^*M$ es un morfismo de fibrados vectoriales sobre la identidad (ver Apéndice A), esto es, el siguiente diagrama es conmuntativo

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "b_\omega"] \arrow[d, "\pi"'] & T^*M \arrow[d, "\pi^*"] \\ M \arrow[r, "1_M"] & M \end{tikzcd}$$

y $b_{\omega_x} : T_xM \longrightarrow T_x^*M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para todo $x \in M$.

Por consiguiente, b_ω induce un morfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos que denotaremos igualmente por

$$b_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$

definido por $b_\omega(X) = i_X\omega$ (ver Apéndice A).

Definición 1.2.1 *Sean M una variedad de dimensión n y ω una 2-forma sobre M . Diremos que ω es no degenerada si*

$$\omega_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \forall\, x \in M$$

es una 2-forma no degenerada.

Veamos a continuación algunas propiedades de las 2-formas no degeneradas.

Proposición 1.2.2 *Sea ω una 2-forma no degenerada sobre la variedad M. Entonces:*

1. *$\dim M = 2n$.*

2. *ω define una forma de volumen en M, es decir,*

$$(\omega \wedge \overset{n}{\ldots} \wedge \omega)(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in M.$$

3. *$b_\omega : TM \longrightarrow T^*M$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales. Además, induce un isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos que denotaremos también por $b_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$.*

Demostración. Como ω es una 2-forma no degenerada, se tiene que $\omega_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ es una 2-forma no degenerada sobre T_xM, para cualquier $x \in M$. Luego $dim\, T_xM = 2n$ y, por consiguiente, $dim\, M = = dim\, T_xM = 2n$. Con este argumento queda probado 1.

El apartado 2. es consecuencia directa de la Proposición 1.1.6 (apartado 3.).

Consideremos un entorno coordenado U de M y $(x_1, \ldots, x_{2n})$ sus respectivas coordenadas locales. Entonces en U

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j \text{ con } \omega_{ij} \in C^\infty(U, \mathbb{R}).$$

De la no degeneración de ω deducimos que la matriz (ω_{ij}) es regular. Denotamos por (ω^{ij}) su inversa con $\omega^{ij} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Entonces

$$b_\omega^{-1}(dx_i) = \sum_{j=1}^{2n} \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Esto es, $b_\omega : TM \longrightarrow T^*M$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre la identidad en M. Por consiguiente (ver Apéndice A) b_ω induce un isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos

$$b_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M).$$

□

Podemos ahora introducir la noción de estructura simpléctica sobre una variedad.

Definición 1.2.3 *Sea ω una 2-forma sobre la variedad M. Diremos que ω es simpléctica si es no degenerada y cerrada, es decir, $d\omega = 0$. En tal caso se dice que (M, ω) es una varidedad simpléctica.*

Ejemplo 1.2.4 *La estructura simpléctica canónica sobre el fibrado cotangente.*

Sea Q una variedad de dimensión m. Consideremos $\pi_Q : T^*Q \longrightarrow Q$ el fibrado cotangente.

Introduciremos a continuación la 1-forma de Liouville $\lambda_Q : T^*Q \longrightarrow T^*(T^*Q)$ sobre T^*Q como sigue

$$\lambda_Q(\alpha_x)(v) = \alpha_x(T_{\alpha_x}\pi_Q^*(v)) \quad \forall \alpha_x \in T_x^*Q, \forall v \in T_{\alpha_x}(T^*Q)$$

donde $\pi_Q^* : T^*Q \longrightarrow Q$ es la proyección canónica.

Si U es un entorno coordenado de Q y $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ las correspondientes coordenadas en $(\pi_Q^*)^{-1}(U)$. Entonces, la expresión local de λ_Q es

$$\lambda_Q = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i. \tag{2.4}$$

La 2-forma simpléctica canónica sobre Q está definida por

$$\omega_Q = -d\lambda_Q \in \Omega^2(T^*Q).$$

Se puede probar fácilmente que ω_Q es simpléctica usando que $d^2 = 0$ y la expresión local de λ_q (ver (2.4)). La expresión local de ω_Q es entonces

$$\omega_Q = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i.$$

1.3. Aplicaciones simplécticas y simplectomorfismos

En la categoría de las estructuras simplécticas los morfismos (respectivamente isomorfismos) se denominan aplicaciones simplécticas (respectivamente simplectomorfismos).

Definición 1.3.1 *Sean (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas de dimensión $2n$ y $h : M_1 \longrightarrow M_2$ una aplicación diferenciable. Diremos que h es simpléctica si $h^*\omega_2 = \omega_1$, es decir,*

$$(\omega_2)_{h(x)}(T_x h(u), T_x h(v)) = (\omega_1)_x(u, v) \quad \forall x \in M_1,\ \forall u, v \in T_x M_1.$$

Si h es además biyectiva diremos que es un simplectomorfismo.

Veamos que de hecho toda aplicación simpléctica entre dos variedades de la misma dimensión es un difeomorfismo local.

Proposición 1.3.2 *Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas de dimensión $2n$. Si la aplicación $h : M_1 \longrightarrow M_2$ es simpléctica, entonces h es un difeomorfismo local. Además, si h es un simplectomorfismo, entonces es también un difeomorfismo.*

Demostración. Sea x un elemento de M_1. Comprobemos que $T_x h : T_x M_1 \longrightarrow T_{h(x)} M_2$ es biyectiva. Sea $v \in Ker\, T_x h$, entonces

$$\begin{aligned}(\omega_1)_x(v, u) &= (\omega_2)_{h(x)}(T_x h(v), T_x h(u)) \\ &= (\omega_2)_{h(x)}(0, T_x h(u)) = 0\end{aligned}$$

para todo $u \in T_x M_1$.

Por ser ω_1 no degenerada tenemos que $v = 0$ y, por tanto, $T_x h$ es inyectiva. Como $dim\, T_x M_1 = dim\, T_{h(x)} M_2$, entonces $T_x h$ es biyectiva. Consideremos (U, φ) carta de M_1 en x y (V, ψ) carta de M_2 en $h(x)$ tal que $h(U) \subseteq V$. Nota que la matriz asociada a $T_x h$, $J(\psi \circ h \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_1, \ldots, x_{2n}))$, es regular por ser $T_x h$ biyectiva. Por tanto, como consecuencia del Teorema de la Aplicación Inversa, tenemos que existe un entorno W de x tal que $h_{|W}$ es un difeomorfismo.
$\square$

Proposición 1.3.3 *Si sobre el fibrado cotangente de una variedad Q consideramos la estructura simpléctica canónica definida en el Ejemplo 1.2.4, tenemos que si $F : Q \longrightarrow Q$ es un difeomorfismo, entonces $T^*F : T^*Q \longrightarrow T^*Q$ es un simplectomorfismo.*

Demostración. Como F es difeomorfismo, tenemos que T^*F es biyectiva, con lo que nos faltaría ver que F es simpléctica para probar el resultado. Veamos que $(T^*F)^*\lambda_Q = \lambda_Q$. En tal caso se tendría que

$$(T^*F)^*(\omega_Q) = -(T^*F)^*(d\lambda_Q) = -d(T^*F)^*(\lambda_Q) = -d\lambda_Q = \omega_Q.$$

Consecuentemente T^*F sería simpléctica.

En primer lugar observamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T^*Q \arrow[r, "T^*F"] \arrow[d, "\pi_Q^*"'] & T^*Q \arrow[d, "\pi_Q^*"] \\
Q \arrow[r, "F^{-1}"] & Q
\end{tikzcd}$$

Así, usando la definición de λ_Q y este diagrama se tiene

$$\begin{aligned}
(T^*F)^*(\lambda_Q)(\alpha_x)(v) &= \lambda_Q(T^*F(\alpha_x))\,(T_{\alpha_x}(T^*F)(v)) \\
&= (T^*F)(\alpha_x)\,(T_{T^*F(\alpha_x)}\pi_Q^*(T_{\alpha_x}(T^*F)(v)) \\
&= (T^*F)(\alpha_x)\,(T_{\alpha_x}(F^{-1}\pi_Q^*)(v)) \\
&= \alpha_x(T_{F^{-1}(\alpha_x)}F \circ T_{\alpha_x}F^{-1})(T_{\alpha_x}\pi_Q^*(v)) \\
&= \alpha_x(T_{\alpha_x}\pi_Q^*(v)) = \lambda_Q(\alpha_x)(v)
\end{aligned}$$

para todo $\alpha_x \in T_x^*Q$ y $v \in T_{\alpha_x}(T^*Q)$. $\square$

Existen unos campos de vectores, que denominaremos simplécticos, cuyo flujo está determinado por simplectomorfismos.

Definición 1.3.4 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Diremos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo simpléctico si su flujo consta de simplectomorfismos, es decir, si $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ es el flujo de X entonces $\phi_t : M \longrightarrow M$ es un simplectomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$.*

En lo que sigue trabajaremos con flujos globales no locales para simplificar la notación. Pero el lector debe tener en cuenta que en principio asociado a un campo de vectores sólo tenemos un flujo local.

A continuación caracterizaremos los campos simplécticos a través de la derivada de Lie y el isomorfismo $b_\omega : TQ \longrightarrow T^*Q$.

Proposición 1.3.5 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Entonces son equivalentes*

1. *$X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo simpléctico*
2. *$\mathfrak{L}_X\omega = 0$*
3. *Para todo $x \in M$, existen un entorno U y una aplicación diferenciable $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$b_{\omega_{x'}}(X(x')) = (df)_{x'} \quad \forall x' \in U.$$

Demostración.

1. $\Leftrightarrow$ 2. Supongamos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo simpléctico. Entonces (ver Apéndice B)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_X\omega)_x(v,u) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t^*\omega)_x(v,u) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(\omega)_x(v,u) = 0\end{aligned}$$

para todo $x \in M$ y todo $v, u \in T_xM$.

Recíprocamente, supongamos que X es un campo de vectores sobre M y $\mathfrak{L}_X\omega = 0$. Consideremos $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ el flujo de X. Obsérvese que

$$0 = (\mathfrak{L}_X\omega)_x(v.u) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t^*\omega)_x(v,u) \quad \forall x \in M \text{ y } \forall v, u \in T_xM.$$

Esta relación implica que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{|t=t_0}(\phi_t^*\omega)_x(v,u) &= (\mathfrak{L}_X(\phi_{t_0}^*\omega))_x(v,u) \\ &= (\phi_{t_0}^*(\mathfrak{L}_X\omega))_x(v,u) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\phi_t^*\omega$ no depende de t y, como $\phi_0^*\omega = \omega$, tenemos que $\phi_t^*\omega = \omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, X es un campo simpléctico.

2. $\Leftrightarrow$ 3. Supongamos $\mathfrak{L}_X\omega = 0$. Entonces, como ω es cerrada, se tiene que $d\,i_X\omega = 0$. Nótese que $i_X\omega = \flat_\omega(X)$, por consiguiente $d\,\flat_\omega(X) = 0$. En virtud del Lema de Poincaré (ver Apéndice B, Proposición B.2.1), se tiene que para todo $x \in M$ existen un entorno U y $f \in C^\infty(M)$ tal que

$$\flat_{\omega_{x'}}(X(x')) = (df)_{x'} \quad \forall x' \in U.$$

Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in M$ existen un entorno U y una función $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ tal que $\flat_{\omega_{x'}}(X(x')) = (df)_{x'}$ para todo $x' \in U$. Entonces $\flat_\omega(X)$ es una 1-forma cerrada y, por consiguiente, $d\,i_X\omega = 0$. Como ω es cerrada concluimos que $\mathfrak{L}_X\omega = 0$.

□

Nota 1.3.6 *Esta caracterización nos proporciona un método para obtener de manera sencilla campos hamiltonianos. Basta tomar una función $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ y considerar el campo $X_f = \flat_\omega^{-1}(df)$.*

A continuación consideraremos el caso de funciones $f : M \longrightarrow M$ con (M,ω) una estructura simpléctica. Queremos caracterizar el hecho de que este tipo de funciones sean simplécticas en términos de un tipo especial de subvariedades que llamaremos lagrangianas.

Sea (V,ω) un espacio vectorial simpléctico y $U \subseteq V$ subespacio de V. El *ortogonal simpléctico* de U es el subespacio de V

$$U^\perp = \{v \in V / \omega(v,u) = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

Entonces

$$dim\, U^\perp + dim\, U = dim\, V \tag{3.5}$$

y $(U^\perp)^\perp = U$.

Definición 1.3.7 *Sea (M,ω) una variedad simpléctica y $N \subseteq M$ una subvariedad de M. Diremos que N es*

1. *simpléctica si para todo $x \in N$ se tiene que $T_xN \cap T_xN^{\perp} = \{0\}$.*
2. *isótropa si para todo $x \in N$ se tiene $T_xN \subseteq (T_xN)^{\perp}$.*
3. *coisótropa si para todo $x \in N$ se tiene $(T_xN)^{\perp} \subseteq T_xN$.*
4. *lagrangiana si para todo $x \in N$ se tiene $(T_xN)^{\perp} = T_xN$.*

Proposición 1.3.8 *Sea (M,ω) una variedad simpléctica y $N \subseteq M$ una subvariedad de M. Entonces N es una subvariedad lagrangiana si y solo si $i^*(\omega) = 0$ y $dim\, N = \frac{1}{2} dim\, M$, donde $i : N \longrightarrow M$.*

Demostración. Supongamos que T_xN es un subespacio lagrangiano de T_xM para todo $x \in N$. Entonces $dim\, T_xN = dim\, T_xN^{\perp}$ y de (3.5) deducimos que $dim\, T_xN = \frac{1}{2} dim\, T_xM$. Además, al ser T_xN lagrangiano, en particular isótropo, se tiene que

$$i^*(\omega_x)(v_1, v_2) = \omega_x(v_1, v_2) = 0$$

para todo $v_1, v_2 \in T_xN$.

Recíprocamente, si $dim\, T_xN = \frac{1}{2} dim\, T_xM$, de (3.5) deducimos que $dim\, T_xN^{\perp} = dim\, T_xN$. Además, como T_xN es isótropo por hipótesis, se tiene finalmente que $T_xN = T_xN^{\perp}$.

□

Sea (M,ω) una variedad simpléctica de dimensión n. Estamos interesados en caracterizar las aplicaciones simplécticas $f : M \longrightarrow M$ en término de subvariedades lagrangianas. Para ello consideramos sobre $M \times M$ la estructura simpléctica dada por

$$\begin{aligned} (\omega, -\omega)_{(x,y)} : \quad T_xM \times T_yM \times T_xM \times T_yM \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2, v_1', v_2') \quad &\longrightarrow \omega_x(v_1, v_1') - \omega_y(v_2, v_2') \end{aligned}$$

para todo $x \in M$, y la subvariedad regular de dimensión n (el grafo de f)

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))/x \in M\} \subseteq M \times M.$$

Recordemos que $T_{(x,f(x))}\Gamma_f$ puede identificarse con

$$\{(v, T_xf(v)) \in T_xM \times T_{f(x)}M/v \in T_xM\}$$

para todo $x \in M$.

Proposición 1.3.9 *Sea $f : M \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable sobre una variedad simpléctica (M,ω) de dimensión n. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *f es simpléctica.*

2. *El grafo de f, Γ_f, es una subvariedad lagrangiana de $TM \times TM$ respecto de $(\omega, -\omega)$.*

3. *$i^*(\omega, -\omega) = 0$, donde $i : \Gamma_f \longrightarrow M \times M$ es la inclusión.*

Demostración. Supongamos que f es simpléctica. Entonces

$$T_{(x,f(x))}\Gamma_f = (T_{(x,f(x))}\Gamma_f)^{\perp}$$

para cualquier $x \in M$. En efecto, si $(v_1, T_x f(v_1)) \in T_{(x,f(x))}\Gamma_f$, entonces, usando que f es simpléctica, tenemos que

$$(\omega, -\omega)_x(v_1, T_x f(v_1))(v_1', T_x f(v_1')) = \omega_x(v_1, v_1') - \omega_{f(x)}(T_x f(v_1), T_x f(v_1')) = 0$$

Así $(v_1, T_x f(v_1)) \in (T_{(x,f(x))}\Gamma_f)^{\perp}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} dim\,(T_{(x,f(x))}\Gamma_f)^{\perp} &= dim\,(T_x M \times T_x M) - dim\,T_{(x,f(x))}\Gamma_f \\ &= 2n - n = dim\,(T_{(x,f(x))}\Gamma_f). \end{aligned}$$

En definitiva, Γ_f es una subvariedad lagrangiana para todo $(v_1, v_2) \in T_x M \times T_x M$.

Recíprocamente, si Γ_f es una subvariedad lagrangiana se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega, -\omega)_x((v_1, T_x f(v_1))(v_2, T_x f(v_2))) \\ &= \omega_x(v_1, v_2) - \omega_{f(x)}(T_x f(v_1), T_x f(v_2)), \end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2 \in T_x M$.

Por tanto, f es simpléctica.

La equivalencia 2. con 3. es consecuencia de la Proposición 1.3.8.

□

1.4. Campos hamiltonianos sobre una variedad simpléctica y corchete de Poisson

Tal y como comentabamos al inicio de este capítulo, las herramientas fundamentales para la descripción geométrica de la Mecánica Hamiltoniana son las estructuras simplécticas del fibrado cotangente de una variedad (el espacio de configuracion) y la función Hamiltoniana (la energía total del sistema) definida sobre el espacio de fases. Con ellos se puede construir un campo de vectores sobre el fibrado cotangente cuyas curvas integrales son las soluciones a las ecuaciones de Hamilton.

Para la determinación de las soluciones de la ecuaciones de Hamilton es útil trabajar con el corchete de Poisson de funciones sobre el fibrado cotangente. Estas ideas se pueden extender al contexto de las variedades simplécticas. De hecho, existen sistemas mecánicos en donde el espacio de fases no es el fibrado cotangente de una variedad (después por ejemplo de una reducción).

En esta sección introduciremos las nociones de campo hamiltoniano y corchete de Poisson sobre una variedad simpléctica.

Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Al campo X_H sobre M caracterizado por

$$b_\omega(X_H) = dH \tag{4.6}$$

se le denomina *campo hamiltoniano de* H.

Recordemos que dada una variedad simpléctica (M, ω) podemos definir el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulo $b_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ lo que nos permite garantizar la existencia y unicidad del campo hamiltoniano X_H para toda aplicación diferenciable $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 1.4.1 *Sean (M, ω) variedad simpléctica y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Entonces X_H es un campo simpléctico.*

Demostración. Teniendo en cuenta la caracterización de campos simplécticos dada en la Proposición 1.3.5, basta comprobar que $\mathfrak{L}_{X_H}\omega = 0$. En efecto, puesto que ω es una 2-forma cerrada se tiene que

$$\mathfrak{L}_{X_H}\omega = d\, i_{X_H}\omega + i_{X_H} d\omega = d\,(dH) = 0$$

y, por tanto, X_H es un campo simpléctico. $\square$

Por otra parte, si (M, ω) es una variedad simpléctica, entonces podemos definir un corchete de funciones

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dado por $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$, al que denominamos *corchete de Poisson asociado a* (M, ω).

Nótese que de inmediato se tiene que

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) = i_{X_F}\omega(X_G) = X_G(F) = -X_F(G).$$

El corchete de Poisson asociado a (M, ω) es antisimétrico, esto es,

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

lo cual es consecuencia de la antisimetría de la forma simpléctica. Evidentemente es $\mathbb{R}$-lineal. Además,

Proposición 1.4.2 *El corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ asociado a una variedad simpléctica:*

1. *Satisface la regla de Leibniz, esto es,*

$$\{F \cdot G, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}.$$

2. $[X_F, X_G] = -X_{\{F,G\}}$.

3. *Satisface la identidad de Jacobi, esto es,*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0.$$

4. *Es no degenerado, esto es, para todo $x \in M$*

$$\{F, G\}(x) = 0$$

para todo $G \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ si y sólo si $dF(x) = 0$.

Demostración. 1. Es consecuencia de que de (4.6) uno puede deducir que

$$X_{F \cdot G} = F\, X_G + G\, X_F.$$

Demostrar 2. es equivalente a probar que

$$b_\omega([X_F, X_G]) = -d(\omega(X_F, X_G))$$

o lo que es igual, para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\omega([X_F, X_G], X) = -X(\omega(X_F, X_G)).$$

Esta ecuación se deduce del hecho que

$$d\omega(X_F, X_G, X) = 0.$$

3. es entonces consecuencia de 2., de la identidad de Jacobi para el corchete de campos y del hecho que b_ω es un isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos.

Por último, si suponemos que dF(x)=0 entonces

$$\{F, G\}(x) = X_G(F)(x) = X_G(x)(F) = dF(x)(X_G(x)) = 0$$

para todo $G \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Recíprocamente, si $\{F, G\}(x) = 0$ para todo $G \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces vamos a ver que

$$dF(x)(v) = 0$$

para todo $v \in T_x M$.

Sea $\alpha \in T_x^* M$ tal que $\alpha = b_{\omega_x}(v)$.

Entonces uno siempre puede encontrar $G \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que

$$dG(x) = \alpha.$$

Por tanto,

$$X_G(x) = b_\omega^{-1}(dG(x)) = b_{\omega_x}^{-1}(\alpha) = v$$

con lo que concluimos que

$$dF(x)(v) = v(F) = X_G(x)(F) = \{F, G\}(x).$$

$\square$

Capítulo 2

Coordenadas de Darboux y funciones generatrices

2.1. Coordenadas de Darboux

En esta sección veremos que en una variedad simpléctica (M, ω) siempre podremos encontrar unas coordenas locales $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ sobre M donde la forma simpléctica ω tiene la siguiente expresión local

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i.$$

Antes de demostrar este resultado introduciremos el concepto de campos de vectores dependientes del tiempo, el cual será útil para lo que sigue.

2.1.1. Campos de vectores dependientes del tiempo

Sea M una variedad. Un campo de vectores dependiente del tiempo sobre M es una aplicación $X : \mathbb{R} \times M \longrightarrow TM$ diferenciable tal que

$$\pi_M \circ X = p_2$$

donde $\pi_M : TM \longrightarrow M$ es la proyección tangente y $p_2 : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ es la segunda proyección.

Para cada campo de vectores X dependiente del tiempo sobre M podemos construir un campo de vectores $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times M)$ sobre $\mathbb{R} \times M$, cuya expresión es

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X \tag{1.1}$$

siendo t la coordenada en $\mathbb{R}$. A este campo de vectores se le denomina *suspensión de X*.

Sea $\widetilde{\phi} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times M) \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ el flujo local de $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times M)$. Si $(s, x) \in \mathbb{R} \times M$, denotaremos por $\widetilde{\phi}(s, x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ a la curva integral de $\widetilde{X}$ que pasa por (s, x). Nota que

$$\widetilde{\phi}(t - s, x) = (t, p_2(\widetilde{\phi}(t - s, x))). \tag{1.2}$$

Consideremos entonces la aplicación

$$\phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times M \longrightarrow M$$

definida por

$$\phi(t, s, x) = p_2 \circ \widetilde{\phi}(t - s, x).$$

Esta aplicación satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\phi_{(t,s)} : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo. En efecto, basta tener en cuenta (1.2) y que $\widetilde{\phi}_{t-s} : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ lo es.

2. $\phi(s, s) = 1_M$. Nota que $\widetilde{\phi}_0 = 1_{\mathbb{R}\times M}$.

3. Para todo $x \in M$ se tiene que

$$\frac{d}{dt}\phi_{(t,s)}(x) = X(t, \phi_{(t,s)}(x)) = X_t(\phi_{(t,s)}(x)). \tag{1.3}$$

   Para probar esta relación basta tener en cuenta que

$$t \longrightarrow \widetilde{\phi}_{(s,x)}(t - s)$$

   es la curva integral de $\widetilde{X}$ tal que para $t = s$ pasa por (s, x). Entonces, usando (1.1) deducimos que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\phi}_{(s,x)}(t - s) = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\phi}_{(s,x)}(t - s) + X(\widetilde{\phi}_{(s,x)}(t - s)). \tag{1.4}$$

   Por otra parte, de (1.2),

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\phi}_{(s,x)}(t - s) = \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\phi}_{(s,x)}(t - s)) + \frac{d\phi(t, s)}{dt}. \tag{1.5}$$

   Entonces (1.4) y (1.5) implican (1.3).

4. $\phi_{(t,s)} \circ \phi_{(s,r)} = \phi_{(t,s)}$. Lo cual es consecuencia de que

$$\widetilde{\phi}_{t-s} \circ \widetilde{\phi}_{s-r} = \widetilde{\phi}_{t-r}.$$

Todas estas propiedades motivan que a $\{\phi_{(t,s)}\}$ se lo denomine *el flujo del campo de vectores dependiente del tiempo X*.

Proposición 2.1.1 *Sea $X : \mathbb{R}\times M \longrightarrow TM$ un campo de vectores dependiente del tiempo. Entonces para todo t_0*

$$\frac{d}{dt}(\phi^*_{(t,s)}\alpha)_{|t=t_0} = \phi^*_{(t_0,s)}(\mathfrak{L}_{X_{t_0}}\alpha)$$

con $\alpha \in \Omega^k(M)$.

Demostración. Denotamos por $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación

$$\psi(t, s) = t - s.$$

Sabemos que (ver Apéndice B, Proposición B.1.3)

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{\phi}^*_{t-s}\beta)_{|t=t_0} = \widetilde{\phi}^*_{t-s}(\mathfrak{L}_{\widetilde{X}}\beta)$$

para todo $\beta \in \Omega^k(M)$.

Además $\phi_{t,s} = p_2 \circ \widetilde{\phi}_{t-s} \circ I_s$, donde $I_s : M \longrightarrow \mathbb{R} \times M$ es la aplicación $I_s(x) = (s, x)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{\phi}^*_{t,s}(\alpha)_{|t=t_0} &= \frac{d}{dt}(I^*_s \circ \widetilde{\phi}^*_{t-s} \circ p^*_2(\alpha))_{|t=t_0} \\
&= I^*_s \left(\frac{d}{dt}\widetilde{\phi}^*_{t-s} p^*_2(\alpha)_{|t=t_0} \right) \\
&= I^*_s \widetilde{\phi}^*_{t_0-s}(\mathfrak{L}_{\widetilde{X}} p^*_2 \alpha)
\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente (usando expresiones locales) que

$$\mathfrak{L}_{\widetilde{X}}(p^*_2\alpha)(t, x) = p^*_2(\mathfrak{L}_{X_t}\alpha)(t, x)$$

con lo que tenemos probado el resultado. □

2.1.2. Teorema de Darboux

Estamos en condiciones de probar un resultado crucial de la geometría simpléctica que garantiza que siempre se pueden encontrar coordenadas locales tal que la forma simpléctica tiene una sencilla expresión local.

Este resultado, denominado Teorema de Darboux, es fundamental en geometría simpléctica ya que implica que todas las variedades simplécticas son localmente simplectomórficas. Esto es, siempre podemos escoger un sistema de coordenadas locales (de Darboux) tal que esencialmente la estructura simpléctica es la misma. Esto diferencia la geometría simpléctica de otras geometrías como la Riemanianna (en donde las variedades se equipan con un producto interior diferenciable sobre el espacio tangente de la variedad). En este último caso hay invariantes locales como la curvatura que permiten distinguir puntos.

A continuación enunciaremos y demostraremos el Teorema de Darboux.

Teorema 2.1.2 *Sea ω una 2-forma no degenerada sobre una variedad M de dimensión $2n$. Entonces $d\omega = 0$ si y sólo si para todo $x \in M$ existe U entorno coordenado de M en x tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i \tag{1.6}$$

donde (q^i, p_i) son las correspondientes coordenadas en U.

Demostración. Teniendo en cuenta las propiedades de la diferencial exterior respecto a la suma y al producto exterior de formas, así como que la diferencial es un operador de cohomología, deducimos fácilmente que si ω tiene la expresión local dada en (1.6), entonces $d\omega(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Recíprocamente, supongamos que ω es cerrada. Como lo que buscamos es un resultado local, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $M = \mathbb{R}^{2n}$ y que $x = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Denotemos por $(x_1, \ldots, x_n)$ las coordenadas de $\mathbb{R}^n$.

Veamos en primer lugar que siempre podemos encontrar coordenadas $(\overline{q}^i, \overline{p}_i)$ en $\mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$x = (0, \ldots, 0) = \overline{0} \quad y \quad \omega(\overline{0}) = \sum_{i=1}^{n} d\overline{q}^i(\overline{0}) \wedge d\overline{p}_i(\overline{0}).$$

En efecto, en principio tenemos que

$$\omega(\overline{0}) = \sum_{i,j=1}^{2n} \omega_{ij} dx_i(\overline{0}) \wedge dx_j(\overline{0})$$

con $\omega_{ij} \in \mathbb{R}$. Para ello, procedamos por inducción sobre n.

Para $n = 1$ tenemos que la matriz asociada a $\omega(\overline{0})$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\omega_{12} \neq 0$, pues $det\, A \neq 0$. Si denotamos por E la matriz elemental que resulta de dividir la primera fila por ω_{12}, tenemos una aplicación lineal que nos transforma A en la matriz

$$E^t A E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que es cierto para $n - 1$ y veamos que se verifica para n. Como $det\, A \neq 0$, existe $a_{1i} \neq 0$ con $0 < i \leq 2n$. Intercambiamos las filas 2 e i y las columnas 2 e i y dividimos por a_{1i} la fila 1 y la columna 1. Una vez realizado dichos cambios, operamos por filas y columnas hasta hacer ceros las dos primeras filas. Denotemos por E a la matriz resultante de realizar las mismas transformaciones por columnas a la matriz identidad. Entonces la matriz $B = E^t A E$ es la asociada a $\omega(\overline{0})$ en las nuevas coordenadas. Nótese que B es antisimétrica y $det\, B \neq 0$. Además,

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & B' \end{array}\right)$$

donde B' es una matriz cuadrada de orden $(2n - 2)$ antisimétrica, $det\, B' \neq 0$. Por hipótesis de inducción tenemos que existe P una matriz regular tal que $P^t B' P$ es una matriz diagonal por bloques cuya diagonal está formada por repeticiones de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, si consideramos

$$\overline{P} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right)$$

la aplicación lineal inducida por $E\overline{P}$ determinan unas nuevas coordenadas $(q^1, p_1, \ldots, q^n, p_n)$ tal que $\omega(\overline{0}) = \sum_{i=1}^{n} d\overline{q}^i(\overline{0}) \wedge d\overline{p}_i(\overline{0})$.

Consideremos las 2-formas sobre M

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} d\overline{q}^i \wedge d\overline{p}_i \quad \text{ y } \quad \omega_t = \omega + t(\omega_1 - \omega).$$

Veamos ahora que existe un entorno U de $\overline{0}$ donde ω_t es no degenerada para todo $t \in]-\epsilon, 1+\epsilon[$, con $\epsilon > 0$. Para ello tomemos la función $f : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t,x) = det\, A(t,x)$, donde $A(t,x)$ es la matriz asociada a $\omega_t(x)$ respecto de la base $\{\frac{\partial}{\partial q^i}(x), \frac{\partial}{\partial p_i}(x)\}_{i=1}^n$. Nótese que f es continua. Como $\omega_t(\overline{0}) = \omega(\overline{0})$ es una 2-forma no degenerada, tenemos que $f(t, \overline{0}) \neq 0$. Por tanto, existe un entorno U de $\overline{0}$ tal que $\omega_t(x)$ es no degenerada para todo $x \in U$ y para todo $t \in]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Supongamos que $U = B(\overline{0}, \delta)$, con $\delta > 0$. Por otra parte, ω_1 y ω son formas cerradas por lo que $d(\omega_1 - \omega) = 0$ y en virtud del Lema de Poincaré, tenemos que existe $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que $\omega_1 - \omega = d\alpha$ y $\alpha(\overline{0}) = 0$.

Sea $X_t \in \mathfrak{X}(U)$ el campo de vectores que satisface

$$i_{X_t}\omega_t = -\alpha \quad \text{y} \quad X_t(\overline{0}) = \overline{0}.$$

De hecho, X_t es justamente el campo $X_t = -b_{\omega_t}^{-1}(\alpha)$.

Denotamos por X el campo de vectores dependiente del tiempo asociado $X(x,t) = X_t(x)$. Entonces, existe $V = B(\overline{0}, \delta_1) \subset U$, con $\delta_1 > 0$, tal que $\phi_{t,s} : U \longrightarrow U$ es el grupo uniparamétrico de X y $\phi_{t,0} : U \longrightarrow U$ está definido para todo $t \in]-\varepsilon', 1+\varepsilon[$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.1.1, deducimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*\omega_t)_{|t=t_0} &= \frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*\omega)_{|t=t_0} + \frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*(t(\omega_1 - \omega)))_{|t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*\omega_t)_{|t=t_0} + \phi_{t_0,0}^*(\omega_1 - \omega) + t_0\frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega))_{|t=t_0} \\
&= \phi_{t_0,0}^*(\mathfrak{L}_{X_{t_0}}\omega) + \phi_{t_0,0}^*(\omega_1 - \omega) + t_0\phi_{t_0,0}^*(\mathfrak{L}_{X_{t_0}}(\omega_1 - \omega)) \\
&= \phi_{t_0,0}^*(d\, i_{X_{t_0}}\omega) + \phi_{t_0,0}^*(\omega_1 - \omega) + t_0\phi_{t_0,0}^*(d\, i_{X_{t_0}}(\omega_1 - \omega)) \\
&= \phi_{t_0,0}^*(\omega_1 - \omega) + \phi_{t_0,0}^*(d\, i_{X_{t_0}}(\omega_{t_0})) \\
&= \phi_{t_0,0}^*(d\alpha) - \phi_{t_0,0}^*(d\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Definitivamente podemos concluir que $\phi_{1,0}^*\omega_1 = \phi_{0,0}^*\omega_0 = \omega$. Con lo que obtenemos que $\phi_{1,0}$ es la aplicación que da el cambio de coordenadas deseado. □

Nota 2.1.3 *Empleando coordenadas de Darboux es evidente que las curvas integrales del campo hamiltoniano X_H asociado a $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ son justamente las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. En efecto, la descripción local de X_H es*

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{1.7}$$

y las curvas integrales $(q^i(t), p_i(t))$ de este campo verifican

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

es decir, corresponden con las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Además, el corchete de Poisson tiene como expresión local

$$\{F, G\} = \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}.$$

2.2. Transformaciones canónicas y aplicaciones generatrices

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Entonces, por el Teorema de Darboux podemos considerar para cada punto $x \in M$ coordenadas locales (q^i, p_i) tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

A estas coordenadas se las denomina *coordenadas canónicas*. En general estas coordenadas no son únicas. Pero todas ellas tienen la ventaja que las ecuaciones de Hamilton son de la forma

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

con $H(q^i, p_i)$. Si estamos interesados en la resolución de estas ecuaciones podríamos intentar buscar coordenadas canónicas de tal manera que las correspondientes ecuaciones de Hamilton se puedan resolver con facilidad.

El primer paso para abordar esta cuestión es analizar cómo se pueden generar diferentes tipos de coordenadas canónicas. En esta sección veremos que este problema está asociado a la noción de función generatriz. En efecto, sea x_0 un punto de M y consideremos $f : M \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable. Si queremos que f transforme coordenadas canónicas en coordenadas canónicas entonces

$$f^*\omega = \omega$$

esto es, f debe ser simpléctica. Por la Proposición 1.3.9, esto es equivalente a que el grafo de f, $\Gamma_f \subset M \times M$, sea una subvariedad lagrangiana de $(M \times M, (\omega, -\omega))$, donde si $pr_i : M \times M \longrightarrow M$ son las correspondientes proyecciones, entonces $(\omega, -\omega) = pr_1^*(\omega) - pr_2^*(\omega)$ es una estructura simpléctica. También equivale a que

$$i^*_{\Gamma_f}(\omega, -\omega) \equiv 0.$$

Por otro lado, como $(\omega, -\omega)$ es una estructura simpléctica en $M \times M$, entonces localmente existe una 1-forma θ sobre $M \times M$ tal que

$$(\omega, -\omega) = -d\theta.$$

Entonces tenemos que

$$0 = i^*_{\Gamma_f}(\omega, -\omega) = d(-i^*_{\Gamma_f}\theta)$$

Esto es, $-i^*_{\Gamma_f}\theta$ es una 1-forma en Γ_f cerrada, por tanto, localmente exacta. Así existe una función (local) $S \in C^\infty(\Gamma_f, \mathbb{R})$ tal que

$$dS = -i^*_{\Gamma_f}\theta. \tag{2.8}$$

A la aplicación S se la denomina *función generatriz* de la aplicación simpléctica f.

Si (q^i, p_i) son coordenadas canónicas en M y $(\overline{q}^i, \overline{p}_i)$ son las nuevas coordenadas que describen f, entonces podemos poner localmente θ como

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i - \overline{p}_i d\overline{q}^i.$$

Por tanto, la expresión local de (2.8) es

$$dS = -i^*_{\Gamma_f}\theta = -i^*_{\Gamma_f}(\sum_{i=1}^{n} p_i dq^i - \overline{p}_i d\overline{q}^i). \tag{2.9}$$

Como Γ_f es una subvariedad regular de $M \times M$, podemos optar por alguna de las siguientes posibilidades para la elección de las coordenadas en Γ_f

$$(q^i, \overline{q}^i), \qquad (q^i, \overline{p}_i), \qquad (p_i, \overline{q}^i), \qquad (p_i, \overline{p}_i).$$

Supongamos que elegimos como coordenadas $(q^i, \overline{q}^i)$, entonces (2.9) se traduce en las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = -p_i(q, \overline{q}) \qquad \frac{\partial S}{\partial \overline{q}^i} = \overline{p}_i(q, \overline{q}). \tag{2.10}$$

Para describir f a partir de la función generatriz S podríamos despejar de la primera de estas ecuaciones $\overline{q}$ en función de p y q. Para ello la función S debería verificar que

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \overline{q}^i}\right)$$

es una matriz regular. En tal caso tenemos que la función cambio de coordenadas es

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \longrightarrow & M \\ & (q^i, p_i) & \longrightarrow & \left(\overline{q}^i, -\dfrac{\partial S}{\partial \overline{q}^i}\right) \end{array}$$

Nota que $\det(Jf) = 1$.

Veamos a continuación un ejemplo simple.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos $M = \mathbb{R}^2$ y queremos encontrar la transformación de coordenadas asociada a la aplicación

$$S(q, \overline{q}) = -\frac{1}{2}\omega\overline{q}^2 \cot(2\pi q).$$

Nota que $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \overline{q}} \neq 0$. Entonces las ecuaciones (2.10) vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= \omega \overline{q}^2 \frac{2\pi}{\operatorname{sen}^2 2\pi q} &= p \\ -\frac{\partial S}{\partial \overline{q}} &= \omega \overline{q} \cot(2\pi q) &= \overline{p} \end{aligned}$$

De la primera ecuación podemos despejar $\overline{q}$ y sustituir en la segunda, obteniendo la transformación de coordenadas

$$f(q,p) = \left(\left(\frac{p}{\pi\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2\pi q, \left(\frac{p\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} 2\cos 2\pi q \right).$$

Esta transformación nos permite pasar el hamiltoniano del oscilador armónico $H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ al hamiltoniano $H(\overline{q}, \overline{p}) = \frac{\omega}{2\pi}\overline{p}$ cuyas ecuaciones de Hamilton se integran con facilidad.

En este ejemplo hemos sido capaces de encontrar una transformación tal que el nuevo hamiltoniano es de la forma

$$K(\overline{p}),$$

con lo que las ecuaciones de Hamilton son de la forma

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial K}{\partial \overline{q}^i} &= -\frac{d\overline{p}_i}{dt} \\ \frac{\partial K}{\partial \overline{p}_i} &= \frac{d\overline{q}^i}{dt}, \end{aligned}$$

cuya integración es inmediata. Las soluciones de estas ecuaciones son

$$\overline{p}_i = cte\ , \overline{q}^i = \frac{\partial K}{\partial p_i}(\overline{p})t + cte.$$

El nuevo hamiltoniano está relacionado con el hamiltoniano primitivo por

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \overline{q}) \right) = K(\overline{p}).$$

Nota que además las funciones $\overline{p}_i(q^i, p_i)$ son integrales primeras, ya que

$$X_{K(\overline{p}_i)} = 0.$$

Nota 2.2.2 *Si f es una integral primera, esto es $X_H(f) = 0$, entonces al tomar coordenadas locales sobre la variedad tenemos que*

$$\frac{dq^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_i} = 0.$$

Esto es $\dfrac{d}{dt}(f(q^i(t), p_i(t)) = 0$ o equivalentemente f permanece constante a lo largo de las trayectorias de la ecuación $f(q^i(t), p_i(t)) = cte$; bajo ciertas condiciones de regularidad podemos despejar algunas variables (q^i, p_i) en función de las demás y reducir el sistema.

Capítulo 3

La Ecuación de Hamilton-Jacobi

En este capítulo presentaremos la ecuación de Hamilton-Jacobi y cómo esta ecuación facilita en algunos casos la resolución de las ecuaciones de Hamilton.

3.1. Sistemas hamiltonianos

Definición 3.1.1 *Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. A la terna (M, ω, X_H) se le denomina sistema hamiltoniano.*

Un ejemplo de sistema hamiltoniano es el fibrado cotangente de una variedad con su estructura simpléctica canónica y un hamiltoniano.

Sea Q una variedad de dimensión n y supongamos que tenemos una aplicación diferenciable $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre el fibrado cotangente de Q. Denotemos por ω la estructura simpléctica asociada a T^*Q. Veremos a continuación que las curvas integrales de $X_H \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ son justamente las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para el hamiltoniano H. En efecto, sea $c(t) = (q^i(t), p_i(t))$ curva integral de X_H. De (1.7) deducimos que

$$\dot{c} = \frac{d}{dt}c(t) = X_H(c(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}(c(t)) - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}(c(t)).$$

Entonces

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}q^i(t) &= dq^i \cdot \dot{c} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}p_i(t) &= dp_i \cdot \dot{c} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Ejemplo 3.1.2 Sean $Q = \mathbb{R}^3$ y $H : T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$H(q^i, p_i) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}(p_i)^2 + V(q^i), \text{ con } m > 0.$$

De (1.7) deducimos que la expresión local del campo hamiltoniano X_H es

$$X_H = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i}{2m}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right).$$

Las ecuaciones de Hamilton de este sistema son

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \dfrac{p_i}{2m}, \\ \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial V}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Un caso particular de esta situación es el problema de Kepler. Este problema consiste en un sistema de dos partículas en $Q = \mathbb{R}^3$, donde una de ellas tiene una masa mucho mayor que la otra (como ocurre por ejemplo con sistemas como Sol-Tierra, Tierra-Luna,...). Además, se asume que el sistema no se ve afectado por una fuerza exterior y que las fuerzas entre las particulas sólo dependen de la distancia que hay entre ellas. Por tanto, el sistema queda determinado por tres coordenadas correspondientes a la posición relativa de la particula de menor masa respecto de la otra.

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ coordenadas esféricas (r, θ, ψ).

$$\begin{cases} x_1 = r \operatorname{sen} \psi \cos \theta \\ x_2 = r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ x_3 = r \cos \psi \end{cases}$$

El lagrangiano del sistema es entonces de la forma

$$L = K(r, \theta, \psi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) - V(r)$$

donde K es la energía cinética (ver (C.0.2))

$$K = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + (r^2 \sin^2 \psi)\dot{\theta}^2].$$

Denotaremos por p_r, p_ψ y p_θ a los momentos conjugados que vienen definidos por la siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} p_r \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ \\ p_\psi \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mr^2\dot{\psi}, \\ \\ p_\theta \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(r^2 \sin^2 \psi)\dot{\theta}, \end{cases}$$

Despejando de estas ecuaciones $\dot{r}$, $\dot{\psi}$ y $\dot{\theta}$ y sustituyendo su valor en $H = K + V$, obtenemos la siguiente expresión de la energía del sistema en función de $(r, \psi, \theta, p_r, p_\psi, p_\theta)$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2 \sin^2 \psi} + V(r). \tag{1.1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} X_H &= \frac{p_r}{m}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{p_\psi}{mr^2}\frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{p_\theta}{mr^2 \sin^2 \psi}\frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &+ \left(\frac{1}{mr^3}\left[p_\psi^2 + \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \psi}\right] - \frac{dV}{dr}\right)\frac{\partial}{\partial p_r} + \frac{p_\theta^2 \cos \psi}{mr^2 \sin^3 \psi}\frac{\partial}{\partial p_\psi}. \end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones de Hamilton son las siguientes

$$\begin{cases} \dot{r} \equiv \dfrac{p_r}{m}, & \dot{p_r} \equiv \dfrac{1}{mr^3}[p_\psi^2 + \dfrac{p_\theta^2}{\sin^2\psi}] - V'(r); \\[2ex] \dot{\psi} \equiv \dfrac{p_\psi}{mr^2}, & \dot{p_\psi} \equiv \dfrac{p_\theta^2 \cos\psi}{mr^2 \sin^3\psi}; \\[2ex] \dot{\theta} \equiv \dfrac{p_\theta}{mr^2 \sin^2\psi}, & \dot{p_\theta} \equiv 0. \end{cases}$$

3.2. La Ecuación de Hamilton-Jacobi

Estamos interesados en buscar métodos para intentar resolver las ecuaciones de Hamilton. Uno de estos métodos es el que nos proporciona la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Una estrategia para simplificar las ecuaciones de Hamilton es buscar funciones generatrices apropiadas. Por ejemplo, funciones $S(q, \overline{q})$ tal que $\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial q \partial \overline{q}}\right)$ es regular y

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \overline{q})\right) = K(\overline{p}). \tag{2.2}$$

Esto podría ser algo complicado así que tratemos de investigar sobre esta ecuación. Fijemos $(\overline{q}_0, \overline{p}_0)$. Entonces la ecuación que resulta es

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q)\right) = cte = E$$

donde $S(q) = S(q, \overline{q}_0)$ y $E = K(\overline{p}_0)$. Vamos a ver si considerando esta ecuación que resulta más simple que (2.2) podemos decir algo de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

A esta ecuación se le denomina *ecuación de Hamilton-Jacobi.*

Teorema 3.2.1 *Sea $S(q)$ una función diferenciable. Entonces son equivalentes*

1. $H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}\right) = E.$

2. *Si $q(t)$ es una solución de*

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right),$$

entonces $(q(t), p(t)) = \left(q(t), \dfrac{\partial S}{\partial q}(q(t))\right)$ es solución de las ecuaciones de Hamilton.

Re-escribiremos y probaremos este resultado en el contexto de la geometría diferencial.

Sea Q una variedad y consideremos $M = T^*Q$ con su estructura simpléctica canónica. Supongamos que $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es un hamiltoniano. Sea $S : Q \longrightarrow$

$\mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. La ecuación de Hamilton-Jacobi se re-escribe globalmente como

$$H \circ dS = E.$$

Veamos en primer lugar un lema que será útil para probar posteriores resultados.

Lema 3.2.2 *Sean Q una variedad diferenciable y $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Entonces se verifica la siguiente igualdad*

$$\omega_\beta(T_\beta(dS \circ \pi_Q^*)v, w) = \omega_{dS(\pi_Q^*\beta)}(v, w - T_{dS(\pi_Q^*\beta)}(dS \circ \pi_Q^*)w) \tag{2.3}$$

para todo $v \in T_\beta(T^*Q)$ y $w \in T_{dS(\pi_Q^*\beta)}(T^*Q)$, donde ω denota a la 2-forma simpléctica canónica de T^*Q y $\pi_Q^* : T^*Q \longrightarrow Q$ es la proyección canónica.

Demostración. Nótese que dado la 1-forma α sobre T^*Q se tiene que

$$\alpha^*\lambda_Q = \alpha. \tag{2.4}$$

En efecto, en un entorno coordenado U de T^*Q con coordenadas (q^i, p_i) se tienen las siguientes expresiones locales de λ_Q y α

$$\lambda_Q = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \qquad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dq^i.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha^*\lambda_Q &= \alpha^*\left(\sum_{i=1}^n p_i dq^i\right) = \sum_{i=1}^n (\alpha^* p_i) d(\alpha^* q^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i dq^i = \alpha. \end{aligned}$$

De (2.4) se sigue que $(dS)^*\omega = 0$, ya que

$$\begin{aligned} (dS)^*\omega &= (dS)^*(-d\lambda_Q) = -d((dS)^*\lambda_Q) \\ &= -d(dS) = 0 \end{aligned}$$

Como $(dS)^*\omega = 0$, se tiene que la relación (2.3) es equivalente a la siguiente

$$\omega_{dS(\pi_Q^*\beta)}(v - T_\beta(dS \circ \pi_Q^*)v, w - T_{dS(\pi_Q^*\beta)}(dS \circ \pi_Q^*)w) = 0. \tag{2.5}$$

Como $\pi_Q^* \circ dS = 1_Q$, se tiene que $T_\beta\pi_Q^*(v - T_\beta(dS \circ \pi_Q^*)v) = 0$, es decir, que los vectores de la forma $v - T_\beta(dS \circ \pi_Q^*)v$ son verticales. Veamos ahora que dados dos vectores verticales a, b se tiene que $\omega(a, b) = 0$, con lo cual quedaría probado el Lema. Entonces si a y b son verticales, y tomamos un entorno coordenado U de coordenadas (q^i, p_i), tienes que

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial p_i}\,, \qquad b = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\omega(a,b) &= \sum_{i=1}^{n}(dq^i \wedge dp_i)(a,b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} dq^i(a)dp_i(b) - dq^i(b)dp_i(a) = 0.
\end{aligned}$$

□

Estamos en condiciones de enunciar y probar la versión geométrica del Teorema 3.2.1. Para ello consideraremos el campo hamiltoniano de H, $X_H \in \mathfrak{X}(T^*Q)$, y el campo $X_H^S \in \mathfrak{X}(Q)$, definido por

$$X_H^S(q) = T_{dS(q)}\pi_Q^*(X_H(dS(q))) \tag{2.6}$$

Teorema 3.2.3 *Sea $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Entonces son equivalentes*

1. *Si $c : I \longrightarrow Q$ es curva integral de X_H^S, entonces $dS \circ c : I \longrightarrow T^*Q$ es una curva integral de X_H.*
2. *S satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi $H \circ dS = E = cte.$*

Demostración. Sea $c(t)$ una curva integral de X_H^S. Consideremos la curva $\gamma(t) = dS(c(t))$ en T^*Q. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= TdS(c(t)) \cdot c'(t) \\
&= TdS(c(t)) \cdot T\pi_Q^*(X_H(dS(c(t))) \\
&= T(dS \circ \pi_Q^*)(X_H(dS(c(t))))
\end{aligned}$$

En virtud del Lema 3.2.2 para todo $v \in T_{\gamma(t)}(T^*Q)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\omega(T(dS \circ \pi_Q^*)(X_H(\gamma(t))), v) = \\
&= \omega(X_H(\gamma(t)), v) - \omega(X_H(\gamma(t)), T(dS \circ \pi_Q^*)v) \\
&= \omega(X_H(\gamma(t)), v) - dH(\gamma(t))(TdS(\gamma(t))(T\pi_Q^*(v))).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Supongamos que S satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi. Nótese que $dH(\gamma(t))(TdS(\gamma(t))) = d(H \circ dS)(\gamma(t))$, término de la anterior ecuación que se anula por ser S solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Por tanto,

$$\gamma'(t) = T(dS \circ \pi_Q^*)(X_H(dS(c(t)))) = X_H(\gamma(t)).$$

Recíprocamente, si se satisface 2. entonces

$$X_H(\gamma(t)) = \gamma'(t) = T(dS \circ \pi_Q^*)(X_H(\gamma)(t))$$

Sustituyendo en (2.7) concluimos que

$$dH(\gamma(t))(TdS(\gamma(t))(T\pi_Q^*(v))) = 0$$

para todo $v \in T_{\gamma(t)}(T^*Q)$. Como π_Q^* es sobre, se tiene que $dH(\gamma(t))(TdS(\gamma(t))) = 0$. Por tanto, S es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi ($d(H \circ dS)) = 0$, o equivalentemente $H \circ dS = E$ para una cierta constante E.

□

El Teorema 3.2.3 puede generalizarse en el siguiente sentido

Teorema 3.2.4 *Sea $\alpha : Q \longrightarrow T^*Q$ una 1-forma cerrada sobre Q. Entonces son equivalentes*

1. *Si $c : I \longrightarrow Q$ es una curva integral del campo de vectores X_H^α sobre Q definido por*
$$X_H^\alpha(q) = T_{\alpha(q)}\pi_Q^*(X_H(\alpha(q)))$$
para todo $q \in Q$. Entonces $\alpha \circ c : I \longrightarrow T^*Q$ es una curva integral de X_H, esto es, es una solución de las ecuaciones de Hamilton.

2. *α satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, esto es,*
$$H \circ \alpha = cte.$$

Demostración. La fórmula (2.3) del Lema 3.2.2 puede generalizarse en el siguiente sentido

$$\omega_\beta(T_\beta(\alpha \circ \pi_Q^*)(v), w) = \omega_{\alpha(\pi_Q^*(\beta))}(v, w - T_{\alpha(\pi_Q^*(\beta))}(\alpha \circ \pi_Q^*)(w))$$

para cualquier $v \in T_\beta(T^*Q)$ y $w \in T_{\alpha(\pi_Q^*(\beta))}(T^*Q)$ con $\beta \in T^*Q$.

Basta sustituir dS por α. Entonces razonando como en el Teorema 3.2.3 deducimos la equivalencia del Teorema. $\square$

Ejemplo 3.2.5 Veamos como se aplica el Teorema 3.2.3 en el problema de Kepler.

Consideremos el hamiltoniano H en coordenadas esféricas (1.1) y la función $S(r, \psi, \theta) = S_r(r) + S_\psi(\psi) + S_\theta(\theta)$. Entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi que resulta es

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{dS_\psi}{d\psi}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\psi}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + V(r) = E = cte.$$

Pretendemos buscar una función S que satisfaga esta ecuación, para ello resolvemos las siguientes ecuaciones diferenciables

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 &= E_1^2 \\
\left(\frac{dS_\psi}{d\psi}\right)^2 + \frac{E_1^2}{\sin^2\psi} &= E_2 \\
\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{E_2}{2mr^2} + V(r) &= E
\end{aligned}$$

donde E, E_1 y E_2 son constantes. La solución de estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
S_\theta &= E_1\theta + \overline{E}_1 \\
S_\psi &= \int \sqrt{E_2 - \frac{E_1}{\sin^2\psi}}\, d\psi \\
S_r &= \int \sqrt{2mE - \frac{E_2}{r^2} - 2mV(r)}\, dr.
\end{aligned}$$

Las curvas integrales del campo

$$X_H^S = \frac{1}{m}\frac{dS_r}{dr}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2mr^2}\frac{dS_\psi}{d\psi}\frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{2mr^2 \sin^2\psi}\frac{dS_\theta}{d\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

son las soluciones $(r(t), \psi(t), \theta(t))$ del sistema de ecuaciones diferenciable siguiente

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{2m}\frac{dS_r}{dr} \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{2mr^2}\frac{dS_\psi}{d\psi}\frac{\partial}{\partial\psi} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2mr^2\sin^2\psi}\frac{dS_\theta}{d\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

Nótese que este sistema se puede resolver con facilidad ya que de la primera ecuación deducimos $r(t)$, lo que nos permite a su vez obtener $\psi(t)$ a partir de la segunda y finalmente de la tercera deducimos $\theta(t)$.

En definitiva, las curvas integrales de X_H que se obtienen a partir de este método son

$$dS(r(t), \psi(t), \theta(t)).$$

3.3. Soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi nos permite obtener soluciones de las ecuaciones de Hamilton que están en la imagen de dS para una función $S : Q \longrightarrow T^*Q$ sobre la variedad. Por consiguiente si fijamos S no obtenemos todas las solucione de las ecuaciones de Hamilton. En esta sección veremos como descubrir todas las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. Para ello introduciremos la noción de solución de Hamilton-Jacobi total.

Definición 3.3.1 *Sea $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación hamiltoniana asociada a un sistema mecánico sobre una variedad Q de dimensión n. Una solución total de la ecuación de Hamilton-Jacobi es una aplicación diferenciable*

$$\mathfrak{S} : Q \times \Lambda \longrightarrow T^*Q$$

sobre el producto cartesiano de Q por un abierto Λ de $\mathbb{R}^n$ tal que

1. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, la aplicación $\mathfrak{S}_\lambda : Q \longrightarrow T^*Q$ definida por*

$$\mathfrak{S}_\lambda(q) = \mathfrak{S}(q, \lambda)$$

es una solución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, esto es, $\mathfrak{S}_\lambda$ es una 1-forma cerrada y

$$H \circ \mathfrak{S}_\lambda = cte.$$

2. *La aplicación $\mathfrak{S} : Q \times \Lambda \longrightarrow T^*Q$ es un difeomorfismo local.*

Nota 3.3.2 *En este texto siempre supondremos, para simplificar cálculos, que $\mathfrak{S}$ es un difeomorfismo global.*

A continuación veremos como la existencia de una solución total de la ecuación de Hamilton-Jacobi nos permite obtener todas las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Teorema 3.3.3 *Sea* $\mathfrak{S} : Q \times \Lambda \longrightarrow T^*Q$ *una solución total de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Entonces, si* n *es la dimensión de* Q*, existen* n*-funciones* $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(T^*Q, \mathbb{R})$ *tales que*

1. *Las funciones* f_i *son integrales primeras, esto es,* $X_H(f_i) = 0$*.*
2. *Las funciones* f_i *son lienalmente independientes, esto es,*
$$(df_1 \wedge \ldots \wedge df_n)(x) \neq 0.$$
3. *Las funciones* f_i *están en involución entre si, esto es,*
$$\{f_i, f_j\} = 0.$$

Demostración. Consideremos la aplicación $F : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$F = pr_2 \circ (\mathfrak{S})^{-1}$$

donde $pr_2 : Q \times \Lambda \longrightarrow \Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Como pr_2 es una sumersión y $\mathfrak{S}$ es un difeomorfismo entonces F es una sumersión. Por tanto, existen $f_1, \ldots, f_n$ funciones linealmente independientes sobre T^*Q tal que

$$F = (f_1, \ldots, f_n).$$

Veamos que estas funciones son integrales primeras. Por hipótesis, para todo $\lambda \in \Lambda$ tenemos que

$$T_{(q-\lambda)}\mathfrak{S}(X_H^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0) = X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q)) \tag{3.8}$$

donde $X_H^{\mathfrak{S}_\lambda}$ es el campo de vectores sobre Q definido como en (2.6).

En efecto, para todo $(q, \lambda) \in Q \times \Lambda$

$$T_{(q,\lambda)}\mathfrak{S}(X_H^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0) = (T_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(\mathfrak{S}_\lambda \circ \pi_Q^*)(X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q))), 0).$$

Por otro lado del Lema 3.2.2 deducimos que para todo $v \in T_{d\mathfrak{S}_\lambda(q)}(T^*Q)$,

$$\begin{aligned}
&\omega_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(T_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(\mathfrak{S} \circ \pi_Q^*)(X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q)), v)) = \\
&= \omega_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q)), v - T_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(\mathfrak{S}_\lambda \circ \pi_Q^*)(v)) \\
&= \omega_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q)), v) - dH(\mathfrak{S}_\lambda(q))(T_q\mathfrak{S}_\lambda(T_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}\pi_Q^*(v))) \\
&= \omega_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}(X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q), v) - d(H \circ \mathfrak{S}_\lambda)(T_{\mathfrak{S}_\lambda(q)}\pi_Q^*(v))).
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathfrak{S}_\lambda$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi entonces $d(H \circ \mathfrak{S}_\lambda) = 0$. Por tanto, de la no degeneración de ω tenemos 1.

Por otro lado, para todo $\beta_q \in T_q^*Q$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$\beta_q = \mathfrak{S}_\lambda(q)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} X_H(\beta_q)(f_i) = &\ X_H(\mathfrak{S}_\lambda(q))(f_i) = T_{(q,\lambda)}\mathfrak{S}(X_H^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0)(f_i) = \\ = &\ (X_H^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0)(f_i \circ \mathfrak{S}) = (X_H^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0)(pr_i) = 0 \end{aligned}$$

donde $pr_i : Q \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación

$$pr_i(q, t_1, \dots, t_n) = t_i.$$

Veamos por último que las funciones f_i están en involución. Para ello consideramos para todo (q, λ) el subespacio

$$L_{(q,\lambda)} = \{(u, 0) \in T_qQ \times T_\lambda\Lambda\}.$$

Este subespacio es lagrangiano con respecto a la forma simpléctica

$$\omega_{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{S})^*(\omega)$$

donde ω es la forma simpléctica canónica de T^*Q. En efecto, si $L^\perp_{(q,\lambda)}$ es el ortogonal simpléctico, esto es,

$$L^\perp_{(q,\lambda)} = \{(v, s) \in T_qQ \times T_\lambda\Lambda \ / \ \omega_{\mathfrak{S}}((u, 0), (v, s)) = 0 \text{ para todo } (u, 0) \in L_{(q,\lambda)}\},$$

entonces $L_{(q,\lambda)} \subseteq L^\perp_{(q,\lambda)}$. Para comprobarlo tomamos $(v, 0) \in L_{(q,\lambda)}$. Entonces, para todo $(q, \lambda) \in Q \times \Lambda$

$$\begin{aligned} (\omega_{\mathfrak{S}})_{(q,\lambda)}((u, 0), (v, 0)) &= \omega_{\mathfrak{S}(q,\lambda)}(T_q\mathfrak{S}_\lambda(u), T_q\mathfrak{S}_\lambda(v)) \\ &= -(\mathfrak{S}_\lambda)^*(d\lambda_Q)(q)(u, v) \end{aligned}$$

y como para cualquier forma β en Q se tiene que $\beta^*(\lambda_Q) = \beta$, deducimos que

$$(\omega_{\mathfrak{S}})_{(q,\lambda)}((u, 0), (v, 0)) = (d\mathfrak{S}_\lambda)(q)(u, v) = 0.$$

Para ver la igualdad comprobaremos que $dim\, L_{(q,\lambda)} = dim\, L^\perp_{(q,\lambda)}$. En efecto, es claro que $dim\, L_{(q,\lambda)} = dim\, Q$ y que

$$dim\, L^\perp_{(q,\lambda)} \geq dim\, Q.$$

Como $dim\, (T_qQ \times T_\lambda\Lambda) = 2\, dim\, Q$, entonces

$$dim\, L^\perp_{(q,\lambda)} = dim\, Q = dim\, L_{(q,\lambda)}.$$

Así, si $\beta_q \in T^*_qQ$ entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\beta_q = \mathfrak{S}_\lambda(q)$. En tal caso, usando 1.

$$\begin{aligned} \{f_i, f_j\}(d\mathfrak{S}_\lambda(q)) &= \omega(d\mathfrak{S}_\lambda(q))(X_{f_i}(d\mathfrak{S}_\lambda(q)), X_{f_j}(d\mathfrak{S}_\lambda(q))) \\ &= \omega(d\mathfrak{S}_\lambda(q))(T_{(q,\lambda)}d\mathfrak{S}(X_{f_i}^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0), T_{(q,\lambda)}d\mathfrak{S}(X_{f_j}^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0))) \\ &= (\omega_{\mathfrak{S}_\lambda})_{(q,\lambda)}((X_{f_i}^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0), (X_{f_j}^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0)). \end{aligned}$$

Como $(X_{f_i}^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0), (X_{f_j}^{\mathfrak{S}_\lambda}(q), 0) \in L_{(q,\lambda)} = L^\perp_{(q,\lambda)}$, entonces

$$\{f_i, f_j\}(\beta_q) = 0$$

para todo $\beta_q \in T^*_qQ$. □

La importancia de encontrar n-integrales primeras independientes en involución se justifica con el uso de un famoso resultado, *el Teorema de Arnold-Liouville* que solo enunciaremos en este trabajo.

Teorema 3.3.4 *Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano con $\dim M = 2n$. Supongamos que tenemos $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ integrales primeras linealmente independientes que están en involución y tal que $f_1 = H$. Si para cada $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ consideramos la subvariedad cerrada de M*

$$M_c = \{x \in M \,/\, F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = (c_1, \ldots, c_n)\},$$

entonces

1. *Cada solución de las ecuaciones de Hamilton está enteramente contenida en M_c para un cierto $c \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Si M_c es compacto y conexo, M_c es difeomorfo un toro de dimensión n.*

3. *Las ecuaciones de Hamilton pueden ser integradas por cuadratura.*

En consecuencia, si $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq C^\infty(T^*Q, \mathbb{R})$ son n-integrales primeras independientes en involución deducidas del Teorema 3.3.3 y podemos extraer $n-1$ de ellas tal que $\{H, f_{i_1}, \ldots, f_{i_{n-}}\}$ son independientes, entonces las ecuaciones de Hamilton pueden ser integradas por cuadratura.

Antes de finalizar el trabajo comprobaremos que la existencia de n-integrales primeras "independientes", en un cierto sentido, y en involución generan una solución total de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Sea $f : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre el fibrado contangente de Q y $V\pi = \cup_{\beta \in T^*Q} Ker\, T_\beta \pi_Q^*$ el fibrado vertical. Denotemos por $d^v f$ a la aplicación $d^v f : T^*Q \longrightarrow (V\pi)^*$ definida por $d^v f(\beta) = df(\beta)_{|Ker\, T_\beta \pi_Q^*}$. Nota que localmente si (q^i, p_i) son coordenadas locales para T^*Q, entonces las expresiones locales de df y $d^v f$ son

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i$$
$$d^v f = \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i.$$

Diremos que las aplicaciones $\{f_1, \ldots, f_n\}$ son verticalmente independientes si

$$(d^v f_1 \wedge \ldots \wedge d^v f_n)(q) \neq 0$$

para todo $q \in Q$.

Veremos por último como la existencia de integrales primeras verticalmente independientes en involución nos permite obtener una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Teorema 3.3.5 *Sea $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano sobre T^*Q, con $\dim Q = n$. Supongamos que tenemos $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq C^\infty(T^*Q, \mathbb{R})$, con $f_1 = H$, integrales primeras en involución y verticalmente independientes. Entonces para todo $q \in Q$ existe $U \in Ent(q)$ y existe un difeomorfismo $\mathfrak{S} : U \times \Lambda \longrightarrow T^*U$ tal que*

1. *$d\mathfrak{S}_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

2. *$\mathfrak{S}_\lambda : Q \longrightarrow T^*Q$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, esto es*
$$H \circ \mathfrak{S} = cte.$$

Demostración. Consideremos la aplicación $\phi : T^*Q \longrightarrow Q \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(\mathfrak{S}_q) = (q, f_i(\mathfrak{S}_q)).$$

Entonces ϕ es un difeomorfismo local, ya que

$$J\phi = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ & \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial q^j} & \dfrac{\partial f_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

es regular por ser $\{f_1, \ldots, f_n\}$ verticalmente independientes.
Entonces tomamos $\mathfrak{S} = \phi^{-1} : U \times \Lambda \longrightarrow T^*U$.
Veamos que $H \circ \mathfrak{S}_\lambda = cte$. En efecto, como $f_1 = H$ entonces

$$H \circ \mathfrak{S}_\lambda(q) = f_1 \circ \mathfrak{S}(q, \lambda) = pr_1(q, \lambda) = \lambda_1$$

donde $pr_1 : Q \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $pr_1(q, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1$.

Veamos por último que $d\mathfrak{S}_\lambda = 0$. Por hipótesis tenemos que $\{f_i, f_j\} = 0$, por tanto,

$$0 = \{f_i, f_j\} = \omega(X_{f_i}.X_{f_j}).$$

Por otra parte, para todo $\lambda \in \Lambda$ y $q \in Q$

$$T_q\mathfrak{S}_\lambda(TQ) \subseteq < \{df_i(\mathfrak{S}(q, \lambda))\} > \subseteq < X_{f_i}(\mathfrak{S}(q, \lambda)) > \tag{3.9}$$

En efecto, para todo $u \in T_qQ$

$$\begin{aligned} df_i(\mathfrak{S}(q, \lambda))(T_q\mathfrak{S}_\lambda(u)) &= T_q\mathfrak{S}_\lambda(u)(f_i) = u(f_i \circ \mathfrak{S}_\lambda) \\ &= u(\lambda_i) = 0 \end{aligned}$$

Usando (3.9) y que $d\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_\lambda^*(\omega)$ concluimos que para todo $(u, v) \in T_qQ \times T_qQ$

$$\begin{aligned} d\mathfrak{S}_\lambda(q)(u, v) &= ((\mathfrak{S}_\lambda)^*\omega)(q)(u, v) \\ &= \omega(\mathfrak{S}_\lambda(q))(T_q\mathfrak{S}_\lambda(u), T_q\mathfrak{S}_\lambda(v)) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Apéndice A

Fibrados vectoriales

En este primer apartado de los Apéndices recordaremos las nociones elementales de la categoría de fibrados vectoriales.

Definición A.0.6 *Diremos que una aplicación diferenciable $\pi : E \longrightarrow M$ es un fibrado vectorial de rango k si para todo $x \in M$ se tiene que*

i) $\pi^{-1}(x)$ *es un espacio vectorial de dimensión k.*

ii) *Existen un entorno abierto U de x en M y un difeomorfismo $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que, para todo $x' \in U$,*

  a*)* $(\pi \circ \varphi)(x', v) = x'$*, para todo $v \in \mathbb{R}^k$.*

  b*)* $\varphi_{x'} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(x')$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Al conjunto E se le denomina espacio total del fibrado, M es el espacio base del fibrado, π la proyección del fibrado, $\pi^{-1}(x)$ la fibra en x y φ es la trivialización local.

Una sección del fibrado vectorial $\pi : E \longrightarrow M$ es una aplicación diferenciable $s : M \longrightarrow E$ tal que

$$\pi \circ s = 1_M.$$

Nota que el espacio de las secciones de $\pi : E \longrightarrow M$, $\Gamma(E)$, es un $C^\infty(M)$-módulo.

Unos ejemplos de fibrados vectoriales son los que a continuación describimos.

Ejemplos:

i) *La segunda proyección $p_2 : \mathbb{R}^k \times M \longrightarrow M$.*

  Aquí las fibras son $\mathbb{R}^k$, el fibrado es de rango k y las secciones de este fibrado se pueden identificar con las aplicaciones diferenciables $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

ii) *El fibrado tangente de una variedad Q, $\pi_Q : TQ \longrightarrow Q$.*

  En este caso las fibras son T_qQ, con $q \in Q$, el rango es la dimensión de Q y las secciones son los campos de vectores sobre Q.

iii) *El fibrado cotangente de una variedad Q, $\pi_Q^* : T^*Q \longrightarrow Q$.*

Las fibras de este fibrado son los espacios cotangentes T_q^*Q, con $q \in Q$, por lo que el rango de π_Q^* es la dimensión de Q. Respecto a las secciones de este fibrado, son justamente las 1-formas sobre Q.

Definición A.0.7 *Sean $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M_1$, $\pi_2 : E_2 \longrightarrow M_2$ fibrados vectoriales y $F : E_1 \longrightarrow E_1$ y $f : M_1 \longrightarrow M_2$ aplicaciones diferenciables. Diremos que (F, f) es un morfismo de fibrados si el siguiente diagrama es conmuntativo*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \end{tikzcd}$$

y para cada $x \in M$, F induce una aplicación lineal

$$F_x : \pi_1^{-1}(x) \longrightarrow \pi_2^{-1}(f(x)).$$

Si además F y f son difeomorfismos, entoces diremos que (F, f) es un isomorfismo de fibrados vectoriales.

Supongamos ahora que $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \longrightarrow M$ son fibrados vectoriales sobre una misma variedad M. Sea $F : E_1 \longrightarrow E_2$ un morfismo de fibrados vectoriales sobre las identidades. Entonces F induce de forma natural un morfismo $C^\infty(M)$-módulos

$$F : \Gamma(E_1) \longrightarrow \Gamma(E_2).$$

Si F es un isomorfismo de fibrados vectoriales entonces induce un isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos entre los correspondientes espacios de secciones $\Gamma(E_1)$ y $\Gamma(E_2)$.

Apéndice B

Campos de vectores y formas sobre una variedad

B.1. Flujo de un campo de vectores y derivada de Lie

En este apéndice presentaremos la relación entre el flujo de un campo de vectores y la derivada de Lie de una k-forma respecto de ese campo de vectores.

Definición B.1.1 *Sea M una variedad. Diremos que una aplicación diferenciable $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ es un grupo uniparamétrico de transformaciones si verifica las siguientes condiciones*

1. $\phi_0 = \phi(0, \cdot) : M \longrightarrow M$ *es la identidad en* M.
2. $\phi_t : M \longrightarrow M$ *es un difeomorfismo.*
3. $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$.

Definición B.1.2 *Sea X un campo de vectores sobre una variedad M. Se denomina flujo del campo X a la aplicación diferenciable*

$$\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

tal que $\dfrac{d\phi_x}{dt}(t) = X_{\phi_x(t)}$ *y* $\phi_x(0) = x$ *para todo* $x \in M$.

Se tiene que todo grupo uniparamétrico de transformaciones $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ define un campo de vectores X sobre la variedad M.

Por otra parte, sean X un campo de vectores y α una k-forma sobre una variedad M. Se define *la derivada de Lie de α respecto del campo X* como la k-forma

$$\mathfrak{L}_X \alpha = i_X d\alpha + d\, i_X \alpha.$$

Equivalentemente la derivada de Lie de α respecto de X puede definirse en términos del flujo del campo X como sigue

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_X \alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) &= \lim_{t \to 0} \frac{\phi_t^* \alpha_x(v_1, \ldots, v_k) - \alpha_x(v_1, \ldots, v_k)}{t} \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi_t^*(\alpha))_x(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

donde $\phi_t : M \longrightarrow M$ es el flujo de X.

La siguiente proposición describe ciertas propiedades que involucran al flujo de un campo de vectores X y la derivada de Lie respecto de X.

Proposición B.1.3 *Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$, ϕ_t el flujo de X y $\alpha \in \Omega^k(M)$. Entonces*

i) $\mathfrak{L}_X(\phi_{t_0}^* \alpha) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0}(\phi_t^* \alpha)$

ii) $\mathfrak{L}_X(\phi_{t_0}^* \alpha) = \phi_{t_0}^*(\mathfrak{L}_X \alpha)$.

B.2. Lema de Poincaré

Es bien conocido que la diferencial exterior sobre una variedad define un operador de cohomología, esto es, $d^2 = 0$. Esto implica que toda forma exacta es cerrada. El recíproco no es cierto, aunque sí localmente. Este es el conocido *Lema de Poincaré* que a continuación pasamos a enunciar.

Lema B.2.1 *Sea α una k-forma sobre la variedad M tal que $d\alpha = 0$. Entonces para todo $x_0 \in M$ existen un entorno U de x_0 y una k-1-forma β en U tal que*

$$\alpha_x = (d\beta)_x \quad \forall x \in U.$$

Apéndice C

Mecánica Hamiltoniana

En este apartado de los Apéndices recordaremos las nociones básicas de la Mecánica Hamiltoniana clásica de un sistema no sometido a ligaduras, que serán necesarias para el desarrollo de este trabajo.

Uno de los problemas que estudia la Mecánica Newtoniana es conocer como se comporta a lo largo del tiempo un sistema de N objetos. Para simplificar este problema se identifican los objetos con puntos (con una cierta masa) en el espacio que estemos trabajando ($\mathbb{R}^d$). Al conjunto de posibles posiciones que puede adoptar un sistema se le denomina *espacio de configuración.*

El movimiento de un sistema de N puntos de masa queda descrito por *la segunda ley de Newton*, la cual afirma que

$$F_i = m_i \ddot{q}_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N,$$

donde F_i es la fuerza total del i-ésimo objeto, m_i su masa y $\ddot{q}_i$ su aceleración.

Una noción importante dentro de la Mecánica es el *momento lineal* de un objeto, el cual se define como

$$p_i := m_i \dot{q}_i$$

donde $\dot{q}_i$ denota la velocidad del objeto en cuestión.

Definición C.0.2 *La energía cinética de un sistema de N objetos es*

$$K := \frac{1}{2} \sum m_i ||\dot{q}_i||^2$$

donde $\dot{q}_i$ la velocidad del i-ésimo objeto.

Un tipo particular de problema es el denominado *problema de fuerza central*, el cual consiste en un sistema unipuntual cuya fuerza es de la forma $\mathbf{F} = F(||\mathrm{q}||)\hat{\mathrm{q}}$, donde $\hat{\mathrm{q}} = \mathrm{q}/||\mathrm{q}||$ y F es una función real. Un ejemplo de este tipo de problema es el *problema de Keppler* el cual estudia el movimiento de un sistema formado por dos puntos de masa en donde uno tiene una masa muy superior al otro y la única fuerza que hay entre ellos es la atracción gravitacional.

Definición C.0.3 *Un sistema de potencial Newtoniano es un sistema de ecuaciones*

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

para $i = 1, 2, \ldots, N$, donde $V(q_i)$ es una función real, a la cual se le llama energía potencial.

Nótese que todo problema de fuerza central es un sistema de potencial Newtoniano.

Definición C.0.4 *La energía total de un sistema de potencial con energía potencial $V(q)$ es $E := K + V$, siendo K la energía cinética.*

En la formulación Lagrangiana se tiene en cuenta las posiciones y velocidades de los distintos puntos de masa. Ello se observa en el siguiente resultado que relaciona esta formulación con cualquier sistema de potencial Newtoniano.

Teorema C.0.5 *Cualquier sistema de potencial Newtoniano*

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \ i = 1, 2, \ldots, N,$$

es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

para el lagrangiano $L : \mathbb{R}^{2dN} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L(q, \dot{q}) := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i ||\dot{q}_i||^2 - V(q).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange descritas en el teorema anterior no dependen de las coordenadas elegidas. En esta formulación la función de energía para un lagrangiano $L(q, \dot{q})$ es

$$E := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L.$$

En cuanto al formulalismo Hamiltoniano, este se diseña en un espacio en el que las coordenadas locales corresponden con las posiciones y los momentos de los puntos. El siguiente resultado relaciona los sistemas de potencial Newtoniano y la formulación Hamiltoniana.

Teorema C.0.6 *Cualquier sistema de potencial Newtoniano*

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \ i = 1, 2, \ldots, N,$$

es equivalente las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

para el hamiltoniano

$$H(q, p) := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} ||p_i||^2 + V(q).$$

Al igual que sucede con las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene que las ecuaciones de Hamilton son independientes de las coordenadas empleadas. En principio, un sistema lagrangiano no es equivalente a uno hamiltoniano, pero en ciertas condiciones de regularidad, que describiremos a continuación, se tiene la equivalencia entre ambas formulaciones.

Definición C.0.7 *La transformación de Legendre para un lagrangiano $L(q,\dot{q})$ es el cambio de variable $(q,\dot{q}) \mapsto (q,p)$ dado por*

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

A la nueva variable p se le denomina momento conjugado.

Nótese que en el caso de un sistema de potencial Newtoniano se tiene que

$$L(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i ||\dot{q}_i||^2 - V(q),$$

luego la transformación de Legendre es de la forma

$$p_i = m_i \dot{q}_i,$$

lo que se ha definido como momento del i-ésimo objeto.

Definición C.0.8 *Diremos que un lagrangiano L es regular si*

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0.$$

L es hiperregular si la transformación de Legendre para L es un difeomorfismo.

Teorema C.0.9 *Si $L : \mathbb{R}^{2dN} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un lagrangiano hiperregular, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

para el hamiltoniano

$$H(q,p) := p \cdot \dot{q}(q,p) - L(q, \dot{q}(q,p)).$$

Bibliografía

[AbMa] R. Abraham,J.E. Marsden *Foundations of Mechanics*, Second Edition, Benjamin, New york, 1978.

[BaMaMaPa] P. Balseiro, J.C. Marrero, D. Martín de Diego, E. Padrón *A unified framework for mechanics. Hamilton-Jacobi equation and applications nonlinearity*, Vol.23, 2010, 1887-1918 .

[CaGaMaMa] J.F. Cariñena, X. Grácia, G. Marmo, E. Martínez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Ramón Roy *Geometric Hamilton-Jacobi theory for nonholonomic dynamical systems*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 73.(2010), 431-454 .

[Ed] R.J. Eden *The Hamiltonian dynamics of non-holonomic system*, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 205 (1951), 564-583.

[HoScSt] D.D. Holm, T. Schmah, C. Stoica *Geometric Mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions*, Oxford University Press, 2009.

[IgLeMa] D. Iglesias, M. de León, D. Martín de Diego *Towards a Hamilton-Jacobi Theory for Nonholonomic Mechanical System*, J. Phys A: Math. Theor. 41 (2008) 015205.

[JoSa] J. V. José, E.J. Saletan *Classical dynamics*, Contemporary approach, Cambridge UNiversity Press, 1998.

[LeMaMa1] M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego *Linear almost Poisson structures and Hamilton-Jacobi Theory. Aplications to nonholonomic Mechanics*, J. Geometric Mechanics, Vol 2, 2010, 159-198.

[LeMaMa2] M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego *A geometric Hamilton-Jacobi Theory for Calssical Field Theories*, Varations, Geomtry and Physics. Nova Sci Publ. New York, 2009, 129-140.

[LeMaMaSaVi] M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego, M. Salgado, S. Vilariño *Hamiltonian-Jacobi theory in k-symplectic field theories*, Int J. Geom. Meth. Mod. Phys.

[LeRo] M. de León, P.R, Rodrígues *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Math. Ser. 152, Amsterdam (1989).

[LiMa] P. Libermann, Ch.M. Marle *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, 1987 .

[OB] T. Ohsawa, A.M. Bloch *Nonholonomic Hamilton-Jacobi equation and integrability*, Geom. Mechanics, Vol1, 2009, 461-481.

[PaRo1] C. Paufler, H. Romer *De Donder-Weyl equations and multisymplectic geometry*, XXXIII Symposium on Mathematical Physics (Tor'un,2001). Rep. Math. Phys. 49 (2002), 325-334.

[PaRo2] C. Paufler, H. Romer *Geometry of Hamiltonean n-vector fields in multisymplectic field theory*, J. Geom. Phys.44 (2002), 52-69.

[Pa] M. Pavon *Hamilton-Jacobi equations for nonholonomic dynamics*,J. Math. Phys. 42 (2005), 032902.

[Ru] W. Rumyantsev *Forms of Hamilton's Principle for Nonholonomic Systems, Mechanics, Automatic Control and Robotics* 2 (10) 1035-1048 (2002) .

[Va1] R. Van Dooren *The generalized Hamilton.Jacobi method for nonholonomic dynamical systems of Chetaev's type*,Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik 55 (1975) 407-411.

[Va2] R. Van Dooren *Motion of a rolling disc by a new generalized Hamilton-Jacobi method*,Journal of Applied Mathematics and Physics, 27 (1976) 501-505.

[Va3] R. Van Dooren *Second from of the generalized Hamilton-Jacobi method for nonholonomic dynamical systems*, Journal of Applied Mathematics and Physics 29 (1978) 828-834.

[Va4] R. Van Dooren *On the generalized Hamilton-Jacobi method for nonholonomic dynamical systems*, Dienst Analytische Mechanica, Tw, Vub (1979) 1-6 .