UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Departamento de Matemática Fundamental
Sección de Geometría y Topología

TEORÍAS DE HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA PARA VARIEDADES DE JACOBI, NAMBU-POISSON Y NAMBU-JACOBI

María Belén López Brito

Memoria realizada bajo la dirección de los Profesores Dr. D. Juan Carlos Marrero González y Dra. Dña. Edith Padrón Fernández para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de La Laguna

la laguna, diciembre 2002

Agradecimientos

En la elaboración de esta Memoria han sido muchas las personas que, de una forma u otra, me han apoyado. A todas ellas, quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento:

En primer lugar, deseo dar las gracias de forma muy especial al Dr. Juan Carlos Marrero González y a la Dra. Edith Padrón Fernández, directores de esta Memoria, por su dedicación continua, así como por sus orientaciones, aportaciones y ayuda sin las cuales no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

Al Dr. Angel Montesdeoca, quien ha colaborado directamente en la elaboración del texto facilitándome toda la herramienta del Latex; así como al resto de los miembros del área de Geometría y Topología del Departamento de Matemática Fundamental de la Universidad de La Laguna.

A Juan Rocha, Kichori y Luis González por su apoyo y aliento en todo momento.

Y por supuesto, con muchísimo amor a mi familia, sin ellos no habría llegado hasta aquí.

Contenido

Notación

Todas las variedades que vamos a considerar en esta memoria serán conexas. Además, si M es una variedad diferenciable, usaremos la siguiente notación:

- $C^\infty(M, \mathbb{R})$ es el álgebra de funciones reales C^∞ sobre M.
- $\mathfrak{X}(M)$ es el álgebra de Lie de los campos de vectores sobre M.
- $\Omega^k(M)$ es el espacio de las k-formas sobre M.
- $\mathcal{V}^k(M)$ es el espacio de los k-vectores sobre M.

Introducción

Es bien conocido que las variedades simplécticas juegan un papel importante en la formulación geométrica de la Mecánica Clásica. Una variedad simpléctica M con forma simpléctica Ω posee un corchete de funciones $\{\ ,\ \}$ definido por

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g)$$

para $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, donde X_f (respectivamente, X_g) es el campo hamiltoniano asociado a la función f (respectivamente, g). Así, si h es la función energía de un sistema hamiltoniano sobre M y f es un observable (esto es, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$) entonces la función $\{f, h\}$ da la evolución de f a lo largo de las trayectorias del sistema. El corchete simpléctico $\{\ ,\ \}$ es antisimétrico, satisface la identidad de Jacobi y es una derivación en cada argumento con respecto al producto usual de funciones. Además, tiene la particularidad de ser no degenerado en el siguiente sentido:

$$\{f, g\}(x) = 0,\ \ \forall g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \Rightarrow\ \ df(x) = 0.$$

Sin embargo, el estudio de ciertos sistemas con ligaduras o la reducción de ciertos sistemas mecánicos con grupos de simetrías da lugar a la aparición de corchetes de funciones que tienen la mismas propiedades que el corchete simpléctico, excepto que, en general, son degenerados. Este hecho motivó la introducción de una estructura matemática (*el corchete de Poisson*) que engloba, como casos particulares, a los diferentes tipos de corchetes de funciones que surgen de forma natural en los estudios comentados anteriormente.

Tras la introducción por Poisson del corchete que lleva su nombre, la geometría de Poisson ha sido profundamente estudiada convirtiéndose en un campo propio de investigación. Así, durante los últimos 30 años podemos decir que ha sido un vínculo de conexión entre áreas tan diversas como el análisis armónico sobre grupos de Lie, las álgebras de Lie infinito dimensionales, la mecánica de partículas y la mecánica de continuos, la teoría de singularidades, los sistemas completamente integrables, la cuantificación geométrica,...,etc. (véase, por ejemplo, [3, 8, 37, 61, 68, 80, 93, 119]).

Una estructura de Poisson sobre una variedad M es un corchete de Lie en el espacio de funciones reales C^∞-diferenciables el cual es una derivación en cada argumento con respecto al producto usual de funciones. En tal caso se dice que M es una variedad de Poisson. Las estructuras simplécticas son estructuras de Poisson. De hecho, una variedad de Poisson está construida con *piezas simplécticas* en el sentido de que admite una foliación generalizada, la foliación simpléctica, cuyas hojas son variedades simplécticas.

Otros ejemplos de estructuras de Poisson, interesantes para la Mecánica, son las estructuras cosimplécticas [1, 14] y las estructuras de Lie-Poisson [121].

Por otra parte, la estructura de álgebra de Lie en el espacio de las funciones reales C^∞-diferenciables sobre una variedad de Poisson M permite definir un corchete de Lie de 1-formas que dota al fibrado cotangente T^*M de una estructura de algebroide de Lie [35]. Los algebroides de Lie, una generalización natural de las álgebras de Lie y de las distribuciones completamente integrables, han resultado ser una herramienta matemática importante en recientes aproximaciones geométricas a la Mecánica Clásica y Cuántica (véase [15, 77, 94, 123]). La estructura de algebroide de Lie sobre el fibrado cotangente de una variedad de Poisson nos permite definir un complejo cuya cohomología es justamente la cohomología de Poisson o de Lichnerowicz-Poisson introducida por Lichnerowicz en [79].

La cohomología de Lichnerowicz-Poisson también puede ser descrita como la cohomología de un subcomplejo del complejo de Chevalley-Eilenberg asociado con el álgebra de Lie de las funciones diferenciales con el corchete de Poisson de funciones. Las cocadenas de este subcomplejo son operadores diferenciables multilineales antisimétricos que son derivaciones en cada uno de los argumentos respecto al producto usual de funciones.

Otro subcomplejo interesante en la cohomología de Chevalley-Eilenberg es el determinado por las cocadenas 1-diferenciables, esto es, los operadores diferenciales multilineales antisimétricos de orden 1.

En el caso de una variedad simpléctica M, la cohomología de Poisson coincide con la cohomología de De Rham de M. Sin embargo, en general, el cálculo explícito de la cohomología de Poisson es bastante complicado. Algunos resultados han sido obtenidos para variedades de Poisson regulares y para estructuras de Lie-Poisson sobre el espacio dual del álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto ([39, 40, 115, 127]).

Las teorías de cohomología y homología han resultado ser una buena herramienta en el estudio de las variedades de Poisson. Así, la cohomología de Poisson ha sido un buen instrumento para obtener obstrucciones a la cuantificación geométrica o a la cuantificación por deformaciones (véase, por ejemplo, [116, 125]). La homología de Poisson, también llamada homología canónica, fue introducida por Brylinski en [12], aunque ya anteriormente Koszul [69] había considerado el operador de homología. Este operador resulta ser el análogo al operador co-diferencial en el contexto de la geometría Riemaniana para variedades de Poisson, en el sentido de que permite construir una teoría de Hodge para este tipo de variedades ([50, 96, 129]). Recientemente, de forma independiente, Evens, Lu y Weinstein [29], Brylinski y Zuckerman [13] y Xu [128] han demostrado que la dualidad entre la homología y la cohomología de Poisson de una variedad de Poisson M está relacionada con la anulación de una clase de cohomología, la clase modular de M, introducida en [124]. Esta clase de cohomología ha sido también una herramienta importante en la clasificación de estructuras de Poisson cuadráticas (estructuras polinómicas homogéneas de orden 2) sobre un espacio vectorial de dimensión finita [84].

Aunque las estructuras simplécticas, cosimplécticas y de Lie-Poisson son de Poisson, existen otras estructuras interesantes para la Mecánica tales como las de contacto, que no son de Poisson. Las variedades de contacto tienen un corchete de funciones antisimétrico que satisface la identidad de Jacobi pero que no es una derivación en cada argumento respecto al producto usual de funciones. El corchete de una variedad de contacto sólo define un operador diferencial de primer orden para cada argumento. Este hecho motiva la introducción de un nuevo tipo de corchetes binarios de funciones sobre una variedad diferenciable, que constituyen una extensión natural de los corchetes de Poisson y del corchete asociado a una variedad de contacto: los corchetes de Jacobi. Así, la diferencia esencial entre los corchetes de Jacobi y Poisson reside en que los primeros no son derivaciones respecto del producto usual de funciones. Esta propiedad es sustituida por una propiedad más general: el corchete de Jacobi es un operador diferencial de primer orden. Una variedad provista de un corchete de este tipo se denomina variedad de Jacobi. Las variedades de Jacobi fueron introducidas por Lichnerowicz [81].

Una estructura de Jacobi sobre una variedad M es equivalente a una estructura de álgebra de Lie local (en el sentido de Kirillov [61]) en el espacio de las funciones reales C^∞-diferenciables sobre M.

Además de las variedades de Poisson y de Jacobi, otros ejemplos de variedades de Jacobi son las localmente conforme simplécticas [45, 61]. De hecho, la presencia de una estructura de Jacobi sobre una variedad implica la existencia de una foliación generalizada, la foliación característica, cuyas hojas son variedades de contacto o localmente conforme simplécticas (véase [24, 45, 61]).

Por otra parte, el fibrado de 1-jets $J^1(M,\mathbb{R})$ de una variedad de Jacobi M admite de forma natural una estructura de algebroide de Lie (ver [60]). Este hecho ha permitido recientemente introducir ciertas teorías de homología y cohomología [22, 23, 71, 72, 73, 74, 75, 118] para este tipo de variedades. En el caso de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi introducida en [75], esta juega un papel importante en el proceso de cuantificación geométrica de una variedad de Jacobi así como en el problema de existencia de representaciones de precuantificación sobre un fibrado de línea complejo para una variedad de Jacobi [75].

La cohomología de Lichnerowicz-Jacobi también puede ser descrita como sigue. Ya que el corchete de Jacobi $\{\ ,\ \}$ de una variedad de Jacobi M es una 2-cocadena 1-diferenciable en el complejo de cohomología de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie de funciones $(C^\infty(M,\mathbb{R}),\{\ ,\ \})$, podemos considerar la representación de dicha álgebra de Lie sobre sí misma definida por los campos hamiltonianos. En el caso de una variedad de Poisson esta representación coincide con la inducida por el corchete de Poisson. Sin embargo, en el contexto de una variedad de Jacobi, las cohomologías que definen estas dos representaciones son diferentes. La cohomología del álgebra de Lie $(C^\infty(M,\mathbb{R}),\{\ ,\ \})$ asociada a la representación de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ sobre sí mismo definida por el corchete de Jacobi es la cohomología de Chevalley-Eilenberg de la variedad de Jacobi y ha sido estudiada por Guédira y Lichnerowicz en [45, 79, 81]. En estos trabajos los autores hacen además un estudio detallado de la cohomología del subcomplejo del complejo de Chevalley-Eilenberg determinado por las cocadenas 1-diferenciables.

La cohomología determinada por la representación definida por los campos hamiltonianos, la cohomología de H-Chevalley-Eilenberg, fue introducida recientemente por León, Marrero y Padrón en [74, 75]. Como en el caso de la cohomología de Chevalley-Eilenberg de una variedad de Jacobi, uno puede considerar el subcomplejo 1-diferenciable. La cohomología de este subcomplejo es justamente la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi.

Por otra parte, recientemente, usando las construcciones de Xu [128], Vaisman [118] ha introducido la homología de Jacobi o de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad M. Esta homología es la homología del algebroide de Lie asociado a M con respecto a una cierta conexión llana en la potencia exterior máxima del fibrado de 1-jets $J^1(M, \mathbb{R})$. En este trabajo Vaisman define la clase modular de M, un elemento del primer grupo de cohomología de Lichnerowicz-Jacobi. La anulación de esta clase de cohomología implica dualidad entre la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi y la homología de Jacobi.

En otra dirección, Nambu [101] propone en 1973 una generalización de la Mecánica hamiltoniana sustituyendo el corchete de Poisson por un n-corchete de funciones en $\mathbb{R}^n$. Posteriormente Takhtajan [108] en 1994 introduce el concepto de estructura de Nambu-Poisson con el fin de dar un formalismo axiomático de los n-corchetes considerados por Nambu. El ejemplo canónico de estructura de Nambu-Poisson de orden n es el que está definido por una forma de volumen sobre la variedad. De hecho, toda variedad de Nambu-Poisson induce una foliación generalizada cuyas hojas son puntos o variedades de Nambu-Poisson asociadas a volúmenes [52] (ver también [36]).

Recientemente, se ha hecho un gran esfuerzo en comprender las propiedades de la geometría (local y global) de las variedades de Nambu-Poisson, así como conocer en detalle la Mecánica de Nambu (véase, por ejemplo, [2, 36, 43, 52, 53, 54] y las referencias contenidas en estos trabajos). En particular, en [54] se ha introducido la noción de algebroide de Leibniz, probándose que toda variedad de Nambu-Poisson tiene asociada una estructura de este tipo. Un algebroide de Leibniz es una generalización natural de un álgebra de Leibniz, en el mismo sentido que los algebroides de Lie generalizan a las álgebras de Lie. La noción de álgebra de Leibniz fue introducida por Loday [86] como una versión no conmutativa de las álgebras de Lie. La estructura de algebroide de Leibniz sobre una variedad de Nambu-Poisson nos permite introducir un complejo, cuya cohomología asociada tiene grados infinitos. En esta teoría de cohomología existe una clase de orden 1, la clase modular, introducida en [54] que es nula para el caso particular de las variedades Nambu-Poisson volumen.

Por otra parte, una importante generalización de las estructuras de Nambu-Poisson y de las estructuras de Jacobi, son las estructuras de Nambu-Jacobi introducidas en [92]. Se trata de variedades provistas de un n-corchete de funciones que satisfacen las mismas propiedades de un corchete de Nambu-Poisson salvo la condición de ser una derivación en cada argumento respecto al producto usual de funciones. Esta propiedad es reemplazada por la condición más general de ser un operador diferencial de primer orden para cada argumento.

Como ya se indica en el título, el objetivo de esta Memoria Doctoral es el estudio de diversas teorías de homología y cohomología para variedades de Jacobi, Nambu-Poisson y Nambu-Jacobi. También mostraremos condiciones para las que se tiene dualidad entre las correspondientes teorías de homología y cohomología.

La Memoria está dividida en dos grandes bloques. El primero está dedicado a las estructuras de Jacobi, mientras que el segundo incluye el estudio de las correspondientes teorías de homología y cohomología para multicorchetes de Poisson y Jacobi, esto es, para corchetes de Nambu-Poisson y Nambu-Jacobi.

Un esquema general de la Memoria es el siguiente:

- Primera parte: Teorías de homología y cohomología para variedades de Jacobi

  - Capítulo 1: Estructuras de Jacobi y algebroides de Lie.- Este es un capítulo introductorio que contiene algunas generalidades sobre estructuras de Jacobi y algebroides de Lie, recordándose la definición de ciertas teorías de homología y cohomología asociadas a estas estructuras.
  - Capítulo 2: Bialgebroides de Lie generalizados triangulares: cohomología y homología.- En este capítulo consideremos ciertas teorías de homología y cohomología asociadas a un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Este tipo de estructuras fueron introducidas recientemente por Iglesias y Marrero en [59] y constituyen una generalización de los bialgebroides de Lie triangulares en el sentido de Mackenzie y Xu ([89]), (ver también [64]). Como un caso

particular, recobraremos las teorías de homología y cohomología de una variedad de Jacobi descritas en el Capítulo 1.

- Capítulo 3: Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Jacobi.- Estudiaremos en este capítulo ciertas propiedades de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi para una variedad de Jacobi. Así mismo, daremos un cálculo explícito de esta cohomología para diferentes ejemplos relevantes de variedades de Jacobi.

- Capítulo 4: Homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Jacobi.- De forma similar como hicimos en el Capítulo 3, estudiaremos en este capítulo ciertas propiedades de la homología de Lichnerowicz-Jacobi para una variedad de Jacobi y realizaremos un cálculo explícito de esta homología para diferentes ejemplos relevantes de variedades de Jacobi. En cada uno de estos casos discutiremos la existencia de dualidad entre la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi y la homología de Lichnerowicz-Jacobi.

• Teorías de homología y cohomología para variedades de Nambu-Poisson y Nambu-Jacobi

  - Capítulo 5: Estructuras de Nambu-Poisson y Nambu-Jacobi. Algebroides de Leibniz.- En este primer capítulo de la segunda parte de la Memoria, se recuerdan algunas nociones y resultados conocidos sobre estructuras de Nambu-Poisson, Nambu-Jacobi y algebroides de Leibniz. Además, se construye el algebroide de Leibniz asociado a una variedad de Nambu-Jacobi.

  - Capítulo 6: Dualidad y clase modular de una estructura de Nambu-Poisson.- Introducimos nuevas teorías de homología y cohomología para una variedad de Nambu-Poisson que, a diferencia de las teorías asociadas al algebroide de Leibniz inducido por la estructura de Nambu-Poisson, no son de grados infinitos. Estudiamos el problema de dualidad de ambas teorías, usando una clase de cohomología de orden 1, la clase modular.

– Capítulo 7: Dualidad y clase modular de una estructura de Nambu-Jacobi.- Finalizamos la Memoria con la construcción de ciertas teorías de homología y cohomología para variedades de Nambu-Jacobi y analizamos el problema de dualidad entre tales teorías.

A continuación, detallaremos de forma más precisa el contenido de cada uno de estos capítulos.

Comenzamos la Memoria con el Capítulo 1, donde se recuerda la definición de variedad de Jacobi y se describen diversos ejemplos de variedades de Jacobi como las variedades de Poisson (incidiendo en las estructuras simplécticas, cosimplécticas y de Lie-Poisson) así como otros ejemplos de estructuras de Jacobi que no son de Poisson tales como las estructuras de contacto, localmente conforme simplécticas o la estructura de Jacobi de la esfera unidad en un álgebra de Lie real euclídea. A continuación se describe la foliación característica asociada a una variedad de Jacobi.

Las estructuras de Poisson son ejemplos de estructura de Jacobi pero existe otra relación entre las estructuras de Jacobi y Poisson. De hecho, si M es una variedad de Jacobi entonces la variedad producto $M \times \mathbb{R}$ admite una estructura de Poisson homogénea que se denomina la Poissonización de M. En la Sección 1.3 de este capítulo introductorio damos una descripción de tal estructura sobre $M \times \mathbb{R}$.

En la segunda parte de este capítulo (Sección 1.4) recordamos la definición de algebroide de Lie, así como algunos ejemplos interesantes que usaremos a lo largo de la Memoria. La relación entre los algebroides de Lie y las estructuras de Jacobi se pone de manifiesto en el hecho de que una estructura de Jacobi sobre una variedad M tiene asociado un algebroide de Lie en el fibrado de 1-jets $J^1(M, \mathbb{R})$ (véase [60]). De hecho, como probamos en la Proposición 1.4.3, esta estructura de algebroide de Lie caracteriza la estructura de Jacobi.

Todo algebroide de Lie induce un complejo de cohomología. En la Sección 1.4.2 recordamos cómo se define este complejo y describimos la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Jacobi M como la cohomología inducida por la estructura de algebroide de Lie asociado a la variedad de Jacobi. También mostraremos una forma alternativa de introducir esta cohomología, usando la representación del álgebra de Lie de las funciones reales C^∞-diferenciables en M sobre sí misma definida por los campos hamiltonianos de M.

Usando una construcción de Xu en [128], Vaisman [118] introduce una teoría de homología para una variedad de Jacobi M. Esta homología, que aquí denominamos homología de Lichnerowicz-Jacobi, se define como la homología inducida por la estructura de algebroide de Lie asociada a M y relativa a una cierta conexión llana. En la Sección 1.4.3 recordamos estas construcciones. Además, obtenemos una descripción alternativa de la homología de Lichnerowicz-Jacobi usando la representación inducida por los campos hamiltonianos descrita en la anterior sección.

Para finalizar el capítulo, recordamos la construcción de Vaisman [118] de la clase modular-Jacobi de una variedad de Jacobi, así como los resultados que garantizan dualidad entre la cohomología y la homología de Lichnerowicz-Jacobi para variedades de Jacobi con clase modular-Jacobi nula. Además, usando la definición de la clase modular de un algebroide de Lie arbitrario ([29]), relacionamos la clase modular-Jacobi de una variedad de Jacobi M con la clase modular del algebroide de Lie asociado a M.

Los bialgebroides de Lie fueron introducidos y estudiados por Mackenzie y Xu [89] como los invariantes infinitesimales de los grupoides de Poisson. Un bialgebroide de Lie es un par (A, A^*) tal que A es un algebroide de Lie y el fibrado dual A^* también tiene una estructura de algebroide de Lie compatible en un cierto sentido con la de A. Ejemplos de bialgebroides de Lie son las biálgebras de Lie [25] o, los pares de la forma (TM, T^*M), donde M es una variedad de Poisson y en TM (respectivamente, T^*M) consideramos la estructura del algebroide de Lie trivial (respectivamente, cotangente). A diferencia de lo que ocurre con una variedad de Poisson, el algebroide de Lie asociado a una variedad de Jacobi M y el fibrado vectorial $M \times \mathbb{R} \to M$ con la estructura natural de algebroide de Lie no definen un bialgebroide de Lie.

Este hecho y algunos ejemplos de estructuras de Jacobi lineales sobre fibrados vectoriales obtenidas en [58] motivaron la introducción en [59] de la noción de bialgebroide de Lie generalizado. Un bialgebroide de Lie generalizado es un par $((A, \phi_0), (A^*, X_0))$, donde A es un algebroide de Lie, ϕ_0 es un 1-cociclo en la cohomología del algebroide de A, A^* es el fibrado dual de A el cual admite una estructura de algebroide de Lie y X_0 es un 1-cociclo en la cohomología del algebroide de Lie A^*. Además, los algebroides de Lie A y A^* y los 1-cociclos ϕ_0 y X_0 deben satisfacer ciertas condiciones de compatibilidad. Ejemplos de este tipo de estructuras son los bialgebroides de Lie generalizados triangulares [59], una generalización de los bialgebroides de Lie triangulares de Mackenzie y Xu [89]. Si A es un algebroide de Lie sobre una variedad M con corchete de Schouten $[\![\ ,\ ]\!]$, ϕ_0 es un 1-cociclo y P es una bisección de A tal que $[\![P, P]\!] = 2i(\phi_0)P \wedge P$ entonces (A, ϕ_0, P) es un bialgebroide de Lie generalizado triangular. En tal caso (ver [59]), el fibrado dual A^* admite una estructura de algebroide de Lie de tal forma que $((A, \phi_0), (A^*, X_0))$ es un bialgebroide de Lie generalizado, donde $X_0 = -i(\phi_0)P$. Un ejemplo interesante de este tipo de estructuras es el bialgebroide de Lie generalizado triangular asociado a una variedad de Jacobi. De hecho, un bialgebroide de Lie generalizado arbitrario sobre una variedad M induce una estructura de Jacobi sobre M.

En el Capítulo 2 de la Memoria consideraremos teorías de homología y cohomología asociadas con el algebroide de Lie dual A^* de un bialgebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P). En el caso particular del bialgebroide de Lie generalizado triangular asociado a una variedad de Jacobi, recobramos algunas de las teorías de homología y cohomología descritas en el Capítulo 1. Comenzamos el Capítulo 2 recordando algunas definiciones y resultados acerca de la teoría de bialgebroides de Lie generalizados introducida en [59]. Dos herramientas fundamentales en esta teoría son la ϕ_0-cohomología y el corchete de ϕ_0-Schouten asociados a un algebroide de Lie y un 1-cociclo ϕ_0. Estas herramientas son usadas para describir la estructura de algebroide de Lie sobre el fibrado dual A^* de un bialgebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P) sobre la variedad M. La presencia de un 1-cociclo X_0 en A^* nos permite deformar la diferencial d_* del algebroide de Lie de A^* y definir un nuevo operador de cohomología $d_{*X_0} = d_* + e(X_0)$. Aquí, $e(X_0)$ denota el producto exterior por X_0. Así, en la Sección 2.2 obtenemos sobre A^* dos teorías de cohomología para el algebroide de Lie A^*: la cohomología del algebroide de Lie A^*, $H^*(A^*)$ y la X_0-cohomología de A^*, $H^*_{X_0}(A^*)$. Además, en esta sección mostramos la relación entre estas cohomologías y las cohomologías de Lichnerowicz-Jacobi y 1-diferenciables asociadas a la estructura de Jacobi inducida sobre M.

Estas relaciones nos permiten, en la Sección 2.3, introducir dos operadores de homología $\mathfrak{d}$ y $\mathfrak{d}_{X_0}$ sobre $\Gamma(\wedge^* A^*) = \oplus_k \Gamma(\wedge^k A^*)$. De hecho, si $[\![\ ,\ ]\!]_*$ es el corchete de Schouten de A^*, entonces $-\mathfrak{d}$ y $-\mathfrak{d}_{X_0}$ son operadores generantes del álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A^*), \wedge, [\![\ ,\ ]\!]_*)$. Además, usando los resultados de Xu [128], deducimos que $-\mathfrak{d}$ y $-\mathfrak{d}_{X_0}$ definen dos A^*-conexiones llanas ∇ y ∇^{X_0} sobre $\wedge^n A \to M$, donde n es el rango de A. Estos hechos nos permiten definir dos homologías $H_*(A^*, \nabla)$ y $H_*(A^*, \nabla^{X_0})$. Finalmente, en la Sección 2.4, introducimos de forma natural la noción de clase modular de un algebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P) como un elemento del primer grupo de cohomología $H^1(A^*)$ y mostramos que su anulación implica dualidad entre las teorías de homología y cohomología descritas, esto es,

$$H^k(A^*) \cong H_{n-k}(A^*, \nabla), \quad H^k_{X_0}(A^*) \cong H_{n-k}(A^*, \nabla^{X_0}), \quad \text{para todo } k.$$

Estos resultados generalizan los de [13, 29, 128] acerca de la dualidad entre la homología canónica y la cohomología de Lichnerowicz-Poisson de una variedad de Poisson unimodular, los de [65] sobre bialgebroides de Lie triangulares y los de [118] para variedades de Jacobi unimodulares.

El Capítulo 3 está dedicado al cálculo explícito de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de diferentes ejemplos relevantes, así como al estudio de algunas propiedades significativas de esta cohomología. Comenzamos el capítulo, probando que la cohomología es invariante por cambios conformes de la estructura de Jacobi.

En la Sección 3.2, recordamos algunos resultados de Lichnerowicz [80] sobre la cohomología 1-diferenciable de una variedad de Poisson (en este caso la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi y 1-diferenciable coinciden) que nos permiten relacionar la cohomología Lichnerowicz-Jacobi y la cohomología de Lichnerowicz-Poisson de una variedad de Poisson con cohomología de Lichnerowicz-Poisson finita. En el caso particular de una variedad simpléctica exacta M (la 2-forma simpléctica es exacta) este resultado se traduce en una relación entre la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de M y la cohomología de De Rham, $H^*_{DR}(M)$, de M. De hecho, se tiene que

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{DR}(M) \oplus H^{k-1}_{DR}(M).$$

Además, estudiamos diversos ejemplos como las variedades simplécticas de Lefschetz y las nilvariedades simplécticas compactas.

En la Sección 3.2.2 relacionamos la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad cosimpléctica M con una cierta cohomología introducida en [32] asociada a la estructura cosimpléctica. Además, damos un ejemplo explícito donde se muestra que incluso para una variedad cosimpléctica compacta, la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi puede ser de dimensión infinita.

Finalizamos el estudio de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Poisson, computando dicha cohomología en un ejemplo de una estructura de Poisson cuadrática.

La Sección 3.3 está dedicada al estudio de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de contacto M. En este caso probamos que

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{DR}(M) \oplus H^{k-1}_{DR}(M).$$

Nótese que, en general, en una variedad de contacto, la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi y la 1-diferenciable no son isomorfas ya que Lichnerowicz probó en [79] que esta última era trivial.

En la Sección 3.4, estudiamos la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de otros ejemplos relevantes de variedades de Jacobi: las variedades localmente conforme simplécticas. En el caso particular de una estructura globalmente conforme simpléctica, probamos que esta cohomología puede ser descrita en términos de la cohomología de De Rham. En el caso general, la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi está relacionada con una cierta cohomología definida en términos de la diferencial exterior usual y de la 1-forma de Lie. Esta cohomología fue introducida y estudiada por Guédira y Lichnerowicz [45] en una situación más general cuando se dispone de una 1-forma cerrada ω sobre una variedad arbitraria M. Nosotros probamos, en esta sección, que si M es una variedad de Riemann compacta y ω es cerrada, no nula y paralela respecto de la métrica de Riemann entonces dicha cohomología es trivial. Usando este hecho, deducimos que la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad compacta riemanniana y localmente conforme simpléctica con 1-forma de Lee no nula y paralela respecto a la métrica de Riemann es isomorfa a la cohomología de De Rham.

Finalizamos el Capítulo 3 con el cálculo de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de la esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto de dimensión n. Esta cohomología es descrita en términos de la cohomología del álgebra de Lie relativa a la representación trivial de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ y de la subálgebra de $C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$ definida por

$$Inv = \{\varphi \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}) / X_f(\varphi) = 0, \ \ \forall f \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})\},$$

donde X_f es el campo hamiltoniano de la función f asociado a la estructura de Jacobi definida sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$.

En las tablas contenidas en la Sección 3.6 se recoge un resumen de los principales resultados obtenidos a lo largo del Capítulo 3.

De manera similar a como se hizo en el capítulo anterior, en el Capítulo 4 hacemos un cálculo explícito de la homología de Lichnerowicz-Jacobi para los diferentes ejemplos de variedades de Jacobi estudiados en el capítulo anterior. En cada uno de los casos discutimos el problema de dualidad entre la cohomología y la homología de Lichnerowicz-Jacobi.

Comenzamos el capítulo probando que la homología de Lichnerowicz-Jacobi es también invariante por cambios conformes.

En la Sección 4.2, primeramente relacionamos la homología de Lichnerowicz-Jacobi con la homología canónica de una variedad de Poisson y a continuación obtenemos la relación explícita entre cohomología y homología de Lichnerowicz-Jacobi para los casos particulares de estructuras simplécticas, cosimplécticas, de Lie Poisson y el ejemplo de estructura de Poisson cuadrática considerado en el capítulo anterior.

En la Sección 4.3 demostramos que la homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de contacto es trivial. Por tanto, en general, no existe dualidad entre la homología y la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de contacto.

En el caso de una variedad globalmente conforme simpléctica, Vaisman [118] demuestra que la variedad es unimodular y por tanto, homología y cohomología son duales. En el caso general, el cálculo de la homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad localmente conforme simpléctica M es bastante complicado. En la Sección 4.4 obtenemos una relación entre esta homología y las cohomologías asociadas a ciertas formas cerradas. Esta relación nos permite deducir que si M es riemnianna, con 1-forma de Lee no nula y paralela respecto a la métrica, entonces la homología es trivial. Este hecho y los resultados para este caso de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi, implican que, en general, tampoco tenemos dualidad entre la homología y la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi para una variedad localmente conforme simpléctica.

En la Sección 4.5 probamos que la esfera unidad de un álgebra de Lie real unimodular de dimensión finita es una variedad de Jacobi unimodular, lo que supone que en este caso la homología y la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi son duales.

Finalizamos el Capítulo 4 con una tabla resumen de los principales resultados obtenidos a lo largo del mismo.

El resto de los capítulos de la Memoria están dedicados al estudio de ciertas teorías de homología y cohomología para variedades de Nambu-Poisson y Nambu-Jacobi.

Iniciamos el Capítulo 5 recordando las nociones de estructuras de Nambu-Poisson y Nambu-Jacobi y mostrando algunos ejemplos significativos. También describimos la foliación característica asociada a estos tipos de variedades. En la Sección 5.3 presentamos la noción de algebroide de Leibniz y el algebroide de Leibniz asociado a una variedad de Nambu-Poisson introducido en [54]. Además, demostramos que esta estructura de algebroide de Leibniz caracteriza a la estructura de Nambu-Poisson. Otro ejemplo de algebroide de Leibniz es el asociado a una estructura de Nambu-Jacobi. Para ello, introducimos la noción de emparejamiento de algebroides de Leibniz y probamos que una variedad de Nambu-Jacobi tiene dos algebroides de Leibniz emparejados que nos permiten construir una nueva estructura de algebroide de Leibniz. Finalizamos el capítulo recordando cómo se define la cohomología asociada a un algebroide de Leibniz.

El algebroide de Leibniz asociado a una variedad de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) nos permite introducir una teoría de cohomología. Sin embargo, esta cohomología tiene grados infinitos y, por tanto, no es posible una dualidad tipo Poincaré con alguna teoría de homología. Esto motiva que consideremos en el Capítulo 6 (respectivamente, en el Capítulo 7) un álgebra de Lie asociada a la variedad de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) M y la cohomología asociada a una cierta representación de este álgebra sobre el espacio $C^\infty(M, \mathbb{R})$, que llamaremos cohomología de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi). En la Sección 6.1.2 (respectivamente, Sección 7.1.2) relacionamos la cohomología de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) de M con la cohomología foliada inducida por la foliación característica. Veremos que en el caso Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) regular ambas cohomologías son isomorfas. A continuación introducimos en la Sección 6.2 (respectivamente, Sección 7.2) una teoría de homología para una variedad de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) orientada. Si M es una variedad orientada, de dimensión n, con forma de volumen ν y $\mathcal{V}^k(M)$ es el espacio de k-vectores sobre M, uno puede considerar de forma natural dos complejos de homología $(\mathcal{V}^*(M) = \bigoplus_k \mathcal{V}^k(M), \delta_\nu)$ y $(\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), \delta_{(0,\nu)})$ cuyos k-ésimos grupos de homología son isomorfos a los espacios $H^{n-k}_{DR}(M)$ y $H^{n-k}_{DR}(M) \oplus H^{n-k+1}_{DR}(M)$. El complejo de homología que define la homología canónica de Nambu-Poisson (respectivamente, de Nambu-Jacobi) es un subcomplejo de $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$ (respectivamente, $(\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), \delta_{(0,\nu)})$). En el caso regular, las k-cadenas de este subcomplejo son los elementos de $\mathcal{V}^k(M)$ (respectivamente, $\mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k+1}(M)$) que son tangentes a la foliación característica.

En la Sección 6.3 (respectivamente, Sección 7.3) se analiza bajo qué condiciones existe dualidad entre estas teorías de homología y cohomología. Para ello, consideramos el tensor modular asociado a la estructura Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) y a la forma de volumen considerada. Entonces, demostramos que este tensor define una clase de cohomología de orden 1 (la clase modular) en la cohomología de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) de M. Esta clase de cohomología no depende del volumen elegido. En el caso de una variedad de Nambu-Poisson (respectivamente, de Nambu-Jacobi) regular, tenemos que la anulación de esta clase de cohomología es equivalente a la existencia de un volumen básico (respectivamente, conforme) con respecto a la foliación característica.

Para finalizar la sección demostramos que la anulación de la clase modular implica, en el caso de una variedad de Nambu-Poisson (respectivamente, de Nambu-Jacobi) regular, dualidad entre la cohomología de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi) y la homología canónica de Nambu-Poisson (respectivamente, Nambu-Jacobi).

Además, en la Sección 6.4, consideramos un ejemplo de estructura de Nambu-Poisson singular y probamos que para esta estructura no existe dualidad entre las teorías de homología y cohomología y la cohomología de Nambu-Poisson no es isomorfa a la cohomología foliada.

Finalizamos esta Memoria con las referencias que hemos citado a lo largo de la misma, así como con algunas otras en donde se recogen algunos de los resultados que hemos obtenido en ella.

CAPÍTULO 1

Estructuras de Jacobi y algebroides de Lie

1.1 Algebras de Lie locales y variedades de Jacobi. Ejemplos

Esta primera sección del Capítulo 1 contiene algunas generalidades sobre variedades de Jacobi: definiciones, ejemplos y la descripción de la foliación característica de una variedad de Jacobi.

1.1.1 Algebras de Lie locales y variedades de Jacobi

Una *estructura de Jacobi* sobre una variedad n-dimensional M es un par (Λ, E), donde Λ es un 2-vector y E es un campo de vectores sobre M satisfaciendo las siguientes propiedades

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \qquad [E, \Lambda] = 0. \tag{1.1}$$

Aquí $[\ ,\ ]$ denota el corchete de Schouten-Nijenhuis ([9, 117]). La variedad M dotada con una estructura de Jacobi se denomina *variedad de Jacobi*.
Sobre una variedad de Jacobi (M, Λ, E) podemos definir un corchete de funciones $\{\ ,\ \} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ (*el corchete de Jacobi*)

dado por

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) + fE(g) - gE(f), \tag{1.2}$$

para todo $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Este corchete es $\mathbb{R}$-bilineal y satisface las siguientes propiedades:

i) Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$, para todo $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

ii) Es un operador diferencial de primer orden en cada argumento, respecto a la multiplicación ordinaria de funciones:

$$\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\} - fh\{1, g\}$$

para todo $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

iii) Identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

para todo $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

La propiedad *ii*) puede ser reemplazada por la siguiente relación entre los soportes de las funciones:

ii') $soporte\{f, g\} \subseteq (soporte f) \cap (soporte g)$.

Las propiedades *i*), *ii*) y *iii*) garantizan que el corchete de Jacobi define una estructura de *álgebra de Lie local* en el sentido de Kirillov ([61]) sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Recíprocamente, una estructura de álgebra de Lie local sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ define un corchete de Jacobi sobre M (ver [45, 61]).
Si el campo de vectores E es idénticamente nulo entonces, $\{\ ,\ \}$ es una derivación en cada argumento y, por consiguiente, $\{\ ,\ \}$ define un *corchete de Poisson* sobre M. En este caso, (1.1) se reduce a $[\Lambda, \Lambda] = 0$ y (M, Λ) es una *variedad de Poisson*. Las variedades de Jacobi y de Poisson fueron introducidas por Lichnerowicz ([80, 81]; ver además, [9, 24, 45, 61, 116, 121])
.

1.1.2 Ejemplos de variedades de Jacobi

En esta sección mostraremos algunos tipos de variedades sobre las cuales es posible definir una estructura de Jacobi.

Ejemplos 1.1.1 1. *Variedades de Poisson.* Ya hemos visto en la sección anterior que las variedades de Poisson son las variedades de Jacobi con campo de vectores E nulo. A continuación describiremos la estructura de Poisson de algunos ejemplos concretos.

1a) *Variedades simplécticas.* Una variedad simpléctica es un par (M, Ω), donde M es una variedad de dimensión par $2m$ y Ω es una 2-forma cerrada no degenerada. En este caso, la estructura de Poisson está definida como sigue

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Omega(\flat^{-1}(\alpha), \flat^{-1}(\beta)), \tag{1.3}$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, siendo $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por (ver [80])

$$\flat(X) = i(X)\Omega. \tag{1.4}$$

Usando el teorema clásico de Darboux, se deduce que para todo $x \in M$ existe un entorno U abierto y existen coordenadas canónicas $(q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m)$ en U tales que las expresiones locales de Ω y Λ son

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} dq^i \wedge dp_i, \qquad \Lambda = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

1b) *Variedades cosimplécticas.* Una *variedad cosimpléctica* (ver [1, 11, 14, 21]) es una terna (M, Φ, η), donde M es una variedad de dimensión impar $2m+1$, Φ y η son una 2-forma cerrada y una 1-forma cerrada, respectivamente, y $\eta \wedge \Phi^m$ es una forma de volumen.
Si $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos definido por

$$\flat(X) = i(X)\Phi + (i(X)\eta)\eta, \tag{1.5}$$

entonces el campo $\xi = \flat^{-1}(\eta)$ se denomina el *campo de Reeb de M* y está caracterizado por las relaciones

$$i(\xi)\Phi = 0 \quad \text{y} \quad i(\xi)\eta = 1. \tag{1.6}$$

En particular, tenemos que $\mathcal{L}_\xi \Phi = 0$ y $\mathcal{L}_\xi \eta = 0$.
Consideramos el 2-vector Λ sobre M definido por

$$\Lambda(\alpha,\beta) = \Phi(\flat^{-1}(\alpha), \flat^{-1}(\beta)) = \Phi(\flat^{-1}(\alpha - \alpha(\xi)\eta), \flat^{-1}(\beta - \beta(\xi)\eta)), \tag{1.7}$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Se tiene que (M, Λ) es una variedad de Poisson.
En coordenadas canónicas $(t, q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m)$ en M, las expresiones locales de Φ, η, ξ y Λ son (ver [1, 14])

$$\Phi = \sum_{i=1}^m dq^i \wedge dp_i, \qquad \eta = dt, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \Lambda = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

1*c*) *Estructuras Lie-Poisson.* Sea $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_\mathfrak{g})$ un álgebra de Lie real de dimensión n y denotamos por $\mathfrak{g}^*$ el espacio vectorial dual de $\mathfrak{g}$. Dadas dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})$, definimos $\{f, g\}$ como sigue. Para cada punto $x \in \mathfrak{g}^*$, linealizamos f y g, es decir, tomamos las aplicaciones tangentes $df(x)$ y $dg(x)$ en x y las identificamos con dos elementos $\hat{f}, \hat{g} \in \mathfrak{g}$. Entonces,

$$\{f, g\}(x) = x([\hat{f}, \hat{g}]_\mathfrak{g}) \in \mathbb{R}.$$

Esta definición no depende de los elementos $\hat{f}$ y $\hat{g}$ elegidos y define un corchete de Poisson. Al corchete $\{f, g\}$ se le denomina *corchete de Lie-Poisson sobre* $\mathfrak{g}^*$ de f y g (ver [117, 121]).
Si $\overline{\Lambda}$ es el correspondiente 2-vector de Poisson sobre $\mathfrak{g}^*$ y (x_i) son las coordenadas globales sobre $\mathfrak{g}^*$ obtenidas de una base, se tiene

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1.8}$$

donde c_{ij}^k son las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$.

Una propiedad interesante de esta estructura de Poisson es la siguiente (ver (1.8))

$$\mathcal{L}_A\overline{\Lambda} = -\overline{\Lambda}, \tag{1.9}$$

donde A es el campo de vectores radial sobre $\mathfrak{g}^*$. Notar que la expresión de A respecto de las coordenadas (x_i) es

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.10}$$

2. *Variedades de Jacobi no Poisson:*

2 *a*) *Variedades de contacto.* Sea M una variedad de dimensión $(2m+1)$ y η una 1-forma sobre M. Diremos que el par (M,η) es una *variedad de contacto* si la $(2m+1)$-forma $\eta \wedge (d\eta)^m$ es un elemento de volumen (ver [11, 78, 81]).

Si (M,η) es una variedad de contacto, definimos el 2-vector Λ y el campo de vectores E como sigue

$$\Lambda(\alpha,\beta) = d\eta(\flat^{-1}(\alpha), \flat^{-1}(\beta)), \qquad E = \flat^{-1}(\eta),$$

para todo $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$, donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos dado por

$$\flat(X) = i(X)d\eta + \eta(X)\eta. \tag{1.11}$$

Entonces, (M,Λ,E) es una variedad de Jacobi. El campo de vectores E es justamente el *campo de Reeb* de M y está caracterizado por las relaciones

$$i(E)\eta = 1, \qquad i(E)d\eta = 0. \tag{1.12}$$

Usando el teorema de Darboux generalizado se deduce que, en un entorno de cualquier punto de M, existen coordenadas canónicas $(t, q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m)$ tales que (ver [78, 81])

$$\eta = dt - \sum_i p_i dq^i, \qquad \Lambda = \sum_i (\frac{\partial}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial}{\partial t}) \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad E = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.13}$$

2 *b*) *Variedades localmente conforme simplécticas.* Una variedad *casi simpléctica* es un par (M, Ω), donde M es una variedad de dimensión par $2m$ y Ω es una 2-forma no degenerada sobre M. Una variedad casi simpléctica se dice *localmente conforme simpléctica (l.c.s.)* si para cada punto $x \in M$ existe un entorno abierto U tal que $d(e^{-\sigma}\Omega) = 0$, para alguna función diferenciable $\sigma : U \to \mathbb{R}$ (ver, por ejemplo, [45, 114]). Así, $(U, e^{-\sigma}\Omega)$ es una variedad simpléctica. Si $U = M$ entonces M es una *variedad globalmente conforme simpléctica (g.c.s.)*. Una variedad casi simpléctica (M, Ω) es *l.(g.)c.s.* si y sólo si existe una 1-forma cerrada (exacta) ω tal que

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega. \tag{1.14}$$

A la 1-forma ω se le denomina 1-*forma de Lee* de M. Es obvio que las variedades l.c.s. con 1-forma de Lee idénticamente cero son justamente las variedades simplécticas.
Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee ω. Definimos sobre M el 2-vector Λ y el campo de vectores E como sigue

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \Omega(\flat^{-1}(\alpha), \flat^{-1}(\beta)), \qquad E = \flat^{-1}(\omega), \tag{1.15}$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por

$$\flat(X) = i(X)\Omega. \tag{1.16}$$

Entonces, (M, Λ, E) es una variedad de Jacobi (ver [45]). Nótese que

$$\mathcal{L}_E\Omega = 0. \tag{1.17}$$

Usando el clásico teorema de Darboux se deduce que, en un entorno de cada punto de M, existen coordenadas canónicas $(q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m)$ y una función local diferenciable σ tales que las expresiones locales de Ω, ω, Λ y E son las siguientes

$$\begin{aligned} \Omega &= e^\sigma \sum_i dq^i \wedge dp_i, & \omega &= d\sigma = \sum_i (\frac{\partial\sigma}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial\sigma}{\partial p_i} dp_i), \\ \Lambda &= e^{-\sigma} \sum_i (\frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}), & E &= e^{-\sigma} \sum_i (\frac{\partial\sigma}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial\sigma}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}). \end{aligned} \tag{1.18}$$

2 *c*) *La esfera unidad en un álgebra de Lie real euclídea.* Sean $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ un álgebra de Lie real de dimensión m , $<\ ,\ >$ un producto escalar sobre $\mathfrak{g}$ y g la correspondiente métrica Riemanniana sobre $\mathfrak{g}$.
Denotamos por $\flat_{<,>} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo lineal entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ definido por

$$\flat_{<,>}(\xi)(\eta) = <\xi, \eta>, \quad \text{para todo} \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}. \tag{1.19}$$

Nótese que en este caso podemos identificar a $\mathfrak{g}$ con su espacio dual $\mathfrak{g}^*$ y así el 2-vector $\overline{\Lambda}$ sobre $\mathfrak{g}^*$ dado por (1.8) induce una estructura de Poisson sobre $\mathfrak{g}$. Denotaremos también por $\overline{\Lambda}$ al 2-vector Poisson sobre $\mathfrak{g}$.
Ahora, consideramos sobre $\mathfrak{g}$ el 2-vector Λ' y el campo de vectores E' dados por

$$\Lambda' = \overline{\Lambda} - A \wedge i(\alpha)\overline{\Lambda}, \qquad E' = i(\alpha)\overline{\Lambda}, \tag{1.20}$$

siendo A el campo radial en $\mathfrak{g}$ y α la 1-forma métricamente equivalente a A, esto es, α es la 1-forma definida por $\alpha(X) = g(X, A)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g})$. De (1.10) se sigue que

$$\alpha = \frac{1}{2} d(\|\ \|^2), \quad \mathcal{L}_A \alpha = 2\alpha, \tag{1.21}$$

donde $\|\ \|^2 : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ es la función real dada por $\|\ \|^2(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.
Entonces, usando (1.9) y (1.21) se deduce que

$$[A, E'] = E' \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{E'}\overline{\Lambda} = \frac{1}{2}[[\overline{\Lambda}, \|\ \|^2], \overline{\Lambda}] = 0.$$

Estas relaciones nos permiten afirmar que el par (Λ', E') induce una estructura de Jacobi sobre $\mathfrak{g}$.
Ahora, si $S^{m-1}(\mathfrak{g}) = \{a \in \mathfrak{g} / \|a\| = 1\}$ es la esfera unidad en $\mathfrak{g}$, las restricciones Λ y E a $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ de Λ' y E', respectivamente, son tangentes a $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ y, por tanto, el par (Λ, E) define una estructura de Jacobi sobre $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ (ver [82]).
Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ consideramos la función $<\xi,\quad>: S^{m-1}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$<\xi, \quad> (\eta) = <\xi, \eta> . \tag{1.22}$$

Entonces, de (1.8), (1.20) y (1.22), se sigue que

$$\{<\xi, \quad >, <\eta, \quad >\} = <[\xi,\eta], \quad >, \tag{1.23}$$

para $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, donde $\{\ ,\ \}$ denota el corchete de Jacobi sobre $S^{m-1}(\mathfrak{g})$.
Por otra parte, las expresiones del 2-vector Λ' y del campo de vectores E' respecto del sistema de coordenadas global $(x_1, \ldots, x_m)$ sobre $\mathfrak{g}$ deducido de una base ortonormal $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,m}$ son las siguientes

$$\Lambda' = \sum_{i,j,k,h,r} (\frac{1}{2}c^r_{hj}x_r - c^k_{ij}x_kx_ix_h)\frac{\partial}{\partial x_h}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad E' = \sum_{i,j,k} c^k_{ij}x_kx_i\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1.24}$$

siendo c^k_{ij} las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ para la base $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,m}$.

Observación 1.1.2 Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compacta de dimensión m y consideramos un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ invariante bajo la representación adjunta, entonces el campo de vectores E' es nulo, esto es, la estructura de Jacobi sobre $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ es una estructura de Poisson. De hecho, usando (1.24) deducimos que sobre un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ con producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$, $E' = 0$ si y sólo si $c^k_{ij} = -c^i_{kj}$, para todo i, j, k, lo cual es equivalente a que $\langle\ ,\ \rangle$ sea invariante bajo la representación adjunta. En tal caso, $\mathfrak{g}$ sería de tipo compacto.

1.2 La foliación característica de una variedad de Jacobi

Sea (M,Λ,E) una variedad de Jacobi. Definimos el homomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ -módulos $\#_\Lambda : \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$(\#_\Lambda(\alpha))(\beta) = \Lambda(\alpha, \beta), \tag{1.25}$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Esta aplicación puede extenderse a un nuevo homomorfismo, que denotaremos también por $\#_\Lambda$, del espacio de las k-formas $\Omega^k(M)$ en el espacio de los k-vectores $\mathcal{V}^k(M)$. En efecto, es suficiente considerar

$$\#_\Lambda(f) = f, \quad \#_\Lambda(\alpha)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (-1)^k\alpha(\#_\Lambda(\alpha_1), \ldots, \#_\Lambda(\alpha_k)), \tag{1.26}$$

para $f \in C^\infty(M,\mathbb{R}), \alpha \in \Omega^k(M)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega^1(M)$.

Observación 1.2.1 *i)* Si M es una variedad simpléctica, entonces $\#_\Lambda(\alpha) = -\flat^{-1}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$, donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo definido en (1.4).
ii) Si M es una variedad cosimpléctica con campo de Reeb ξ, entonces $\#_\Lambda(\alpha) = -\flat^{-1}(\alpha) + \alpha(\xi)\xi$, para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$, donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo definido en (1.5).
iii) Si M es una variedad de contacto con campo de Reeb E, entonces $\#_\Lambda(\alpha) = -\flat^{-1}(\alpha) + \alpha(E)E$, para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$, donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo definido en (1.11).
iv) Si M es una variedad l.c.s. entonces $\#_\Lambda(\alpha) = -\flat^{-1}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$, donde $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ es el isomorfismo definido en (1.16).

Por otra parte, si f es una función real C^∞ diferenciable sobre una variedad de Jacobi M, el campo de vectores X_f dado por

$$X_f = \#_\Lambda(df) + fE, \tag{1.27}$$

se denomina el *campo hamiltoniano* asociado a f. Nótese que el campo hamiltoniano asociado a la función constante 1 es justamente E. Un cálculo directo prueba que (ver [81, 91]):

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}},$$

es decir, la aplicación

$$(C^\infty(M,\mathbb{R}), \{\ ,\ \}) \to (\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ]), \qquad f \mapsto X_f$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.
Ahora, para todo $x \in M$, consideramos el subespacio $\mathcal{F}_x$ de T_xM generado por todos los campos hamiltonianos evaluados en el punto x. En otras palabras, $\mathcal{F}_x = (\#_\Lambda)_x(T_x^*M) + \langle E_x \rangle$. Ya que $\mathcal{F}$ es involutiva, se sigue fácilmente que $\mathcal{F}$ define una foliación generalizada en el sentido de Sussmann ([107]), *la foliación característica de M* (ver [24, 45, 61]). Además, la estructura de Jacobi de M induce una estructura de Jacobi sobre cada una de las hojas de $\mathcal{F}$. De hecho, si L es la hoja que pasa por el punto x de M y $E_x \notin Im(\#_\Lambda)_x$

(o equivalentemente, la dimensión de L es impar), entonces L es una variedad de contacto con la estructura de Jacobi inducida. Si por el contrario, $E_x \in Im(\#_\Lambda)_x$ (o equivalentemente, la dimensión de L es par) entonces L es una variedad l.c.s. (ver [24, 45, 61]). Si M es una variedad de Poisson entonces, de (1.25) y (1.27), deducimos que la foliación característica de M es justamente la *foliación simpléctica canónica* de M (ver [117, 121]).

Ejemplos 1.2.2 *i*) En una variedad simpléctica, de contacto o l.c.s. existe una única hoja de la foliación característica, la propia variedad (ver [24, 45, 61]).
ii) Si (M, Φ, η) es una variedad cosimpléctica, entonces la foliación característica (simpléctica) de M es la distribución regular completamente integrable $\eta = 0$.
iii) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real de dimensión m entonces la foliación característica (simpléctica) de la estructura de Lie-Poisson sobre $\mathfrak{g}^*$ está generada por los campos hamiltonianos de las funciones lineales sobre $\mathfrak{g}^*$. Además, si G es un grupo de Lie conexo, de dimensión m, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\xi \in \mathfrak{g}$, se sigue que el campo fundamental $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ asociado a ξ, vía la representación coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$, coincide con el campo hamiltoniano de la función lineal $\overline{\xi} : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ dada por $\overline{\xi}(\alpha) = \alpha(\xi)$, para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, esto es,

$$\xi_{\mathfrak{g}^*} = X_{\overline{\xi}}.$$

Así, las órbitas de la representación coadjunta son justamente las hojas de la foliación simpléctica (ver [117, 121]).
Recordamos que la representación coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$, $Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$, está definida por

$$Ad^*_g(\alpha)(\xi) = \alpha((T_e\tau_{g^{-1}}(\xi)))$$

para $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ y $\xi \in \mathfrak{g}$, siendo e el elemento neutro de G y $\tau_{g^{-1}} : G \to G$ el automorfismo interior dado por

$$\tau_{g^{-1}}(h) = g^{-1}hg, \qquad \text{para} \qquad h \in G.$$

iv) Si $< \ , \ >$ es un producto escalar sobre un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ de dimensión m, entonces $\mathfrak{g}$ puede ser identificada con el espacio dual $\mathfrak{g}^*$, y así la representación coadjunta induce una acción de G sobre $\mathfrak{g}$, la cual denotaremos por $\widetilde{Ad^*}$. Esta acción nos permite definir una acción de G sobre la esfera unitaria $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ como sigue

$$\overline{Ad^*} : G \times S^{m-1}(\mathfrak{g}) \to S^{m-1}(\mathfrak{g}), \qquad (g,\xi) \mapsto \overline{Ad^*}_g(\xi) = \frac{\widetilde{Ad^*}_g(\xi)}{\|\widetilde{Ad^*}_g(\xi)\|}. \quad (1.28)$$

Ahora, si sobre $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ consideramos la estructura de Jacobi definida en la Sección 1.1.2 (Ejemplo 2c)) entonces, usando los resultados de [82], deducimos que el campo fundamental $\xi_{S^{m-1}(\mathfrak{g})}$ con respecto a la acción $\overline{Ad^*}$ asociado a $\xi \in \mathfrak{g}$ coincide con el campo hamiltoniano sobre $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ asociado a la función $< \xi, \ >: S^{m-1}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ dada por (1.22), esto es,

$$\xi_{S^{m-1}(\mathfrak{g})} = X_{<\xi, \ >}. \quad (1.29)$$

Este resultado permite probar que las órbitas de la acción $\overline{Ad^*}$ son las hojas de la foliación característica de $S^{m-1}(\mathfrak{g})$ (ver [82] para más detalles) .

1.3 La poissonización de una variedad de Jacobi

Sea (Λ, E) una estructura de Jacobi sobre la variedad M y consideramos sobre la variedad producto $M \times \mathbb{R}$, el 2-vector $\widetilde{\Lambda}$ dado por

$$\widetilde{\Lambda} = e^{-t}(\Lambda + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E),$$

donde t es la coordenada usual sobre $\mathbb{R}$. Entonces, $\widetilde{\Lambda}$ define una estructura de Poisson sobre $M \times \mathbb{R}$. La variedad $M \times \mathbb{R}$ dotada con la estructura $\widetilde{\Lambda}$, se denomina la *poissonización de la variedad de Jacobi* (M, Λ, E) (ver [81]).

Ejemplos 1.3.1 *i*) *La poissonización de una variedad de Poisson.* Sea (M,Λ) una variedad de Poisson. Ya hemos visto que puede ser considerada como una variedad de Jacobi, donde $E = 0$. En este caso, la poissonización de (M, Λ) es la estructura de Poisson $\widetilde{\Lambda} = e^{-t}\Lambda$.

ii) La poissonización de una variedad de contacto. Sea (M, η) una variedad de contacto de dimensión $2m+1$. Si consideramos sobre la variedad producto $M \times \mathbb{R}$, la 2-forma Ω dada por $\Omega = e^t d\eta + e^t dt \wedge \eta$ se sigue que η es una 1-forma de contacto sobre M si y sólo si Ω es una 2-forma simpléctica sobre $M \times \mathbb{R}$ (ver [78]).
Denotamos por (Λ, E) la estructura de Jacobi asociada a M y por $\widetilde{\Lambda}$ la estructura de Poisson de la variedad simpléctica $(M \times \mathbb{R}, \Omega)$. Un cálculo directo, usando (1.3), demuestra que $\widetilde{\Lambda} = e^{-t}(\Lambda + \dfrac{\partial}{\partial t} \wedge E)$. Es decir, la poissonización de la variedad de contacto (M, η) es la variedad simpléctica $(M \times \mathbb{R}, \Omega)$.
iii) La poissonización de la esfera unidad sobre un álgebra de Lie. Usando los resultados de [82] , obtenemos que la poissonización de la variedad de Jacobi $(S^{m-1}(\mathfrak{g}), \Lambda, E)$ (ver el Ejemplo 1.1.1 2*c*)) es isomorfa a la variedad de Poisson $(\mathfrak{g} - \{0\}, \overline{\Lambda}_{|\mathfrak{g}-\{0\}})$ (ver el Ejemplo 1.1.1 1*b*)). De hecho, un isomorfismo entre estas variedades de Poisson está definido por

$$F : \mathfrak{g} - \{0\} \to S^{m-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}, \qquad \xi \mapsto F(\xi) = (\frac{\xi}{\|\xi\|}, ln\|\xi\|). \tag{1.30}$$

1.4 Algebroides de Lie. Cohomología y homología

1.4.1 Algebroides de Lie: definición y ejemplos

Sea M una variedad diferenciable y $\pi : A \to M$ un fibrado vectorial sobre M.
Una *estructura de algebroide de Lie* sobre $\pi : A \to M$ es un par $(\llbracket\ ,\ \rrbracket, \rho)$, donde $\llbracket\ ,\ \rrbracket : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \to \Gamma(A)$ es un corchete de Lie sobre el espacio $\Gamma(A)$ de las secciones de $\pi : A \to M$ y $\rho : A \to TM$ es una aplicación fibrada, llamada *aplicación ancla*, tal que, si denotamos también por $\rho : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(M)$ el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos inducido por la aplicación ancla, entonces:

$$\llbracket X, fY \rrbracket = f\llbracket X, Y \rrbracket + (\rho(X)(f))Y, \tag{1.31}$$

para cualesquiera $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $X, Y \in \Gamma(A)$.
A la terna $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ se le denomina *algebroide de Lie sobre* M (ver [88, 105]).

Observación 1.4.1 De la definición de algebroide de Lie, usando la identidad de Jacobi del corchete $[\![\ ,\ ]\!]$ y (1.31) deducimos que $\rho : (\Gamma(A), [\![\ ,\ ]\!]) \to (\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, esto es,

$$\rho([\![X, Y]\!]) = [\rho(X), \rho(Y)]$$

para todo $X, Y \in \Gamma(A)$.

Si $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie, el corchete de Lie $[\![\ ,\ ]\!]$ sobre las secciones de A se puede extender al *corchete de Schouten* $[\![\ ,\ ]\!]$ sobre el espacio $\Gamma(\wedge^* A) = \oplus_k \Gamma(\wedge^k A)$ de las multisecciones de A de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&[\![X, f]\!] = \rho(X)(f),\\
&[\![P, P']\!] = (-1)^{kk'}[\![P', P]\!],\\
&[\![P, P' \wedge P'']\!] = [\![P, P']\!] \wedge P'' + (-1)^{k'(k+1)} P' \wedge [\![P, P'']\!],\\
&(-1)^{kk''}[\![[\![P, P']\!], P'']\!] + (-1)^{k'k''}[\![[\![P'', P]\!], P']\!] + (-1)^{kk'}[\![[\![P', P'']\!], P]\!] = 0,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

para $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), X \in \Gamma(A), P \in \Gamma(\wedge^k A), P' \in \Gamma(\wedge^{k'} A)$ y $P'' \in \Gamma(\wedge^{k''} A)$.

Observación 1.4.2 La definición del corchete de Schouten que hemos dado aquí es la considerada en [117] (ver también [9, 80]). Algunos autores, ver por ejemplo [29], definen el corchete de Schouten de otra forma. De hecho, la relación entre el corchete de Schouten $[\![\ ,\ ]\!]'$ en el sentido de [29] y el corchete de Schouten $[\![\ ,\ ]\!]$ en el sentido de [117] es la siguiente

$$[\![P, Q]\!]' = (-1)^{k+1}[\![P, Q]\!],$$

para todo $P \in \Gamma(\wedge^k A)$ y $Q \in \Gamma(\wedge^* A)$.

Veremos a continuación la relación entre los algebroides de Lie y las álgebras de Gerstenhaber. Previamente, recordaremos la definición de un álgebra de Gerstenhaber.

Sea $(\mathcal{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^i, \wedge)$ un álgebra graduada, conmutativa y asociativa. Una estructura de álgebra de Lie graduada $[\![\,,]\!]$ sobre $\mathcal{A}$, es *un corchete de Gerstenhaber* si para todo $\alpha \in \mathcal{A}^i$, el endomorfismo $[\![\alpha, \cdot]\!]$ es una derivación de grado $i-1$ de $\mathcal{A}$. En tal caso $(\mathcal{A}, \wedge, [\![\,,]\!])$ es *un álgebra de Gerstenhaber* (ver [65]).
Si $(A, [\![\,,]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie, entonces la terna

$$(\Gamma(\wedge^* A) = \oplus_k \Gamma(\wedge^k A), \wedge, [\![\,,]\!])$$

es un álgebra de Gerstenhaber. Aquí $[\![\,,]\!]$ denota el corchete de Schouten del algebroide (ver (1.32)). Recíprocamente, si $\pi : A \to M$ es un fibrado vectorial sobre M y $[\![\,,]\!]$ es un corchete de Gerstenhaber sobre $\Gamma(\wedge^* A)$, entonces $[\![\,,]\!]$ define una estructura de álgebra de Lie sobre $\Gamma(A)$ y $(A, [\![\,,]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie con aplicación ancla $\rho : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\rho(X)(f) = [\![X, f]\!],$$

para todo $X \in \Gamma(A)$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (ver [38, 64, 65, 89]).

Ejemplos 1.4.3 *i) El algebroide de Lie de un álgebra de Lie.* Un álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,]_{\mathfrak{g}})$ es el primer ejemplo de algebroide de Lie. En este caso, consideramos el fibrado vectorial $\pi : \mathfrak{g} \to \{$ un punto $\}$. Las secciones de este fibrado se identifican con los elementos de $\mathfrak{g}$, el corchete del algebroide es la estructura de álgebra de Lie $[\,,]_{\mathfrak{g}}$ sobre $\mathfrak{g}$ y el ancla ρ es la aplicación nula.
ii) El algebroide de Lie sobre el fibrado tangente de una variedad diferenciable. Sea M una variedad diferenciable. Las secciones del fibrado tangente $TM \to M$ se identifican con los campos de vectores en M, el corchete del algebroide es el corchete de Lie de campos de vectores y la aplicación ancla es la identidad en TM.
iii) El algebroide de Lie sobre el fibrado $TM \times \mathbb{R} \to M$. Sea M una variedad diferenciable y $\pi : A \to M$ un fibrado vectorial sobre M. Está claro que $A \times \mathbb{R}$ es el espacio total de un fibrado vectorial sobre M. Además, el fibrado dual a $A \times \mathbb{R}$ es $A^* \times \mathbb{R}$ y los espacios $\Gamma(\wedge^r(A \times \mathbb{R}))$ y $\Gamma(\wedge^r(A^* \times \mathbb{R}))$ pueden

ser identificados con $\Gamma(\wedge^r A)\oplus\Gamma(\wedge^{r-1}A)$ y $\Gamma(\wedge^k A^*)\oplus\Gamma(\wedge^{k-1}A^*)$, de tal forma que

$$\begin{aligned}(P,Q)((\alpha_1,f_1),\dots,(\alpha_r,f_r)) = \;& P(\alpha_1,\dots,\alpha_r)+\\ & \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}f_iQ(\alpha_1,\dots,\widehat{\alpha}_i,\dots,\alpha_r),\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)((X_1,g_1),\dots,(X_k,g_k)) = \;& \alpha(X_1,\dots,X_k)+\\ & \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}g_i\beta(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_k),\end{aligned} \tag{1.34}$$

para $(P,Q)\in\Gamma(\wedge^r A)\oplus\Gamma(\wedge^{r-1}A), (\alpha,\beta)\in\Gamma(\wedge^k A^*)\oplus\Gamma(\wedge^{k-1}A^*), (\alpha_i,f_i)\in\Gamma(A^*)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})$ y $(X_j,g_j)\in\Gamma(A)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})$, con $i\in\{1,\dots,r\}$ y $j\in\{1,\dots,k\}$.

Bajo estas identificaciones, las contracciones y los productos exteriores vienen dados por

$$\left.\begin{array}{ll} i((\alpha,\beta))(P,Q)=(i(\alpha)P+i(\beta)Q,(-1)^k i(\alpha)Q), & \text{si } k\le r,\\ i((\alpha,\beta))(P,Q)=0, & \text{si } k>r,\\ i((P,Q))(\alpha,\beta)=(i(P)\alpha+i(Q)\beta,(-1)^r i(P)\beta), & \text{si } r\le k,\\ i((P,Q))(\alpha,\beta)=0, & \text{si } r>k,\\ (P,Q)\wedge(P',Q')=(P\wedge P',Q\wedge P'+(-1)^r P\wedge Q'), & \\ (\alpha,\beta)\wedge(\alpha',\beta')=(\alpha\wedge\alpha',\beta\wedge\alpha'+(-1)^k\alpha\wedge\beta'), & \end{array}\right\} \tag{1.35}$$

para $(P',Q')\in\Gamma(\wedge^{r'}A)\oplus\Gamma(\wedge^{r'-1}A)$ y $(\alpha',\beta')\in\Gamma(\wedge^{k'}A^*)\oplus\Gamma(\wedge^{k'-1}A^*)$.

Ahora, supongamos que A es el fibrado tangente TM de una variedad cualquiera M. En este caso, los espacios $\Gamma(\wedge^r(TM\times\mathbb{R}))$ y $\Gamma(\wedge^k(T^*M\times\mathbb{R}))$ pueden ser identificados con $\mathcal{V}^r(M)\oplus\mathcal{V}^{r-1}(M)$ y $\Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)$, respectivamente.

Usando estas identificaciones, mostraremos una estructura natural de algebroide de Lie sobre el fibrado vectorial $TM\times\mathbb{R}\to M$. Si $\pi: TM\times\mathbb{R}\to TM$ es la proyección canónica sobre el primer factor y $[\![\ ,\ ]\!]:(\mathfrak{X}(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R}))^2\to\mathfrak{X}(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})$ es el corchete dado por

$$[\![(X,f),(Y,g)]\!]=([X,Y],X(g)-Y(f)), \tag{1.36}$$

para (X,f),$(Y,g) \in \mathfrak{X}(M) \oplus C^\infty(M,\mathbb{R}) \cong \Gamma(TM\times\mathbb{R})$, entonces $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$ es un algebroide de Lie sobre M (ver [88, 102]).
En este caso el corchete de Schouten asociado a este algebroide está dado por

$$\big[(P,Q),(P',Q')\big] = ([P,P'],(-1)^{k+1}[P,Q'] - [Q,P']), \tag{1.37}$$

para $(P,Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ y $(P',Q') \in \mathcal{V}^{k'}(M) \oplus \mathcal{V}^{k'-1}(M)$.
iv) El algebroide de Lie de una foliación. Si $\mathcal{F}$ es la foliación de una variedad N y $F = \bigcup_{x\in N} \mathcal{F}(x) \to N$ es el correspondiente subfibrado vectorial de TN, entonces el triple $(F,[\ ,\ ],i)$ es un algebroide de Lie sobre N, donde $[\ ,\ ]$, es el corchete de Lie usual de campos de vectores e $i : F \to TN$ es la inclusión.
v) El algebroide de Lie de una variedad de Poisson. Sea (M,Λ) una variedad de Poisson. Entonces el fibrado cotangente $T^*M \to M$ admite una estructura de algebroide de Lie definida como sigue.
Consideramos el homomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$\#_\Lambda : \Gamma(T^*M) \cong \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por (1.25). Es claro que $\#_\Lambda(\alpha)$ es tangente a la foliación simpléctica. Además,

$$[\#_\Lambda(\alpha),\#_\Lambda(\beta)] = \#_\Lambda(\mathcal{L}_{\#_\Lambda(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\#_\Lambda(\beta)}\alpha - d(\Lambda(\alpha,\beta))),$$

para todo $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$.
Este resultado sugiere introducir el corchete de 1-formas

$$[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$$

dado por

$$[\![\alpha,\beta]\!]_\Lambda = \mathcal{L}_{\#_\Lambda(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\#_\Lambda(\beta)}\alpha - d(\Lambda(\alpha,\beta)),$$

para todo $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$. Aquí, $\mathcal{L}$ denota el operador derivada de Lie. Este corchete define una estructura de álgebra de Lie sobre $\Omega^1(M)$. Más aún, $(T^*M,[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda,\#_\Lambda)$ es un algebroide de Lie sobre M (ver [35]; ver además [19, 122]).

vi) El algebroide de Lie de una variedad de Jacobi. Si (M, Λ, E) es una variedad de Jacobi, el fibrado de 1-jets $J^1(M, \mathbb{R}) \cong T^*M \times \mathbb{R} \to M$ admite una estructura de algebroide de Lie definida como sigue.
Consideramos el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)} : \Gamma(J^1(M, \mathbb{R})) \cong \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(\alpha, f) = \#_\Lambda(\alpha) + fE. \tag{1.38}$$

Fácilmente se comprueba que $\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(\alpha, f)$ es tangente a la foliación característica (nota que $\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(df, f) = X_f$). Además, si $(\alpha, f), (\beta, g) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces (ver [60])

$$[\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(\alpha, f), \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(\beta, g)] = \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(\sigma, h)$$

$(\sigma, h) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ dadas por

$$\begin{aligned} \sigma = {} & \mathcal{L}_{\#_\Lambda(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\#_\Lambda(\beta)}\alpha - d(\Lambda(\alpha, \beta)) + f\mathcal{L}_E\beta - g\mathcal{L}_E\alpha - i(E)(\alpha \wedge \beta) \\ h = {} & \Lambda(\beta, \alpha) + \#_\Lambda(\alpha)(g) - \#_\Lambda(\beta)(f) + fE(g) - gE(f). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Este resultado nos sugiere introducir el corchete

$$[\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)} : (\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}))^2 \to \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$$

definido por

$$[\![(\alpha, f), (\beta, g)]\!]_{(\Lambda,E)} = (\sigma, h). \tag{1.40}$$

Este corchete define una estructura de álgebra de Lie sobre $\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ de tal forma que $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ es un algebroide de Lie sobre M (ver [60]).
Nota que (ver (1.2) y (1.39))

$$[\![(df, f), (dg, g)]\!]_{(\Lambda,E)} = (d\{f, g\}, \{f, g\}) \tag{1.41}$$

para todo $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Por consiguiente, la aplicación prolongación $j^1 : (C^\infty(M, \mathbb{R}), \{\ ,\ \}) \to (\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}), [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)})$ definida por

$$f \mapsto j^1(f) = (df, f)$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie (ver [60]).
En el caso particular en el que (M, Λ) es una variedad de Poisson (es decir, $E = 0$) se recobra, por proyección sobre el primer factor, el algebroide de Lie $(T^*M, [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda)$ (ver Ejemplo 1.4.3 v)).
El siguiente resultado muestra que el algebroide de Lie asociado a una variedad de Jacobi caracteriza a la estructura de Jacobi.

Proposición 1.4.4 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean Λ y E un 2-vector y un campo de vectores, respectivamente, sobre M. Consideremos la aplicación $\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)} : \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathfrak{X}(M)$ y el corchete $[\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)} : (\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}))^2 \to \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ definidos como en (1.38) y (1.40) . Entonces, (M, Λ, E) es una variedad de Jacobi si y sólo si $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ es un algebroide de Lie.*

Demostración. Supongamos que $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ es un algebroide de Lie. Definimos el siguiente corchete de funciones $\{\ ,\ \} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) + fE(g) - gE(f). \tag{1.42}$$

Este corchete es antisimétrico y es un operador de primer orden en cada argumento con respecto al producto usual de funciones.
Comprobemos que este corchete de funciones cumple la identidad de Jacobi. Consideramos el campo hamiltoniano asociado a la función $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$X_f = \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(df, f).$$

Nota que, para todo $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$X_f(g) = \{f, g\} + gE(f). \tag{1.43}$$

Como $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ es un algebroide de Lie, entonces (ver Observación 1.4.1)

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}[\![(df, f), (dg, g)]\!]_{(\Lambda,E)} = [X_f, X_g]. \tag{1.44}$$

Por otro lado, de (1.39) y (1.40), concluimos que

$$[\![(df, f), (dg, g)]\!]_{(\Lambda,E)} = (d\{f, g\}, \{f, g\}).$$

Por tanto,

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}. \tag{1.45}$$

En particular, $[X_f, X_1](g) = X_{\{f,1\}}(g)$ lo cual implica que (ver (1.43))

$$E\{f, g\} = \{E(f), g\} + \{f, E(g)\} \tag{1.46}$$

es decir, E es una derivación del álgebra de Lie $(C^\infty(M, \mathbb{R}), \{\ ,\ \})$.
Finalmente, de (1.45) se sigue que

$$X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = X_{\{f,g\}}(h)$$

y así, usando (1.43) y (1.46), obtenemos que

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

esto es, $\{\ ,\ \}$ satisface la identidad de Jacobi.

■

1.4.2 Cohomología de un algebroide de Lie con coeficientes triviales

En esta Sección introduciremos la cohomología de un algebroide de Lie con coeficientes triviales. Para ello, previamente recordaremos la definición de cohomología de un álgebra de Lie con coeficientes en un $\mathcal{A}$-módulo.
Sea $(\mathcal{A}, [\ ,\ ])$ un álgebra de Lie real (no necesariamente de dimensión finita) y sea $\mathcal{M}$ un espacio vectorial real con una representación de $\mathcal{A}$ sobre M, esto es, una multiplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\mathcal{A} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \qquad (a, m) \mapsto a \cdot m,$$

que satisface

$$[a_1, a_2] \cdot m = a_1 \cdot (a_2 \cdot m) - a_2 \cdot (a_1 \cdot m), \tag{1.47}$$

para $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ y $m \in \mathcal{M}$. En estas condiciones, una aplicación antisimétrica y k-lineal $c^k : \mathcal{A}^k \to \mathcal{M}$ se llama una *k-cocadena $\mathcal{M}$-valuada.* Estas cocadenas forman un espacio vectorial real $C^k(\mathcal{A};\mathcal{M})$ y el operador lineal $\partial^k : C^k(\mathcal{A};\mathcal{M}) \to C^{k+1}(\mathcal{A};\mathcal{M})$ dado por

$$\begin{aligned}(\partial^k c^k)(a_0,\dots,a_k) &= \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot c^k(a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_k) + \\ &\quad \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c^k([a_i,a_j],a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_k)\end{aligned} \tag{1.48}$$

define un operador de cohomología, esto es, $\partial^{k+1} \circ \partial^k = 0$, para todo k. Por tanto, tenemos los correspondientes espacios de cohomología $H^k(\mathcal{A};\mathcal{M})$. Esta cohomología se denomina *la cohomología del álgebra de Lie $\mathcal{A}$ con coeficientes en $\mathcal{M}$, o relativa a la representación de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{M}$* (ver, por ejemplo, [117]).

Ahora, si $(A, [\![\,,\,]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie, se puede definir la representación del álgebra de Lie $(\Gamma(A), [\![\,,\,]\!])$ sobre el espacio $C^\infty(M,\mathbb{R})$ dada por

$$\Gamma(A) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$$(X,f) \to X \cdot f = \rho(X)(f).$$

Denotaremos por d_A el operador de cohomología definido por esta representación. Nótese que el espacio de las k-cocadenas que son $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales, es justamente $\Gamma(\wedge^k A^*)$, donde A^* es el fibrado dual de A. Además, se tiene que $d_A(\Gamma(\wedge^k A^*)) \subseteq \Gamma(\wedge^{k+1} A^*)$ (ver (1.48)), para todo k y, por tanto, se puede considerar el subcomplejo $(\Gamma(\wedge^* A^*), (d_A)_{|\Gamma(\wedge^* A^*)})$. La cohomología de este subcomplejo es la *cohomología del algebroide de Lie con coeficientes triviales* y la restricción de d_A a $\Gamma(\wedge^* A^*)$ es la *diferencial del algebroide de Lie A* (ver [88]). Denotaremos los correspondientes espacios de cohomología por $H^*(A)$.

Usando las anteriores definiciones, se sigue que una 1-cocadena $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ es un 1-cociclo en el complejo de cohomología del algebroide A si y sólo si

$$\phi_0[\![X,Y]\!] = \rho(X)(\phi_0(Y)) - \rho(Y)(\phi_0(X)), \quad \forall X,Y \in \Gamma(A). \tag{1.49}$$

Por otro lado, si $X \in \Gamma(A)$, entonces se puede introducir la derivada de Lie por X, como el operador $\mathcal{L}_X^A : \Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^k A^*)$ dado por

$$\mathcal{L}_X^A = i(X) \circ d_A + d_A \circ i(X).$$

Sean $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ y $(A', [\![\ ,\ ]\!]', \rho')$ dos algebroides de Lie sobre la variedad M y $\psi : A \to A'$ un homomorfismo de fibrados vectoriales. Se dice que ψ es *un homomorfismo de algebroides de Lie sobre la identidad* si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{array}{ll} i) & \rho' \circ \psi = \rho \\ ii) & \psi([\![X_1, X_2]\!]) = [\![\psi(X_1), \psi(X_2)]\!]', \quad \text{para todo} \quad X_1, X_2 \in \Gamma(A). \end{array} \tag{1.50}$$

Se tiene que si $\psi : \Gamma(A) \to \Gamma(A')$ es el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos inducido por $\psi : A \to A'$, entonces, se pueden considerar los homomorfismos de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos $\psi^r : \Gamma(\wedge^r (A')^*) \to \Gamma(\wedge^r A^*)$ y $\psi_r : \Gamma(\wedge^r A) \to \Gamma(\wedge^r A')$ dados por

$$\begin{aligned} \psi^r(\xi^r)(X_1, \ldots, X_r) &= \xi^r(\psi(X_1), \ldots, \psi(X_r)), \\ \psi_r(X_1 \wedge \ldots \wedge X_r) &= \psi(X_1) \wedge \ldots \wedge \psi(X_r), \end{aligned} \tag{1.51}$$

para todo $\xi^r \in \Gamma(\wedge^r (A')^*)$ y $X_1, \ldots, X_r \in \Gamma(A)$.
Un cálculo directo prueba que

$$d_A \circ \psi^k = \psi^{k+1} \circ d_{A'}, \tag{1.52}$$

donde d_A (respectivamente, $d_{A'}$) es el operador de cohomología inducido por la estructura del algebroide de Lie $([\![\ ,\ ]\!], \rho)$ (respectivamente, $([\![\ ,\ ]\!]', \rho')$). Por tanto, ψ induce un homomorfismo, $\Psi : H^k(A') \to H^k(A)$, entre los correspondientes grupos de cohomología (ver [88]).

Ejemplos 1.4.5 *i)* Para el algebroide de Lie $(TM, [\ ,\ ], Id)$, la cohomología del algebroide de Lie con coeficientes triviales es justo la cohomología de De Rham de M, $H^*_{dR}(M)$.
ii) Para un álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$, la cohomología del algebroide de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}, \rho \equiv 0)$ se obtiene a partir de la representación trivial

$$\mathfrak{g} \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad (a, f) \mapsto a \cdot f = 0$$

(nota que, en este caso, M es un punto). Entonces el operador de cohomología viene dado por $d_{\mathfrak{g}} : C^k(\mathfrak{g}, C^\infty(M,\mathbb{R})) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, C^\infty(M,\mathbb{R}))$ y

$$d_{\mathfrak{g}}(\xi)(a_0,\ldots,a_k) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\xi([a_i,a_j],a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_k),$$

para $a_i \in \mathfrak{g}$, $i = 0,\ldots,k$. Por tanto, obtenemos que la cohomología del algebroide $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}, \rho \equiv 0)$ es la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ relativa a la representación trivial de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$.
iii) Para el algebroide de Lie $(TM\times\mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!], \pi)$, el fibrado dual a $TM\times\mathbb{R}$ es $T^*M\times\mathbb{R}$ y, bajo la identificación $\Gamma(\Lambda^k(T^*M\times\mathbb{R})) \cong \Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)$, la diferencial $\widetilde{d}$ del algebroide de Lie $(TM\times\mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!], \pi)$ está dada por

$$\widetilde{d}(\alpha,\beta) = (d\alpha, -d\beta), \tag{1.53}$$

para todo $(\alpha,\beta) \in \Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)$. Así, $H^k(TM\times\mathbb{R}) \cong H^k_{dR}(M)$ $\oplus H^{k-1}_{dR}(M)$, para todo k.
iv) Para una foliación regular $\mathcal{F}$ sobre N, la cohomología del algebroide asociado $(F = \bigcup_{x\in N}\mathcal{F}(x), [\ ,\ ], i)$ es isomorfa a la cohomología foliada de $(N,\mathcal{F})$.
En efecto, comencemos recordando cómo se define esta última cohomología ([27, 48, 112, 118]).
Consideremos el espacio $\Omega^k(N,\mathcal{F})$ de las k-formas sobre N tal que

$$\alpha(X_1,\ldots,X_k) = 0$$

para cualesquiera $X_1,\ldots,X_k$ vectores tangentes a $\mathcal{F}$. Entonces $\Omega^*(N,\mathcal{F})$ determina un subconjunto del complejo de De Rham y, por tanto, la diferencial exterior induce sobre los $C^\infty(N,\mathbb{R})$-módulos $\Omega^r(\mathcal{F}) = \dfrac{\Omega^r(N)}{\Omega^r(N,\mathcal{F})}$ un nuevo operador de cohomología $d_{\mathcal{F}} : \Omega^k(\mathcal{F}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{F})$ dado por

$$d_{\mathcal{F}}([\alpha]) = [d\alpha], \quad \text{para todo} \quad [\alpha]\in\Omega^k(\mathcal{F}).$$

La cohomología $H^*(\mathcal{F})$ del complejo $(\Omega^*(\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$ se denomina *la cohomología foliada* de $(N,\mathcal{F})$ y el operador $d_{\mathcal{F}}$ es llamado *la diferencial foliada de* $(N,\mathcal{F})$.

Entonces, la aplicación

$$\Pi^k : \Omega^k(\mathcal{F}) \to C^k(\Gamma(\mathcal{F}); C^\infty(N, \mathbb{R}))$$

definida por

$$\Pi^k([\alpha])(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(X_1, \ldots, X_k), \tag{1.54}$$

para todo $[\alpha] \in \Omega^k(\mathcal{F})$ y $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(F)$ es un isomorfismo de $C^\infty(N, \mathbb{R})$-módulos. Este isomorfismo induce un isomorfismo entre la cohomología foliada y la cohomología del algebroide de Lie $(F, [\ ,\ ], i)$.

v) Para el caso del algebroide de Lie asociado a una variedad de Poisson (M, Λ), las k-cocadenas pueden ser identificadas con los k-vectores sobre M y, bajo esta identificación, el operador de cohomología del algebroide, d_Λ, tiene la siguiente expresión

$$d_\Lambda : \mathcal{V}^k(M) \to \mathcal{V}^{k+1}(M), \qquad d_\Lambda P = -[\Lambda, P]. \tag{1.55}$$

La cohomología del algebroide $(T^*M, [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda)$ es justamente *la cohomología de Lichnerowicz-Poisson* (abreviadamente, LP-cohomología) de M (ver [79]). Denotaremos esta cohomología por $H^*_{LP}(M, \Lambda)$ o, si no hay peligro de confusión, por $H^*_{LP}(M)$.

vi) Para el algebroide de Lie $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ de una variedad de Jacobi (M, Λ, E), bajo la identificación $\Gamma(\wedge^k(TM \times \mathbb{R})) \cong \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ (ver (1.33)), el operador de cohomología de este algebroide $d_{(\Lambda,E)} : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^{k+1}(M) \oplus \mathcal{V}^k(M)$ está dado por

$$d_{(\Lambda,E)}(P, Q) = (-[\Lambda, P] + kE \wedge P + \Lambda \wedge Q, [\Lambda, Q] - (k-1)E \wedge Q + [E, P]), \tag{1.56}$$

para todo $(P, Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$. La cohomología resultante, fue introducida en [74] (ver también [75]) y se denomina *cohomología de Lichnerowicz-Jacobi* (abreviadamente, LJ-cohomología) de M. Denotaremos la LJ-cohomología de M por $H^*_{LJ}(M, \Lambda, E)$ o, si no hay peligro de confusión, por $H^*_{LJ}(M)$.

Otra forma alternativa de describir esta cohomología es la siguiente.

Si $\{\ ,\ \}$ denota el corchete de Jacobi de (M, Λ, E), consideramos la cohomología del álgebra de Lie $(C^\infty(M,\mathbb{R}), \{\ ,\ \})$, relativa a la representación definida por los campos hamiltonianos, esto es,

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \qquad (f,g) \mapsto X_f(g). \tag{1.57}$$

Esta cohomología se denomina *cohomología de H-Chevalley-Eilenberg* de M y la denotaremos por $H^*_{HCE}(M)$ (ver [71, 72, 73, 74, 75]). De forma explícita, el espacio $C^k_{HCE}(M)$ de las k-cocadenas de H-Chevalley-Eilenberg, es el espacio vectorial de las aplicaciones k-lineales antisimétricas $c^k : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times \ldots \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ y el operador de cohomología ∂_{HCE} del complejo viene dado por

$$\begin{aligned} \partial_{HCE} c^k(f_0, \ldots, f_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_{f_i}(c^k(f_0, \ldots, \hat{f}_i, \ldots, f_k)) + \\ \sum_{i<j} &\ (-1)^{i+j} c^k(\{f_i, f_j\}, f_0, \ldots, \hat{f}_i, \ldots, \hat{f}_j, \ldots, f_k) \end{aligned} \tag{1.58}$$

para todo $f_0, \ldots, f_k \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.
Un interesante subcomplejo del complejo H-Chevalley-Eilenberg es el complejo de las cocadenas 1-diferenciables.
Una k-cocadena $c^k \in C^k_{HCE}(M)$ se dice que es *1-diferenciable* si está definida por un operador diferencial k-lineal antisimétrico de orden 1.
Si $\widetilde{P}$ es un elemento del espacio de todas las k-cocadenas 1-diferenciales $C^k_{HCE1-dif}(M)$, entonces, $\partial_{HCE}\widetilde{P} \in C^{k+1}_{HCE1-dif}(M)$. Así, podemos considerar el subcomplejo $(C^*_{HCE1-dif}(M), (\partial_{HCE})_{|C^*_{HCE1-dif}(M)})$ del complejo de H-Chevallely-Eilenberg, cuya cohomología $H^*_{HCE1-dif}(M)$ se denominará la *cohomología H-Chevalley-Eilenberg 1-diferenciable de M* (ver [74]). Esta cohomología puede ser identificada con la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi.
En efecto, consideremos los monomorfismos $j^k : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to C^k_{HCE}(M)$ dados por

$$\begin{aligned} j^k(P,Q)(f_1, \ldots, f_k) = &\ P(df_1, \ldots, df_k) + \\ &\sum_{q=1}^{k} (-1)^{q+1} f_q Q(df_1, \ldots, \widehat{df}_q, \ldots, df_k). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Entonces $j^k(\mathcal{V}^k(M)\oplus\mathcal{V}^{k-1}(M)) = C^k_{HCE1dif}(M)$, lo cual implica que $\mathcal{V}^k(M)\oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ y $C^k_{HCE1-dif}(M)$ son isomorfos. Además, usando (1.56), (1.58), (1.59) y las propiedades del corchete de Schouten-Nijenhuis, se puede probar que

$$\partial_{HCE}(j^k(P,Q)) = j^{k+1}(d_{(\Lambda,E)}(P,Q)) \tag{1.60}$$

para todo $(P,Q)\in\mathcal{V}^k(M)\oplus\mathcal{V}^{k-1}(M)$. Concluimos entonces que $H^k_{LJ}(M)$ es isomorfo a $H^k_{HCE1-dif}(M)$, para todo k.

1.4.3 Teorías de homología para un algebroide de Lie

En [128] se introduce la noción de operador de homología asociado con un algebroide de Lie A de rango m sobre la variedad M y con una A-conexión llana sobre $\wedge^m A\to M$ como sigue.
Sea $(A,[\![\,,]\!],\rho)$ un algebroide de Lie sobre M de rango m. Una *A-conexión* sobre un fibrado vectorial $E\to M$ es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\nabla:\Gamma(A)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E), \qquad (X\,,s)\mapsto\nabla_X s$$

tal que

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s, \qquad \nabla_X(fs) = (\rho(X)(f))s + f\nabla_X s, \quad \forall f\in C^\infty(M,\mathbb{R}).$$

La curvatura de una A-conexión ∇ puede ser definida, al igual que se hace para las conexiones usuales, como la aplicación $C^\infty(M,\mathbb{R})$-trilineal $R:\Gamma(A)\times\Gamma(A)\times\Gamma(A)\to\Gamma(A)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

para todo $X,Y,Z\in\Gamma(A)$. ∇ se dice que es *llana* si la curvatura de ∇ es nula.
Cualquier A-conexión sobre $\wedge^m A\to M$ define un operador diferencial $D:\Gamma(\wedge^k A)\to\Gamma(\wedge^{k-1}A)$, cuya expresión local es

$$D(i(\omega)\Phi) = (-1)^{m-k}(i(d\omega)\Phi + \sum_{j=1}^m i((\alpha_j\wedge\omega))\nabla_{X_j}\Phi), \tag{1.61}$$

donde $\Phi \in \Gamma(\wedge^m A), \omega \in \Gamma(\wedge^{m-k} A^*), \{X_j\}$ es una base local de $\Gamma(A)$ y $\{\alpha_j\}$ es la base dual en $\Gamma(A^*)$. El operador D genera el álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A), \wedge, [\![\, ,]\!])$, es decir, para todo $U_1 \in \Gamma(\wedge^{k_1} A)$ y $U_2 \in \Gamma(\wedge^{k_2} A)$,

$$[\![U_1, U_2]\!] = D(U_1 \wedge U_2) - DU_1 \wedge U_2 - (-1)^{k_1} U_1 \wedge DU_2,$$

o, equivalentemente,

$$[\![f, X]\!] = D(fX) - fD(X), \qquad [\![X, Y]\!] = D(X \wedge Y) - (DX)Y + (DY)X,$$

para $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $X, Y \in \Gamma(A)$.
Además, la conexión ∇ puede ser obtenida desde el operador D. Más precisamente, se tiene que

$$\nabla_X \Phi = X \wedge D\Phi, \tag{1.62}$$

para todo $X \in \Gamma(A)$ y $\Phi \in \Gamma(\wedge^m A)$.
De hecho, (1.61) y (1.62) definen una correspondencia biyectiva entre las A-conexiones sobre $\wedge^m A \to M$ y los operadores lineales D que generan el álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A), \wedge, [\![\, ,]\!])$. Bajo esta correspondencia, una A-conexión llana ∇ se corresponde con un operador D de cuadrado cero. Así, una A-conexión llana, ∇, induce un operador de homología $\delta_{(A,\nabla)} = -D$. La homología que resulta $H_*(A, \nabla)$ es la *homología del algebroide de Lie A con respecto a la A-conexión llana* ∇.
Si ∇ y ∇' son dos A-conexiones sobre $\wedge^m A$, entonces existe $\alpha \in \Gamma(A^*)$ tal que

$$\nabla'_X \Phi = \nabla_X \Phi + \alpha(X)\Phi, \qquad \forall \Phi \in \Gamma(\wedge^m A). \tag{1.63}$$

Como consecuencia,

$$D' - D = i(\alpha), \tag{1.64}$$

donde D y D' son sus correspondientes operadores generantes. Además, $(D')^2 - D^2 = -i(d_A \alpha)$. Así, si ∇ y ∇' son dos A-conexiones llanas, entonces $\alpha \in \Gamma(A^*)$ es un 1-cociclo. En particular, si $\alpha = df$, con $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, se tiene que $H_k(A, \nabla) \cong H_k(A, \nabla')$, para todo k (para más detalles, ver [128]).
Supongamos que $(A, [\![\, ,]\!], \rho)$ (respectivamente, $(A', [\![\, ,]\!]', \rho'))$ es un algebroide de Lie sobre M de rango m y que $\psi : A \to A'$ es un isomorfismo de algebroides

de Lie sobre la identidad (ver (1.50)). Denotamos por $\psi_1 : \Gamma(A) \to \Gamma(A')$ el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos inducido por ψ. Este isomorfismo puede ser extendido a un isomorfismo $\psi_r : \Gamma(\Lambda^r A) \to \Gamma(\Lambda^r A')$, definido como en (1.51).
Además, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4.6 *Sea ∇ (respectivamente, ∇') una A-conexión llana (respectivamente, una A'-conexión) sobre $\Lambda^m A \to M$ (respectivamente, $\Lambda^m A' \to M$) tal que ∇ y ∇' están ψ-relacionadas, es decir,*

$$\psi_m(\nabla_X \Phi) = \nabla'_{\psi_1(X)} \psi_m(\Phi), \tag{1.65}$$

para todo $X \in \Gamma(A)$ y $\Phi \in \Gamma(\Lambda^m A)$. Entonces,

$$\psi_r \circ D = D' \circ \psi_{r+1}, \tag{1.66}$$

donde D (respectivamente, D') es el operador de homología asociado a ∇ (respectivamente, ∇'). Así, las homologías $H_*(A, \nabla)$ y $H_*(A', \nabla')$ son isomorfas.

Demostración. Denotamos por $\psi^r : \Gamma(\Lambda^r (A')^*) \to \Gamma(\Lambda^r A^*)$ el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por (1.51). Un cálculo directo prueba que

$$\psi_r(i(\psi^{m-r}(\omega'))\Phi) = i(\omega')(\psi_m(\Phi)), \tag{1.67}$$

para todo $\omega' \in \Gamma(\Lambda^{m-r}(A')^*)$ y $\Phi \in \Gamma(\Lambda^m A)$.
Por tanto, usando (1.52), (1.61), (1.65) y (1.67), deducimos (1.66).

■

Observación 1.4.7 Hay algunas diferencias de signo entre las fórmulas anteriores y las dadas en [128]. La razón es la definición del corchete de Schouten (Observación 1.4.2).

Ejemplos 1.4.8 *i*) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real de dimensión n. Entonces $\wedge^n \mathfrak{g}$ tiene dimensión 1 y obviamente tiene una $\mathfrak{g}$-conexión trivial ∇_0. Por tanto, tenemos el operador inducido $D_0 : \wedge^* \mathfrak{g} \to \wedge^{*-1} \mathfrak{g}$ de cuadrado cero, que genera el corchete de Schouten sobre $\wedge^*\mathfrak{g}$. Por otro lado, existe otro operador de homología $D : \wedge^*\mathfrak{g} \to \wedge^{*-1}\mathfrak{g}$ que define la homología asociada al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En general, D es distinto de D_0. De hecho (ver [128]), se tiene que $D - D_0 = i(\xi_0)$, siendo ξ_0 *el carácter modular del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$. Recordamos que el carácter modular de $\mathfrak{g}$ es el elemento $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ definido por

$$\xi_0 : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \qquad \xi \mapsto traza(ad_\xi),$$

donde $ad_\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es el endomorfismo dado por $ad_\xi(\eta) = [\xi, \eta]$, para todo $\eta \in \mathfrak{g}$. Se puede comprobar que ξ_0 es un 1-cociclo en la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Además, si ξ_0 es 0, la homología del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a la cohomología de $\mathfrak{g}$.
ii) Sea (M, Λ) una variedad de Poisson y $(T^*M, [\![\, , \,]\!]_\Lambda, \#_\Lambda)$ su algebroide de Lie asociado. En [12, 69] se introduce la *homología canónica* de M, $H_*^{can}(M, \Lambda)$ (o si no hay peligro de confusión, $H_*^{can}(M)$), como la homología asociada al complejo $(\Omega^*(M) = \bigoplus \Omega^k(M), \delta^\Lambda)$, donde el operador $\delta^\Lambda : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ viene dado por la expresión

$$\delta^\Lambda = i(\Lambda) \circ d - d \circ i(\Lambda). \tag{1.68}$$

Para obtener este operador, Brylinski [12] considera la homología Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie $(C^\infty(M, \mathbb{R}), \{\, , \,\})$, donde $\{\, , \,\}$ es el corchete de Poisson de M. Con el fin de dar una descripción de esta construcción, previamente recordaremos la definición de la homología de un álgebra de Lie $\mathcal{A}$ con coeficientes en un $\mathcal{A}$-módulo (ver, por ejemplo, [16]).
Sea $(\mathcal{A}, [\, , \,])$ un álgebra de Lie real (no necesariamente de dimensión finita) y $\mathcal{M}$ un espacio vectorial real. Supongamos que existe una aplicación bilineal

$$\mathcal{A} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \qquad (a, m) \mapsto a \cdot m$$

compatible con el corchete $[\, , \,]$ en el sentido que satisface la relación (1.47). Consideramos el espacio vectorial $C_k(\mathcal{A}; \mathcal{M})$ definido como el producto tensorial $\mathcal{M} \otimes \wedge^k\mathcal{A}$, donde $\wedge^*\mathcal{A}$ es el álgebra exterior de $\mathcal{A}$. A los elementos de $C_k(\mathcal{A}; \mathcal{M})$ les llamaremos *k-cadenas $\mathcal{M}$-valuadas*. El operador lineal

$\delta_k : C_k(\mathcal{A};\mathcal{M}) \to C_{k-1}(\mathcal{A};\mathcal{M})$ caracterizado por

$$\delta_k(m \otimes (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k)) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^{i+1} a_i \cdot m \otimes (a_1 \wedge \ldots \wedge \hat{a}_i \wedge \ldots \wedge a_k) + \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} m \otimes ([a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge \hat{a}_i \wedge \ldots \wedge \hat{a}_j \wedge \ldots \wedge a_k),$$

satisface que $\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$, para todo k. Así, tenemos definidos los correspondientes espacios de homología

$$H_k(\mathcal{A};\mathcal{M}) = \frac{ker\{\delta_k : C_k(\mathcal{A};\mathcal{M}) \to C_{k-1}(\mathcal{A};\mathcal{M})\}}{Im\{\delta_{k+1} : C_{k+1}(\mathcal{A};\mathcal{M}) \to C_k(\mathcal{A};\mathcal{M})\}}.$$

Esta homología se denomina la *homología del álgebra de Lie $\mathcal{A}$ relativa a la representación de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{M}$.*

En el caso particular en el que consideremos la representación inducida por la propia estructura de álgebra de Lie, esto es,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad (a, a') \mapsto [a, a'],$$

entonces la homología resultante es, *la homología de Chevalley-Eilenberg* de $(\mathcal{A}, [\ ,\ ])$.

Ahora, sean (M, Λ) una variedad de Poisson de dimensión n y $\{\ ,\ \}$ el corchete de Poisson asociado. Consideramos la homología de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie $(C^\infty(M,\mathbb{R}), \{\ ,\ \})$.

Denotamos por $C_k^{CE}(M)$ el espacio de las k-cadenas en el complejo de homología de Chevalley-Eilenberg, por δ^{CE} el operador de homología y por $H_k^{CE}(M)$ el k-ésimo grupo de homología. Entonces, si $f \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) \in C_k^{CE}(M) = C^\infty(M,\mathbb{R}) \otimes \Lambda^k(C^\infty(M,\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned}\delta_k^{CE}(f \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) &= \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^{i+1} \{f_i, f\} \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge \hat{f}_i \wedge \ldots \wedge f_k) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} f \otimes (\{f_i, f_j\} \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge \hat{f}_i \wedge \ldots \wedge \hat{f}_j \wedge \ldots \wedge f_k).\end{aligned}$$

Por otra parte, las aplicaciones antisimétricas y k-multilineales

$$\widetilde{\pi}_k : (C^\infty(M,\mathbb{R}))^k \to \Omega^k(M), \qquad \widetilde{\pi}_k(f_1, \ldots, f_k) = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k,$$

inducen una aplicación $\pi_k : C_k^{CE}(M) \to \Omega^k(M)$ que es localmente suprayectiva. Este hecho nos permite obtener un operador de homología δ^Λ sobre $\Omega^*(M)$ que satisface la siguiente condición

$$\delta^\Lambda \circ \pi_k = \pi_{k-1} \circ \delta^{CE}.$$

δ^Λ es justamente el operador descrito en (1.68) (ver [12] para más detalles). Se puede probar fácilmente que

$$\#_\Lambda(\alpha)(f) = \delta^\Lambda(f\alpha) - f\delta^\Lambda(\alpha),$$

$$[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda = -\delta^\Lambda(\alpha \wedge \beta) + \delta^\Lambda(\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge \delta^\Lambda(\beta),$$

para cualesquiera $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Por tanto, δ^Λ genera el corchete de Gerstenhaber sobre $\Omega^*(M)$ inducido por el algebroide de Lie $(T^*M, [\![\,,\,]\!]_\Lambda, \#_\Lambda)$. Así, δ^Λ se corresponde con una (T^*M)-conexión llana sobre $\wedge^n T^*M$. Teniendo en cuenta (1.62), esta conexión viene definida por

$$\nabla_\theta^\Lambda \Phi = \theta \wedge \delta^\Lambda(\Phi) = -\theta \wedge d(i(\Lambda)\Phi),$$

para todo $\theta \in \Omega^1(M)$ y para todo $\Phi \in \Omega^n(M)$.

iii) Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi de dimensión n.

El espacio $\Gamma(\wedge^k(T^*M \times \mathbb{R}))$ puede ser identificado con $\Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ (ver (1.34)). Bajo esa identificación y si consideramos el algebroide de Lie asociado a M, $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\,,\,]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$, entonces uno puede introducir la $(T^*M \times \mathbb{R})$-conexión llana $\nabla^{(\Lambda,E)}$ sobre $\wedge^{n+1}(TM \times \mathbb{R})$ definida por (ver [118])

$$\nabla_{(\alpha,f)}^{(\Lambda,E)}(0, \Phi) = (0, f di(E)\Phi + \alpha \wedge (di(\Lambda)\Phi - ni(E)\Phi)), \tag{1.69}$$

para $(\alpha, f) \in \Omega^1(M) \oplus C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $\Phi \in \Omega^n(M)$. Esta conexión induce el operador de homología $\delta^{(\Lambda,E)} : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^{k-1}(M) \oplus \Omega^{k-2}(M)$, dado por

$$\begin{aligned} \delta^{(\Lambda,E)}(\alpha, \beta) \;\; = \;\; & (i(\Lambda)d\alpha - di(\Lambda)\alpha + ki(E)\alpha + (-1)^k \mathcal{L}_E \beta, \\ & i(\Lambda)d\beta - di(\Lambda)\beta + (k-1)i(E)\beta + (-1)^k i(\Lambda)\alpha). \end{aligned} \tag{1.70}$$

con $(\alpha, \beta) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$. A esta homología la denominaremos la *homología de Lichnerowicz-Jacobi* (abreviadamente, LJ-homología) de M. La LJ-homología de M será denotada por $H_*^{LJ}(M, \Lambda, E)$ o, si no hay peligro de confusión, por $H_*^{LJ}(M)$.

Otra descripción alternativa de la LJ-homología es la siguiente.

Si $\{\ ,\ \}$ denota el corchete de Jacobi de (M, Λ, E), podemos considerar la homología del álgebra de Lie $(C^\infty(M, \mathbb{R}), \{\ ,\ \})$ relativa a la representación definida por los campos hamiltonianos como en (1.57). Esta homología se denomina la *homología H-Chevalley-Eilenberg* asociada a M. Denotamos por $C_k^{HCE}(M)$ el espacio de las k-cadenas en el complejo H-Chevalley-Eilenberg, por δ^{HCE} el operador de homología y por $H_k^{HCE}(M)$ el k-ésimo grupo de homología. Entonces, si $f \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) \in C_k^{HCE}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) \otimes \wedge^k(C^\infty(M, \mathbb{R}))$,

$$\begin{aligned}\delta^{HCE}(f \otimes f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) = &\sum_{1 \le i \le k} (-1)^i X_{f_i}(f) \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge \hat{f}_i \wedge \ldots \wedge f_k) + \\ &\sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} f \otimes (\{f_i, f_j\} \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge \hat{f}_i \wedge \ldots \wedge \hat{f}_j \wedge \ldots \wedge f_k). \end{aligned} \tag{1.71}$$

Por otra parte, la aplicación k-multilineal y antisimétrica $\widetilde{\pi}_k : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \ldots^{(k} \ldots \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \Omega^k(M) \otimes \Omega^{k-1}(M)$ definida por

$$\tilde{\pi}_k(f_1, \ldots, f_k) = (df_1 \wedge \ldots \wedge df_k, \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k} f_i df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df}_i \wedge \ldots \wedge df_k)$$

induce una aplicación lineal $\pi_k : C_k^{HCE}(M) \to \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ caracterizada por

$$\begin{aligned}\pi_k(f \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k)) &= (f df_1 \wedge \ldots \wedge df_k, \\ &\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k} f f_i df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df}_i \wedge \ldots \wedge df_k)\end{aligned} \tag{1.72}$$

para todo $f \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) \in C_k^{HCE}(M)$.

Un cálculo directo, usando (1.2), (1.27), (1.70), (1.71) y (1.72), nos permite probar que

$$\delta^{(\Lambda, E)} \circ \pi_k = \pi_{k-1} \circ \delta^{HCE}. \tag{1.73}$$

Puesto que π_k es una aplicación localmente suprayectiva, de (1.73), se sigue directamente que $(\delta^{(\Lambda,E)})^2 = 0$ y, por tanto, esto nos permite dar una descripción alternativa del operador $\delta^{(\Lambda,E)}$.

Observación 1.4.9 Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi y $\Omega^k_B(M)$ el espacio de las k-formas básicas con respecto a E, es decir, $\alpha \in \Omega^k_B(M)$ si y sólo si se tiene que

$$i(E)\alpha = 0, \qquad \mathcal{L}_E\alpha = 0.$$

Denotamos por $\bar{\delta}^{(\Lambda,E)}$ el operador de homología del subcomplejo del LJ-complejo que consiste en los pares $(0, \alpha)$, siendo α una forma básica con respecto a E. Bajo la identificación canónica $\{0\} \oplus \Omega^k_B(M) \cong \Omega^k_B(M)$ se tiene que

$$\bar{\delta}^{(\Lambda,E)}\alpha = i(\Lambda)d\alpha - di(\Lambda)\alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \Omega^k_B(M).$$

El complejo de homología $(\Omega^*_B(M), \bar{\delta}^{(\Lambda,E)})$ fue estudiado en [22] y en [23] y su homología asociada se denomina la *homología canónica de la variedad de Jacobi* M. Este nombre se justifica por el hecho de que si M es una variedad de Poisson $(E = 0)$, entonces el complejo de homología $(\Omega^*_B(M), \bar{\delta}^{(\Lambda,0)})$ es justamente el complejo canónico introducido por Brylinski [12] (ver también [69]). Nótese que $d \circ \bar{\delta}^{(\Lambda,E)} + \bar{\delta}^{(\Lambda,E)} \circ d = 0$ y, por tanto, se puede considerar un complejo doble y dos sucesiones espectrales asociadas a él. La anulación de estas sucesiones espectrales en el primer término y otros aspectos relacionados fueron discutidos en [12, 31, 33, 49, 50, 96, 129]) (para el caso de una variedad de Poisson) y en [22, 23] (para el caso de una variedad de Jacobi).

1.4.4 La clase modular de un algebroide de Lie orientable

Si $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie orientable de rango m sobre una variedad orientable M de dimensión n, se puede introducir la clase modular de A como sigue (ver [29]). Sea $\nu \in \Gamma(\wedge^m A^*)$ una m-sección no nula en todo punto y sea $\Phi \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen sobre M. Entonces, definimos la sección $\mathcal{M}_A^{(\nu,\Phi)}$ de $A^* \to M$ por

$$\mathcal{M}_A^{(\nu,\Phi)}(X) = div_\Phi \rho(X) - div_\nu X, \tag{1.74}$$

para todo $X \in \Gamma(A)$, donde $div_\Phi \rho(X)$ es la divergencia del campo de vectores $\rho(X)$ con respecto a Φ y $div_\nu X$ es la función sobre M caracterizada por $\mathcal{L}_X^A \nu = (div_\nu X)\nu$. La sección $\mathcal{M}_A^{(\nu,\Phi)}$ es un 1-cociclo en el complejo de cohomología del algebroide de Lie de A y la clase de cohomología $\mathcal{M}_A = [\mathcal{M}_A^{(\nu,\Phi)}] \in H^1(A)$ es la *clase modular de A* (ver [29]).

Ejemplos 1.4.10 *i*) Cuando un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es considerada como un algebroide de Lie sobre un punto, su clase modular está dada por el carácter modular $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ (ver Ejemplo 1.4.8 y [29]).
ii) Sea (M,Λ) una variedad de Poisson orientable de dimensión n y $(T^*M, [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda)$ su algebroide de Lie asociado. Consideremos $\Phi \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen sobre M y denotamos por V_Φ el n-vector sobre M definido por

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = V_\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Phi, \qquad \text{para todo } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega^1(M).$$

La divergencia del campo de vectores $\#_\Lambda(df)$ respecto a Φ, está caracterizada por

$$\mathcal{L}_{\#_\Lambda(df)}\Phi = (div_\Phi \#_\Lambda(df))\Phi. \tag{1.75}$$

Además,

$$d_\Lambda(i(df)V_\Phi) = -(div_\Phi \#_\Lambda(df))V_\Phi. \tag{1.76}$$

Así, usando (1.74), (1.75) y (1.76) concluimos que la clase modular del algebroide $(T^*M, [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda)$ es la clase de cohomología

$$\mathcal{M}_{T^*M} = [2\mathcal{X}_\Lambda^\Phi] \in H^1_{LP}(M),$$

donde $\mathcal{X}_\Lambda^\Phi$ es el campo de vectores caracterizado por

$$\mathcal{X}_\Lambda^\Phi(f) = div_\Phi \#_\Lambda(df) \tag{1.77}$$

para todo $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (ver [29]).

Este campo de vectores es el *campo modular de M respecto a Φ*. La clase de cohomología definida por el campo de vectores $\mathcal{X}_\Lambda^\Phi$ en la LP-cohomología fue denominada por Weinstein ([124]) *la clase modular-Poisson de* (M, Λ).
iii) Sean (M, Λ, E) una variedad de Jacobi orientable de dimensión n y $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ el algebroide de Lie asociado a M. Supongamos $\nu \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen sobre M y denotemos por V_ν el n-vector sobre M definido por

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = V_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\nu, \quad \text{para todo} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega^1(M).$$

De (1.38) se obtiene que

$$\mathcal{L}_{\widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(df,f)}\nu = (div_\nu \#_\Lambda(df) + f div_\nu E + E(f))\nu, \tag{1.78}$$

y usando (1.35) y (1.56) se deduce que

$$d_{(\Lambda,E)}(i(df,f)(0,V_\nu)) = -(div_\nu \#_\Lambda(df) - mE(f) + f div_\nu E)(0, V_\nu). \tag{1.79}$$

Así, de (1.74), (1.78) y (1.79) concluimos que la clase modular del algebroide de Lie $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ es la clase de cohomología

$$\mathcal{M}_{T^*M\times\mathbb{R}} = [(2\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)} + (1-n)E, 2div_\nu E)] \in H^1_{LJ}(M), \tag{1.80}$$

donde $\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)}$ es el campo de vectores caracterizado por

$$\mathcal{L}_{\#_\Lambda(df)}\nu = \mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)}(f)\nu \tag{1.81}$$

para todo $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Finalmente, relacionaremos la clase modular $\mathcal{M}_{T^*M\times\mathbb{R}}$ del algebroide de Lie $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ de una variedad de Jacobi (M, Λ, E) con la clase modular de M introducida por Vaisman [118]. Recordemos en primer lugar la construcción de esta última clase de cohomología
En lo siguiente, asumiremos que (M, Λ, E) es una variedad de Jacobi orientable de dimensión n. Una forma de volumen ν sobre M induce una

$(T^*M \times \mathbb{R})$-conexión llana ∇_0 sobre $\wedge^{n+1}(T^*M \times \mathbb{R})$ definida de la siguiente forma

$$(\nabla_0)_{(\alpha,f)}(0,\nu) = (0,0), \quad \text{para todo} \quad (\alpha, f) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M,\mathbb{R}).$$

Entonces, usando (1.35), (1.61), (1.62) y (1.70), tenemos que para todo $(\alpha, f) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \nabla_{(\alpha,f)}(0,\nu) - (\nabla_0)_{(\alpha,f)}(0,\nu) &= (\alpha, f) \wedge \delta^{(\Lambda,E)}(0,\nu) \\ &= (0, (f div_\nu E - n\alpha(E))\nu + \alpha \wedge di(\Lambda)\nu), \end{aligned} \tag{1.82}$$

donde $div_\nu E$ es la divergencia del campo E con respecto a ν, es decir,

$$\mathcal{L}_E \nu = (div_\nu E)\nu.$$

Ahora, sea $\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)}$ el campo de vectores definido en (1.81).
Usando (1.81) y la relación

$$i(\#_\Lambda(\alpha))\nu = -\alpha \wedge i(\Lambda)\nu,$$

con $\alpha \in \Omega^1(M)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)})\nu &= \mathcal{L}_{\#_\Lambda(\alpha)}\nu + d\alpha \wedge i(\Lambda)\nu \\ &= \alpha \wedge di(\Lambda)\nu. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Por tanto, sustituyendo (1.83) en (1.82),

$$\nabla^{(\Lambda,E)}_{(\alpha,f)}(0,\nu) - (\nabla_0)_{(\alpha,f)}(0,\nu) = (0, (f div_\nu E + \alpha(\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)} - nE))\nu). \tag{1.84}$$

Denotamos por D_0 el correspondiente operador de homología asociado a ∇_0. De (1.61) y (1.84), deducimos que

$$D - D_0 = \imath(\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)} - nE, div_\nu E). \tag{1.85}$$

El par

$$\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,E)} = (\mathcal{X}^\nu_{(\Lambda,E)} - nE, div_\nu E) \in \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \tag{1.86}$$

define un 1-cociclo en el complejo de la LJ-cohomología de M, es decir, $d_{(\Lambda,E)}(\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,E)}) = (0,0)$ (ver [118]).
Además, la correspondiente clase de cohomología $\mathcal{M}_{(\Lambda,E)} \in H^1_{LJ}(M)$ no depende de la forma de volumen ν (ver [118]). Esta clase de cohomología $\mathcal{M}_{(\Lambda,E)}$ se denomina la *clase modular-Jacobi de M* (ver [118]).
La clase modular $\mathcal{M}_{(\Lambda,E)}$ de la variedad de Jacobi (M,Λ,E) no coincide, en general, con la clase modular $\mathcal{M}_{T^*M\times\mathbb{R}}$ del algebroide $(T^*M\times\mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$. De hecho, comparando (1.80) y (1.86) obtenemos que estas clases de cohomología están relacionadas como sigue

$$\mathcal{M}_{T^*M\times\mathbb{R}} = 2\mathcal{M}_{(\Lambda,E)} + (n+1)[(E,0)].$$

La variedad M se dice que es una *variedad de Jacobi unimodular* si la clase modular-Jacobi $\mathcal{M}_{(\Lambda,E)}$ es cero. En tal caso, usando (1.85) y los resultados de [128] descritos en la Sección 1.4.3, concluimos lo siguiente.

Teorema 1.4.11 *[118] Si (M,Λ,E) es una variedad de Jacobi unimodular de dimensión n entonces*

$$H_r^{LJ}(M) \cong H_{LJ}^{n+1-r}(M)$$

para todo $r \in \{0,\ldots,n+1\}$.

Observación 1.4.12 Sea (M,Λ) una variedad de Poisson orientable.
(i) Denotamos por $\mathcal{M}_\Lambda$ la clase modular-Poisson de (M,Λ) (ver Ejemplos 1.4.10 *ii*)). Se dice que (M,Λ) es una *variedad de Poisson unimodular* si $\mathcal{M}_\Lambda = 0$ (para más detalles, ver [124]).
(ii) Sea $(Id^k,0) : H^k_{LP}(M) \to H^k_{LJ}(M)$ el homomorfismo canónico dado por

$$(Id^k,0)([P]) = [(P,0)], \qquad \text{para} \qquad P \in H^k_{LP}(M).$$

Como los espacios de las 0-cocadenas en el LP-complejo y en el LJ-complejo coinciden con $C^\infty(M,\mathbb{R})$, deducimos que $(Id^1,0) : H^1_{LP}(M) \to H^1_{LJ}(M)$ es un monomorfismo.

Por otro lado, de (1.77), (1.81) y (1.86), se sigue que

$$(Id^1, 0)\mathcal{M}_\Lambda = \mathcal{M}_{(\Lambda,0)},$$

donde $\mathcal{M}_{(\Lambda,0)}$ es la clase modular de Jacobi de $(M, \Lambda, 0)$. Por tanto, concluimos que (M, Λ) es una variedad de Poisson unimodular si y sólo si $(M, \Lambda, 0)$ es una variedad de Jacobi unimodular.

Observación 1.4.13 Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi orientable y $(M \times \mathbb{R}, \widetilde{\Lambda})$ la poissonización de M (ver Sección 1.3).
(i) Supongamos que ν es una forma de volumen sobre M y consideramos en $M \times \mathbb{R}$ la forma de volumen

$$\widetilde{\nu} = e^{(n+1)t}\nu \wedge dt,$$

donde n es la dimensión de M y t es la coordenada usual sobre $\mathbb{R}$. Usando los resultados de Vaisman (ver las relaciones (3.13) y (3.14) en [118]) deducimos que el campo modular $\mathcal{X}^{\widetilde{\nu}}_{\widetilde{\Lambda}}$ de $(M \times \mathbb{R}, \widetilde{\Lambda})$ con respecto a $\widetilde{\nu}$ es

$$\mathcal{X}^{\widetilde{\nu}}_{\widetilde{\Lambda}} = e^{-t}(\mathcal{X}^{\nu}_{(\Lambda,E)} - nE + (div_\nu E)\frac{\partial}{\partial t}).$$

Así, de (1.86), concluimos que $\mathcal{X}^{\widetilde{\nu}}_{\widetilde{\Lambda}}$ es cero si y sólo si $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,E)}$ es cero.
(ii) Usando de nuevo los resultados de Vaisman [118], tenemos que si (M,Λ,E) es una variedad de Jacobi unimodular, entonces $(M \times \mathbb{R}, \widetilde{\Lambda})$ es una variedad de Poisson unimodular. En general, el inverso no es cierto, como veremos en el Capítulo 4 (ver Sección 4.3 del Capítulo 4).

CAPÍTULO 2

Bialgebroides de Lie generalizados triangulares: cohomología y homología

La noción de bialgebroide de Lie generalizado fue introducida por Iglesias y Marrero [59] como una generalización de la definición de bialgebroide de Lie en el sentido de Mackenzie y Xu [89]. Una clase importante de bialgebroides de Lie generalizados son los triangulares. En este capítulo consideraremos teorías de cohomología y homología asociadas al algebroide de Lie dual de un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Además, probaremos que la anulación de una cierta clase de cohomología implica la existencia de dualidad entre estas teorías.

2.1 Bialgebroides de Lie generalizados triangulares

2.1.1 ϕ_0-cohomología de un algebroide de Lie

Sean $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie sobre M y $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ un 1-cociclo en el complejo de cohomología de A con coeficientes triviales. Usando (1.49), se puede definir una representación $\rho_{\phi_0} : \Gamma(A) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ del álgebra de Lie $(\Gamma(A), [\![\ ,\ ]\!])$ sobre el espacio $C^\infty(M,\mathbb{R})$ dada por

$$\rho_{\phi_0}(X)f = \rho(X)(f) + \phi_0(X)f, \tag{2.1}$$

para $X \in \Gamma(A)$ y $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (ver [59]). Así, se puede considerar la cohomología del álgebra de Lie $(\Gamma(A), [\![\ ,\ ]\!])$ con coeficientes en $C^\infty(M,\mathbb{R})$ y el subcomplejo $\Gamma(\wedge^* A^*)$ de las cocadenas que son $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales. El operador de cohomología $(d_A)_{\phi_0} : \Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^{k+1} A^*)$ de este subcomplejo se denomina la ϕ_0-*diferencial* de A. Se tiene que

$$(d_A)_{\phi_0}(\alpha) = d_A\alpha + \phi_0 \wedge \alpha, \tag{2.2}$$

donde d_A es la diferencial del algebroide de Lie $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$. Los correspondientes espacios de cohomología lo denotaremos por $H^*_{\phi_0}(A)$ (ver [59]).
Si X es una sección de $A \to M$, la ϕ_0-diferencial nos permite introducir la ϕ_0-derivada de Lie con respecto a X, $(\mathcal{L}^A_{\phi_0})_X : \Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^k A^*)$, como sigue

$$(\mathcal{L}^A_{\phi_0})_X = (d_A)_{\phi_0} \circ i_X + i_X \circ (d_A)_{\phi_0}. \tag{2.3}$$

Observación 2.1.1 Si ϕ_0 es un 1-coborde, es decir, si existe $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ tal que $\phi_0 = d_A f$, entonces la aplicación

$$\Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^k A^*), \qquad \phi \mapsto e^{-f}\phi,$$

induce un isomorfismo entre los grupos de cohomología $H^k(A)$ y $H^k_{\phi_0}(A)$.

Ejemplos 2.1.2 *i)* Si ω es una 1-forma cerrada sobre una variedad M, entonces ω es un 1-cociclo para el algebroide trivial $(TM, [\ ,\ ], Id)$ y la ω-diferencial $d_\omega : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ tiene la siguiente expresión

$$d_\omega(\alpha) = d\alpha + \omega \wedge \alpha \tag{2.4}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$.
Algunos resultados sobre la cohomología definida por el operador d_ω fueron obtenidos por [45] y [113] (ver también la Sección 3.4 de este capítulo). Estos

resultados fueron usados en el estudio de las estructuras localmente conforme Kähler y localmente conforme simplécticas.
ii) Para el algebroide de Lie $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$, la 1-cocadena $\phi_0 = (0,1) \in \Omega^1(M) \oplus C^\infty(M,\mathbb{R}) \cong \Gamma(T^*M \times \mathbb{R})$ es un 1-cociclo (ver (1.53)) y la ϕ_0-diferencial está dada por

$$\widetilde{d}_{(0,1)}(\alpha,\beta) = (d\alpha, \alpha - d\beta), \tag{2.5}$$

para $(\alpha,\beta) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$. Nótese que, en este caso, $H^*_{(0,1)}(TM \times \mathbb{R}) \cong \{0\}$, ya que si $[(\alpha,\beta)] \in H^*_{(0,1)}(TM \times \mathbb{R})$, entonces, $\widetilde{d}_{(0,1)}(\alpha,\beta) = (0,0)$, esto es, $d\alpha = 0$ y $d\beta = \alpha$. Así, si consideramos $(\beta, 0) \in \Omega^{k-1}(M) \oplus \Omega^{k-2}(M)$, se tiene que $\widetilde{d}_{(0,1)}(\beta,0) = (\alpha,\beta)$, con lo cual se deduce que $[(\alpha,\beta)] = [(0,0)]$, para todo $[(\alpha,\beta)] \in H^*_{(0,1)}(TM \times \mathbb{R})$, es decir, $H^*_{(0,1)}(TM \times \mathbb{R}) \cong \{0\}$.
iii) Sea $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ el algebroide de Lie asociado a la variedad de Jacobi (M, Λ, E). Denotamos por $d_{(\Lambda,E)}$ la diferencial de este algebroide de Lie. Bajo la identificación $\Gamma(\wedge^k(TM \times \mathbb{R})) \cong \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ y usando (1.1) y (1.56), se sigue que $X_0 = (-E, 0) \in \mathfrak{X}(M) \oplus C^\infty(M,\mathbb{R}) \cong \Gamma(TM \times \mathbb{R})$ es un 1-cociclo en la cohomología de este algebroide, ya que

$$d_{(\Lambda,E)}(-E,0) = ([\Lambda, E], 0) = (0,0).$$

Entonces, de (1.35), (1.56) y (2.2), se obtiene la siguiente expresión para la X_0-diferencial $(d_{(\Lambda,E)})_{X_0} = (d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}$,

$$\begin{array}{rcl} (d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}(P,Q) & = & d_{(\Lambda,E)}(P,Q) + (-E,0) \wedge (P,Q) \\ & = & (-[\Lambda, P] + (k-1)E \wedge P + \Lambda \wedge Q, \\ & & [\Lambda, Q] - (k-2)E \wedge Q + [E,P]), \end{array} \tag{2.6}$$

para $(P,Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$. Nótese que $(d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}$ es justamente el operador de cohomología del *complejo de cohomología 1-diferenciable de Chevalley-Eilenberg de M* (ver [45] y [81]). Recordamos que el complejo de Chevalley-Eilenberg está definido por la representación del álgebra de Lie de las funciones dada por

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}), \quad (f,g) \mapsto \{f,g\}$$

para toda $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, donde $\{\ ,\ \}$ es el corchete de Jacobi de M.
El complejo 1-diferenciable de Chevalley-Eilenberg es el subcomplejo que consiste en todas las cocadenas 1-diferenciables (ver Ejemplos 1.4.5 v)).
La identificación entre la cohomología $H^*_{(-E,0)}(T^*M \times \mathbb{R})$ y la cohomología 1-diferenciable de Chevalley-Eilenberg de M se obtiene usando los isomorfismos $j^k : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to C^k_{CE-1dif}(M)$ dados por

$$j^k(P, Q)(f_1, \dots, f_k) = P(df_1, \dots, df_k) + \sum_{q=1}^{k} (-1)^{q+1} f_q Q(df_1, \dots, \widehat{df}_q, \dots, df_k)$$

donde $C^k_{CE1-dif}(M)$ denota el espacio de todas las k-cocadenas 1-diferenciables.

2.1.2 Corchete de ϕ_0-Schouten de un algebroide de Lie

Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Lie y $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ un 1-cociclo. Entonces, imitando la definición del corchete de Schouten de dos operadores diferenciales multilineales de primer orden sobre el espacio de las funciones reales C^∞-diferenciables en una variedad N, (ver [9]), se introduce en [59] el *corchete de ϕ_0-Schouten* de una k-sección P y una k'-sección P', como la $(k+k'-1)$-sección dada por

$$[\![P, P']\!]_{\phi_0} = [\![P, P']\!] + (-1)^{k+1}(k-1)P \wedge (i(\phi_0)P') - (k'-1)(i(\phi_0)P) \wedge P', \quad (2.7)$$

donde $[\![\ ,\ ]\!]$ es el corchete de Schouten usual de A. El corchete de ϕ_0-Schouten satisface las siguientes propiedades:
$[\![X, f]\!]_{\phi_0} = \rho_{\phi_0}(X)(f)$,
$[\![X, Y]\!]_{\phi_0} = [\![X, Y]\!]$,
$[\![P, P']\!]_{\phi_0} = (-1)^{kk'}[\![P', P]\!]_{\phi_0}$,
$[\![P, P' \wedge P'']\!]_{\phi_0} = [\![P, P']\!]_{\phi_0} \wedge P'' + (-1)^{k'(k+1)} P' \wedge [\![P, P'']\!]_{\phi_0} - (i(\phi_0)P) \wedge P' \wedge P''$,
$(-1)^{kk''}[\![[\![P, P']\!]_{\phi_0}, P'']\!]_{\phi_0} + (-1)^{k'k''}[\![[\![P'', P]\!]_{\phi_0}, P']\!]_{\phi_0} + (-1)^{kk'}[\![[\![P', P'']\!]_{\phi_0}, P]\!]_{\phi_0} = 0$,
para $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), X, Y \in \Gamma(A), P \in \Gamma(\wedge^k A), P' \in \Gamma(\wedge^{k'} A)$ y $P'' \in \Gamma(\wedge^{k''} A)$ (ver [59]).
Si $X \in \Gamma(A)$ entonces, usando el corchete de ϕ_0-Schouten, uno puede introducir la ϕ_0-derivada de Lie de una k-multisección $P \in \Gamma(\wedge^k A)$ con respecto

a X como sigue
$$(\mathcal{L}^A_{\phi_0})_X P = [\![X, P]\!]_{\phi_0}.$$

Ejemplo 2.1.3 Para el algebroide de Lie $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$ y el 1-cociclo $(0,1)$ tenemos que el corchete de $(0,1)$-Schouten tiene la siguiente expresión (ver (1.35), (1.37) y (2.7))

$$\begin{aligned}\big[(P,Q),(P',Q')\big]_{(0,1)} = ([P,P'] + (-1)^{k+1}(k-1)P\wedge Q' - (k'-1)Q\wedge P',\\ (-1)^{k+1}[P,Q'] - [Q,P'] + (-1)^{k+1}(k-k')Q\wedge Q').\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nótese que $(\Lambda, E) \in \Gamma(\wedge^2(TM\times\mathbb{R}))$ define una estructura de Jacobi sobre M si y sólo si $\big[(\Lambda,E),(\Lambda,E)\big]_{(0,1)} = 0$ (ver (1.1) y (2.8)), ya que

$$\big[(\Lambda,E),(\Lambda,E)\big]_{(0,1)} = ([\Lambda,\Lambda] - 2E\wedge\Lambda, -2[E,\Lambda]).$$

Además, usando (2.6) y (2.8), obtenemos que la (-E, 0) -diferencial $(d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}$ del algebroide de Lie asociado a una variedad de Jacobi (M,Λ,E) puede ser descrita en términos del corchete de $(0,1)$-Schouten como sigue

$$(d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}(P,Q) = -\big[(\Lambda,E),(P,Q)\big]_{(0,1)}, \tag{2.9}$$

para todo $(P,Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$. Es notable la similitud entre la ecuación (2.9) y la expresión de la diferencial del algebroide de Lie asociado a una variedad de Poisson (ver (1.55)).

2.1.3 Bialgebroides de Lie generalizados triangulares

Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Lie, tal que su fibrado dual, $A^* \to M$, también tiene estructura de algebroide de Lie $([\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$. Recordamos que el par (A, A^*) es un *bialgebroide de Lie* ([89]), (ver también [64]) si

$$d_{A^*}[\![X,Y]\!] = \mathcal{L}^A_X d_{A^*}Y - \mathcal{L}^A_Y d_{A^*}X$$

para todo $X, Y \in \Gamma(A)$.
Una clase importante de bialgebroides de Lie son los triangulares cuya definición es la siguiente.

Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Lie sobre M. Consideremos $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$ una bisección de A satisfaciendo

$$[\![P, P]\!] = 0.$$

Entonces, el par (A, P) recibe el nombre de *bialgebroide de Lie triangular* (ver [89]). Veamos que P nos permite definir una estructura de algebroide de Lie sobre A^* de tal manera que el par (A, A^*) es un bialgebroide de Lie. Denotamos por $\#_P : \Gamma(A^*) \to \Gamma(A)$ el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por

$$\#_P(\phi) = i(\phi)P. \tag{2.10}$$

Ahora consideramos sobre A^* la estructura de algebroide de Lie $([\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ definida por

$$\left.\begin{array}{rcl} [\![\phi_1, \phi_2]\!]_* & = & i(\#_P(\phi_1))d_A\phi_2 - i(\#_P(\phi_2))d_A\phi_1 + d_A(P(\phi_1, \phi_2)) \\ \rho_* & = & \rho \circ \#_P, \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

para todo $\phi_1, \phi_2 \in \Gamma(A^*)$. Entonces, el par (A, A^*) es un bialgebroide de Lie.

Ejemplo 2.1.4 Sea (M, Λ) una variedad de Poisson. Consideremos el algebroide de Lie $(TM, [\ ,\ ], 1_{TM})$. Entonces (TM, Λ) es un bialgebroide de Lie triangular y la estructura de algebroide de Lie inducida sobre T^*M es la descrita en el Ejemplo 1.4.3 v).

Observación 2.1.5 Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi. Si consideramos el algebroide de Lie asociado a M, $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ y el algebroide de Lie natural $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$ sobre $TM \times \mathbb{R} \to M$, a diferencia de lo que ocurre en una variedad de Poisson, $(TM \times \mathbb{R}, T^*M \times \mathbb{R})$ no es un bialgebroide de Lie (ver [59, 118]).

Esta observación y algunos ejemplos de estructuras de Jacobi lineales obtenidos en [58] motivaron la introducción en [59] (ver también [44]) de la definición de bialgebroide de Lie generalizado que recordamos a continuación. Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Lie sobre M y $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ un 1-cociclo en la cohomología del algebroide. Asumiremos que el fibrado dual A^* admite una estructura de algebroide de Lie ($[\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*$) y que $X_0 \in \Gamma(A)$ es un 1-cociclo en la cohomología de este algebroide. Entonces el par $((A, \phi_0), (A^*, X_0))$ es un *bialgebroide de Lie generalizado* sobre M ([59]), si para todo $X, Y \in \Gamma(A)$ y $P \in \Gamma(\wedge^k A)$

$$(d_{A^*})_{X_0}[\![X, Y]\!] = [\![X, (d_{A^*})_{X_0} Y]\!]_{\phi_0} - [\![Y, (d_{A^*})_{X_0} X]\!]_{\phi_0},$$
$$(\mathcal{L}^{A^*}_{X_0})_{\phi_0} P + (\mathcal{L}^{A}_{\phi_0})_{X_0} P = 0. \tag{2.12}$$

Observación 2.1.6 *i*) (2.12) es equivalente a las condiciones

$$\phi_0(X_0) = 0, \qquad \rho(X_0) = -\rho_*(\phi_0),$$
$$(\mathcal{L}^{A^*}_{X_0})_{\phi_0} X + [\![X_0, X]\!] = 0, \quad \text{para todo} \quad X \in \Gamma(A).$$

(ver [59]).
ii) Cuando los 1-cociclos ϕ_0 y X_0 son nulos, se recobra la noción de bialgebroide de Lie en el sentido de Mackenzie-Xu [89].
iii) Recientemente, Grabowski y Marmo [44] han dado una nueva caracterización de los bialgebroides de Lie generalizados. Para ello, consideran el corchete $[\![\ ,\ ]\!]'_{\phi_0}$ de una k-sección P y una k'-sección P' como la $(k + k' - 1)$-sección dada por

$$[\![P, P']\!]'_{\phi_0} = (-1)^{k+1}[\![P, P']\!]_{\phi_0}.$$

Entonces $((A, \phi_0), (A^*, X_0))$ es un bialgebroide de Lie generalizado si y sólo si $(d_{A^*})_{X_0}$ es una derivación con respecto a $(\bigoplus_k \Gamma^k(\wedge^k A), [\![\ ,\ ]\!]'_{\phi_0})$, esto es,

$$(d_{A^*})_{X_0}[\![P, P']\!]'_{\phi_0} = [\![(d_{A^*})_{X_0} P, P']\!]'_{\phi_0} + (-1)^{k+1}[\![P, (d_{A^*})_{X_0} P']\!]'_{\phi_0},$$

para todo $P \in \Gamma(\wedge^k A)$ y $P' \in \Gamma(\wedge^{k'} A)$.

Ejemplos de bialgebroides de Lie generalizados son los bialgebroides de Lie generalizados triangulares cuya definición es la siguiente (ver [59]).
Sea ahora $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Lie sobre M y $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ un 1-cociclo en la cohomología del algebroide. Además, sea $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$ una bisección satisfaciendo

$$[\![P, P]\!]_{\phi_0} = [\![P, P]\!] - 2P \wedge i(\phi_0)P = 0. \tag{2.13}$$

La terna (A, ϕ_0, P) es un *bialgebroide de Lie generalizado triangular* (nótese que si $\phi_0 = 0$, entonces el par (A, P) es un bialgebroide de Lie triangular).
Si $A^* \to M$ es el fibrado dual de A, podemos introducir una estructura de algebroide de Lie sobre A^*, donde el corchete $[\![\ ,\ ]\!]_* : \Gamma(A^*) \times \Gamma(A^*) \to \Gamma(A^*)$ y la aplicación $\rho_* : \Gamma(A^*) \to \mathfrak{X}(M)$ están definidos por

$$\left.\begin{array}{rcl} [\![\phi_1, \phi_2]\!]_* &=& i(\#_P(\phi_1))d_{\phi_0}\phi_2 - i(\#_P(\phi_2))d_{\phi_0}\phi_1 + d_{\phi_0}(P(\phi_1, \phi_2)) \\ \rho_* &=& \rho \circ \#_P \end{array}\right\}$$

Además, $X_0 = -\#_P(\phi_0) \in \Gamma(A)$ es un 1-cociclo para el algebroide de Lie $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ y el par $((A, \phi_0), (A^*, X_0))$ es un bialgebroide de Lie generalizado (ver [59]).

Ejemplo 2.1.7 Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi. Entonces, $(0, 1) \in \Omega^1(M) \oplus C^\infty(M, \mathbb{R})$ es un 1-cociclo en la cohomología del algebroide $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$ y el par $(\Lambda, E) \in \mathcal{V}^2(M) \oplus \mathfrak{X}(M) \cong \Gamma(\wedge^2(TM \times \mathbb{R}))$ satisface que (ver Ejemplos 2.1.3)

$$\big[(\Lambda, E), (\Lambda, E)\big]_{(0,1)} = 0.$$

Así, $((TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi), (0, 1), (\Lambda, E))$ es un bialgebroide de Lie generalizado triangular. En este caso, el algebroide dual es justamente el algebroide de Lie $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ asociado a la estructura de Jacobi. De hecho, usando (1.35), (1.38), (1.40), (2.5) y (2.10), se deduce que

$$\begin{aligned} [\![(\alpha, f), (\beta, g)]\!]_{(\Lambda,E)} =& i((\#_{(\Lambda E)}(\alpha, f)))(\widetilde{d}_{(0,1)}(\beta, g)) - i((\#_{(\Lambda,E)}(\beta, g)))(\widetilde{d}_{(0,1)}(\alpha, f)) \\ &+ \widetilde{d}_{(0,1)}((\Lambda, E)((\alpha, f), (\beta, g))), \\ \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)} =& \pi \circ \#_{(\Lambda,E)}, \end{aligned}$$

para todo $(\alpha, f), (\beta, g) \in \Omega^1(M) \oplus C^\infty(M, \mathbb{R})$.

2.2 Cohomología y bialgebroides de Lie generalizados triangulares

Sea $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Como ya indicamos en la sección anterior, sobre el fibrado dual podemos considerar una estructura de algebroide de Lie $([\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$. Denotamos por X_0 el cociclo

$X_0 = -\#_P(\phi_0) \in \Gamma(A)$ del complejo de cohomología asociado al algebroide $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$.

El resultado que probamos a continuación da una expresión explícita de la diferencial d_{A^*} y de la X_0-diferencial $(d_{A^*})_{X_0}$ de este algebroide.

Proposición 2.2.1 *Sea $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Entonces,*

$$d_{A^*}Q = -[\![P, Q]\!] + P \wedge i(\phi_0)Q - kX_0 \wedge Q, \tag{2.14}$$

$$(d_{A^*})_{X_0}Q = -[\![P, Q]\!]_{\phi_0}, \tag{2.15}$$

para todo $Q \in \Gamma(\wedge^k A)$, donde d_{A^*} (respectivamente, $(d_{A^*})_{X_0}$) es la diferencial (respectivamente, la X_0-diferencial) del algebroide de Lie dual $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ y $X_0 = -\#_P(\phi_0)$.

Demostración. Comprobemos previamente (2.15) para secciones de A.

Sean ϕ, ψ dos secciones de A^* y X una sección de A. Un cálculo directo, usando (2.1) y (2.11), prueba que para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$ y para todo $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\rho_{*X_0}(\alpha)(f) = \rho_{\phi_0}(\#_P(\alpha))(f). \tag{2.16}$$

Entonces, de (1.48), (2.11) y (2.16), se obtiene que

$$\left.\begin{array}{rcl} ((d_{A^*})_{X_0}X)(\phi, \psi) & = & \rho_{*X_0}(\phi)(\psi(X)) - \rho_{*X_0}(\psi)(\phi(X)) - [\![\phi, \psi]\!]_*(X) \\ & = & \rho_{\phi_0}(\#_P(\phi))(\psi(X)) - \rho_{\phi_0}(\#_P(\psi))(\phi(X)) \\ -i(\#_P(\phi))(d_A)_{\phi_0}\psi & - & i(\#_P(\psi))(d_A)_{\phi_0}\phi + (d_A)_{\phi_0}(P(\phi, \psi))(X) \\ & = & \rho_{\phi_0}(X)(P(\phi, \psi)) + \psi([\![\#_P(\phi), X]\!]) \\ & - & \phi([\![\#_P(\psi), X]\!]), \end{array}\right\} \tag{2.17}$$

donde d_A es el operador de cohomología asociado al algebroide $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$.

Por otro lado, si $\mathcal{L}^A$ denota la derivada de Lie del algebroide A, se tiene que

$$[\![Z, i(\omega)Q]\!] = i(Q)(\mathcal{L}^A_Z\omega) + i(\omega)[\![Z, Q]\!],$$

para $\omega \in \Gamma(\wedge^k A^*), Q \in \Gamma(\wedge^k A)$ y $Z \in \Gamma(A)$. Usando esta propiedad y (1.32), se obtiene que

$$\begin{aligned}\rho(X)(P(\phi,\psi)) &= (\mathcal{L}^A_X\psi)(\#_P(\phi)) - \psi([\![\#_P(\phi), X]\!]) \\ &= -(\mathcal{L}^A_X\phi)(\#_P(\psi)) + \phi([\![\#_P(\psi), X]\!]).\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.17), se deduce que

$$\begin{aligned}((d_{A^*})_{X_0}X)(\phi,\psi) &= -\rho(X)(P(\phi,\psi)) + (\mathcal{L}^A_X\psi)(\#_P(\phi)) \\ &\quad -\mathcal{L}^A_X\phi((\#_P(\psi)) + \phi_0(X)P(\phi,\psi).\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.7) y las propiedades del corchete de Schouten, se concluye que

$$((d_{A^*})_{X_0}X)(\phi,\psi) = -([\![P,X]\!] - \phi_0(X)P)(\phi,\psi) = -[\![P,X]\!]_{\phi_0}(\phi,\psi).$$

Para probar (2.15) para cualquier $Q \in \Gamma(\wedge^k A)$ es suficiente proceder por inducción sobre k y usar el siguiente hecho

$$(d_{A^*})_{X_0}(R \wedge R') = (d_{A^*})_{X_0}R \wedge R' + (-1)^r R \wedge (d_{A^*})_{X_0}R' - X_0 \wedge R \wedge R',$$

para todo $R \in \Gamma(\wedge^r A)$ y para todo $R' \in \Gamma(\wedge^* A)$.
Finalmente, de (2.2), (2.7) y como $X_0 = -i(\phi_0)P$, se deduce que

$$d_{A^*}Q = -[\![P,Q]\!] + P \wedge i(\phi_0)Q - kX_0 \wedge Q.$$

■

A continuación relacionaremos la cohomología de A y A^* para un bialgebroide de Lie generalizado triangular $((A,[\![\ ,\ ]\!],\rho),\phi_0,P)$.
Ahora, denotamos por $\#_P : A^* \to A$ la aplicación fibrada inducida por el homomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos $\#_P : \Gamma(A^*) \to \Gamma(A)$ y por $\#_P^k : \Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^k A)$ los homomorfismos caracterizados por

$$\#_P^k(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_k) = \#_P(\phi_1)\wedge\ldots\wedge\#_P(\phi_k), \quad \text{para} \quad \phi_1,\ldots,\phi_k \in \Gamma(A^*). \tag{2.18}$$

Proposición 2.2.2 *Sea $((A,[\![\ ,\ ]\!],\rho),\phi_0,P)$ un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Entonces:*

i) *La aplicación* $\#_P : A^* \to A$ *define un homomorfismo entre los algebroides de Lie* $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ *y* $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$.

ii) *Para todo* k, $d_{A^*} \circ \#_P^{k-1} = (-1)^{k-1} \#_P^k \circ d_A$.

iii) *La aplicación* $\#_P^k : \Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^k A)$ *induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología* $H^k(A)$ *y* $H^k(A^*)$.

Demostración. Con un cálculo simple, usando (2.10) y (2.18), se prueba que

$$\#_P^2(\gamma)(\phi, \psi) = \gamma(\#_P(\phi), \#_P(\psi)), \tag{2.19}$$

para $\gamma \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ y $\phi, \psi \in \Gamma(A^*)$.
Por tanto, de (1.32), (2.10) y (2.19), obtenemos

$$\frac{1}{2} i(\alpha)[\![P, P]\!] = \#_P^2(d_A \alpha) - [\![\#_P(\alpha), P]\!], \tag{2.20}$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$. Se deduce entonces que

$$d_{A^*}(\#_P(\alpha)) = -\#_P^2(d_A \alpha). \tag{2.21}$$

En efecto, por (2.13) se tiene que $\frac{1}{2} i(\alpha)[\![P, P]\!] = X_0 \wedge \#_P(\alpha) - P \wedge i(\phi_0)\#_P(\alpha)$.
Sustituyendo ahora esta expresión en (2.20), se deduce que
$\#_P^2(d_A \alpha) = X_0 \wedge \#_P(\alpha) - P \wedge i(\phi_0)(\#_P(\alpha)) + [\![P, \#_P(\alpha)]\!]$.
Por otra parte, teniendo en cuenta la Proposición 2.2.1,
$d_{A^*}(\#_P(\alpha)) = -[\![P, \#_P(\alpha)]\!] + P \wedge i(\phi_0)(\#_P(\alpha)) - X_0 \wedge \#_P(\alpha)$.
Luego, efectivamente se concluye (2.21).
Por tanto, como $\rho_* = \rho \circ \#_P$, (2.21) implica que

$$\#_P [\![\phi, \psi]\!]_* = [\![\#_P(\phi), \#_P(\psi)]\!],$$

para todo $\phi, \psi \in \Gamma(A^*)$. De esta forma queda probado *i)* .
El apartado *ii)* se sigue de la relación

$$\#_P^k(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k) = \#_P(\phi_1) \wedge \ldots \wedge \#_P(\phi_k)$$

y utilizando nuevamente (2.21).

Por último, para probar el apartado *iii)* es suficiente usar los apartados i) y ii).

■

Un simple cálculo, usando la Proposición 2.2.2 permite relacionar las cohomologías $H^*_{\phi_0}(A)$ y $H^*_{X_0}(A^*)$.

Proposición 2.2.3 *Sea* $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ *un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Entonces:*

i) $(d_A)_{X_0} \circ \#_P^{k-1} = -\#_P^k \circ d_{\phi_0}$, *donde* $X_0 = -\#_P(\phi_0)$.

ii) La aplicación $\#_P^k : \Gamma(\wedge^k A^*) \to \Gamma(\wedge^k A)$ *induce un homomorfismo entre* $H^k_{\phi_0}(A)$ *y* $H^k_{X_0}(A^*)$.

Por otra parte, si $(((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0), ((A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*), X_0))$ es un bialgebroide de Lie generalizado sobre M, se puede definir un corchete de Jacobi sobre el espacio base M como sigue (ver [59])

$$\{f, g\} = ((d_A)_{\phi_0} f)((d_{A^*})_{X_0} g) = -((d_A)_{\phi_0} g)((d_{A^*})_{X_0} f),$$

para todo $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Este corchete satisface

$$(d_A)_{\phi_0}(\{f, g\}) = [\![(d_A)_{\phi_0} f, (d_A)_{\phi_0} g]\!]_*. \tag{2.22}$$

En este caso, la estructura de Jacobi (Λ, E) inducida por $\{\ ,\ \}$ está caracterizada por

$$\begin{aligned} \Lambda(df, dg) &= d_A f(d_{A^*} g), \qquad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ E &= -\rho(X_0) = \rho_*(\phi_0), \end{aligned} \tag{2.23}$$

(ver [59] para más detalles). En el caso particular de un bialgebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P) se tiene que $\Lambda(df, dg) = P(d_A f, d_A g)$, para todo $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Ahora, si $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie sobre M y $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ es un 1-cociclo en la cohomología del algebroide, se puede considerar el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos, $(\rho, \phi_0) : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(M) \oplus C^\infty(M, \mathbb{R})$ dado por

$$(\rho, \phi_0)(X) = (\rho(X), \phi_0(X)), \qquad \forall X \in \Gamma(A).$$

Este homomorfismo induce un homomorfismo entre los algebroides de Lie $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ y $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$ el cual denotamos también por (ρ, ϕ_0). Supongamos que $(\rho, \phi_0)^* : T^*M \times \mathbb{R} \to A^*$ es el homomorfismo adjunto de (ρ, ϕ_0).

Proposición 2.2.4 *Sea* $(((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0), ((A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*), X_0))$ *un bialgebroide de Lie generalizado sobre* M*. Supongamos que* (Λ, E) *es la estructura de Jacobi asociada sobre* M*. Entonces, la aplicación fibrada* $(\rho, \phi_0)^* : T^*M \times \mathbb{R} \to A^*$ *induce un homomorfismo de algebroides de Lie entre* $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ *y el algebroide de Lie dual* $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$.

Demostración. Si $(\alpha, f) \in \Omega^1(M) \oplus C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $dim M = n$, entonces, para cualquier $x \in M$ existe un entorno U abierto de x en M, y existen $h_i, g_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, tal que en U

$$(\alpha, f) = \sum_{i=1}^{n+1} h_i (dg_i, g_i).$$

Por ello, para probar que $\rho_* \circ (\rho, \phi_0)^* = \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}$, es suficiente demostrar que $(\rho_* \circ (\rho, \phi_0)^*)(df, f) = \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(df, f)$, para toda $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Ahora bien,

$$(\rho, \phi_0)^*(df, f) = (d_A)_{\phi_0} f. \tag{2.24}$$

Usando este hecho, (1.38), (2.2) y (2.23), concluimos que

$$\begin{aligned} \rho_*((\rho, \phi_0)^*(df, f))(g) &= \rho_*((d_A)_{\phi_0} f)(g) \\ &= d_{A^*} g(d_A f) + \rho_*(f \phi_0)(g) \\ &= d_{A^*} g(d_A f) + f \rho_*(\phi_0)(g) \\ &= \Lambda(df, dg) + f E(g) = \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)}(df, f)(g), \end{aligned}$$

para todo $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Veamos ahora que $(\rho, \phi_0)^*$ induce un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir,

$$(\rho, \phi_0)^* [\![(\alpha, f), (\beta, g)]\!]_{(\Lambda,E)} = [\![(\rho, \phi_0)^*(\alpha, f), (\rho, \phi_0)^*(\beta, g)]\!]_*.$$

De nuevo, es suficiente probar esta igualdad para pares de la forma (df, f) y (dg, g).
Pero de (1.41), (2.22) y (2.24), se obtiene que

$$\begin{array}{rcl}(\rho,\phi_0)^*[\![(df,f),(dg,g)]\!]_{(\Lambda,E)} & = & (\rho,\phi_0)^*(d(\{f,g\}),\{f,g\}) \\ & = & (d_A)_{\phi_0}(\{f,g\}) \\ & = & [\![(d_A)_{\phi_0}f,(d_A)_{\phi_0}g]\!]_* \\ & = & [\![(\rho,\phi_0)^*(df,f),(\rho,\phi_0)^*(dg,g)]\!]_*.\end{array}$$

■

Usando la Proposición 2.2.4 se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.2.5 *Sea* $(((A,[\![\ ,\ ]\!],\rho),\phi_0),((A^*,[\![\ ,\ ]\!]_*,\rho_*),X_0))$ *un bialgebroide de Lie generalizado sobre* M. *Supongamos que* (Λ,E) *es la estructura de Jacobi asociada sobre* M *y que* $(\rho,\phi_0)^k : \Gamma(\wedge^k A) \to \Gamma(\wedge^k(TM\times\mathbb{R}))$ *es el homomorfismo de* $C^\infty(M,\mathbb{R})$*-módulos inducido por la aplicación* $(\rho,\phi_0) : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R}) \cong \Gamma(TM\times\mathbb{R})$.

i) Si $d_{(\Lambda,E)}$ *es el operador de cohomología del complejo de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de* M *y* d_{A^*} *es la diferencial del algebroide dual* $(A^*,[\![\ ,\ ]\!]_*,\rho_*)$, *entonces* $d_{(\Lambda,E)}\circ(\rho,\phi_0)^k = (\rho,\phi_0)^{k+1}\circ d_{A^*}$.

ii) Si $H^*_{LJ}(M,\Lambda,E)$ *es la LJ-cohomología de* (M,Λ,E), *entonces la aplicación* $(\rho,\phi_0)^k$ *induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología* $H^k(A^*)$ *y* $H^k_{LJ}(M,\Lambda,E)$.

Nótese que $(\rho,\phi_0)(X_0) = (\rho(X_0),\phi_0(X_0)) = (\rho(X_0),0) = (-E,0)$. Por lo tanto, de (2.2), (2.6) y el Corolario 2.2.5, se concluye lo siguiente

Corolario 2.2.6 *Bajo las mismas hipótesis del Corolario 2.2.5, se tiene que:*

i) Para todo k, $(d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}\circ(\rho,\phi_0)^k = (\rho,\phi_0)^{k+1}\circ(d_{A^*})_{X_0}$, *donde* $X_0 = -\#_P(\phi_0)$.

ii) Si $H^*_{1-diff}(M,\Lambda,E)$ *es la cohomología* 1*-diferenciable de Chevalley-Eilenberg de* (M,Λ,E), *entonces la aplicación* $(\rho,\phi_0)^k$ *induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología* $H^k_{X_0}(A^*)$ *y* $H^k_{1-diff}(M,\Lambda,E)$.

2.3 Homología y bialgebroides de Lie generalizados triangulares

Sea (A, ϕ_0, P) un bialgebroide de Lie generalizado triangular sobre M. Como hemos visto en la sección anterior, es posible definir una estructura de algebroide de Lie $([\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ sobre el fibrado dual A^* y, además, M admite una estructura de Jacobi (Λ, E).
Por otra parte, las cohomologías $H^*_{LJ}(M, \Lambda, E)$ y $H^*_{1-diff}(M, \Lambda, E)$ están relacionados con las cohomologías $H^*(A^*)$ y $H^*_{X_0}(A^*)$ (ver los Corolarios 2.2.5 y 2.2.6).
A continuación, introduciremos dos homologías sobre el algebroide de Lie dual $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ asociado con el triple (A, ϕ_0, P). Estas homologías, como en el caso de las cohomologías $H^*(A^*)$ y $H^*_{X_0}(A^*)$, están relacionadas con las definidas por las representaciones del álgebra de Lie $(C^\infty(M, \mathbb{R}), \{\ ,\ \})$ sobre sí misma usando los campos hamiltonianos y el corchete de Jacobi $\{\ ,\ \}$ de M.
Sea entonces $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ un bialgebroide de Lie generalizado triangular sobre M. Denotamos por (Λ, E) la estructura de Jacobi asociada a M, por $C^{CE}_k(M)$ el espacio de las k-cadenas en el complejo de homología Chevalley-Eilenberg y H-Chevalley-Eilenberg sobre (M, Λ, E) (ver Sección 1.4.3) y por $\delta^{(\Lambda,E)}_{HCE}$ (respectivamente, $\delta^{(\Lambda,E)}_{CE}$) el operador de homología del complejo H-Chevalley-Eilenberg (respectivamente, Chevalley-Eilenberg).
De forma similar a la construcción del operador de la homología canónica de una variedad de Poisson [12] y del operador de la LJ-homología de una variedad de Jacobi (ver Ejemplos 1.4.8 *ii*) y *iii*)), consideramos la aplicación k-lineal antisimétrica $\widetilde{\pi}_k : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \ldots^{(k} \ldots \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \Gamma(\wedge^k A^*)$ definida por

$$\widetilde{\pi}_k(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k) = (d_A)_{\phi_0} f_1 \wedge \ldots \wedge (d_A)_{\phi_0} f_k.$$

Esta aplicación induce una aplicación lineal $\pi_k : C^{CE}_k(M) \to \Gamma(\wedge^k A^*)$ caracterizada por

$$\pi_k(f \otimes (f_1 \wedge \ldots \wedge f_k)) = f (d_A)_{\phi_0} f_1 \wedge \ldots \wedge (d_A)_{\phi_0} f_k.$$

Un cálculo directo, usando (2.2) demuestra que si $\alpha = (d_A)_{\phi_0} f_1 \wedge \ldots \wedge (d_A)_{\phi_0} f_k$, con $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$(d_A)_{\phi_0}(\alpha) = -(k-1)\phi_0 \wedge \alpha. \tag{2.25}$$

Además, para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$ y $\beta \in \Gamma(\wedge^* A^*)$

$$i(P)(\alpha \wedge \beta) = i(\#_P(\alpha))\beta + \alpha \wedge i(P)\beta. \tag{2.26}$$

Estas fórmulas nos permiten obtener las siguientes relaciones

$$\mathfrak{d} \circ \pi_k = -\pi_{k-1} \circ \delta_{HCE}^{(\Lambda,E)}, \qquad \mathfrak{d}_{X_0} \circ \pi_k = -\pi_{k-1} \circ \delta_{CE}^{(\Lambda,E)},$$

donde $\mathfrak{d} : \Gamma(\wedge^k A^*) \to (\wedge^{k-1} A^*)$ y $\mathfrak{d}_{X_0} : \Gamma(\wedge^k A^*) \to (\wedge^{k-1} A^*)$ son los operadores definidos por

$$\mathfrak{d}(\phi) = i(P) d_A \phi - d_A i(P)\phi - k i(X_0)\phi + \phi_0 \wedge i(P)\phi, \tag{2.27}$$

$$\mathfrak{d}_{X_0}(\phi) = \mathfrak{d}(\phi) - i(X_0)\phi. \tag{2.28}$$

El siguiente resultado prueba que $-\mathfrak{d}$ y $-\mathfrak{d}_{X_0}$ son operadores generantes del álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A^*), \wedge, [\![\ ,\ ]\!]_*)$ con cuadrado cero.

Teorema 2.3.1 *Sea $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ un bialgebroide de Lie generalizado triangular sobre M. Si $\mathfrak{d}$ y $\mathfrak{d}_{X_0}$ son los operadores definidos en (2.27) y (2.28), respectivamente, entonces $-\mathfrak{d}$ y $-\mathfrak{d}_{X_0}$ son operadores generantes del álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A^*), \wedge, [\![\ ,\ ]\!]_*)$ y*

$$\mathfrak{d}^2 = 0, \qquad \mathfrak{d}_{X_0}^2 = 0.$$

Demostración. Usando (1.32), (2.11) y (2.27), se tiene que

$$\mathfrak{d}(f\phi) - f\mathfrak{d}\phi = -\rho_*(\phi)(f) = -[\![f, \phi]\!]_*,$$

para $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $\phi \in \Gamma(A^*)$.
Además, de (2.2), (2.11), (2.25), (2.27) y como $X_0 = -\#_P(\phi_0)$, se sigue que

$$\mathfrak{d}(\phi \wedge \psi) - (\mathfrak{d}\phi)\psi + (\mathfrak{d}\psi)\phi = -[\![\phi, \psi]\!]_*,$$

para todo $\phi, \psi \in \Gamma(A^*)$. Así, $-\mathfrak{d}$ es un operador generante del álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A^*), \wedge, [\![\; , \;]\!]_*)$. Consecuentemente, usando (2.28), que X_0 es un 1-cociclo y los resultados de [128] (ver Sección 1.4.3), se tiene que $-\mathfrak{d}_{X_0}$ es también un operador generante del álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A^*), \wedge, [\![\; , \;]\!]_*)$.

Ahora vamos a probar que $\mathfrak{d}^2 = 0$.

Denotamos por γ el conmutador de $i(P)$ y d_A, es decir,

$$\gamma = [i(P), d_A] = i(P)d_A - d_A i(P). \tag{2.29}$$

Entonces,

$$\gamma^2 = -i(P)i(X_0)d_A - d_A i(P)i(X_0). \tag{2.30}$$

En efecto, un simple cálculo prueba que

$$\gamma^2 = i(P)d_A i(P)d_A - d_A i(P)i(P)d_A + d_A i(P)d_A i(P). \tag{2.31}$$

Además, como $X_0 = -\#_P(\phi_0)$ y

$$[[i(R), d_A], i(Q)] = i([\![R, Q]\!]), \qquad \forall R, Q \in \Gamma(\wedge^* A), \tag{2.32}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \gamma i(P) - i(P)\gamma &= [[i(P), d_A], i(P)] = i([\![P, P]\!]) \\ &= i([\![P, P]\!]_{\phi_0}) - 2i(X_0)i(P) = -2i(X_0)i(P). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Por otro lado, usando (2.29), se tiene que

$$\gamma i(P) - i(P)\gamma = 2i(P)d_A i(P) - d_A i(P)i(P) - i(P)i(P)d_A. \tag{2.34}$$

Por tanto, de (2.33) y (2.34), se concluye que

$$i(P)d_A i(P) = -i(X_0)i(P) + \frac{1}{2}(d_A i(P)i(P) + i(P)i(P)d_A). \tag{2.35}$$

Así, sustituyendo (2.35) en (2.31), se obtiene (2.30).

Ahora, usando (2.25), (2.27), (2.29), (2.30) y el hecho de que $d_A\phi_0 = 0$, deducimos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}^2(\phi) &= k([[i(X_0), d_A], i(P)])(\phi) - \phi_0 \wedge (\gamma i(P) - i(P)\gamma \\ &\quad +2i(X_0)i(P))(\phi), \end{aligned} \tag{2.36}$$

para todo $\phi \in \Gamma(\wedge^k A^*)$. Así, de (2.32), (2.33), (2.36) y ya que $0 = d_{A^*}X_0 = [\![P, X_0]\!]$, se obtiene que $\mathfrak{d}^2 = 0$.

Finalmente, usando que $\mathfrak{d}$ es un operador generante del álgebra de Gerstenhaber $(\Gamma(\wedge^* A^*), \wedge, [\![\ ,\ ]\!]_*)$, que $\mathfrak{d}^2 = 0$, y que X_0 es un 1-cociclo para el algebroide de Lie $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$, se concluye que $\mathfrak{d}^2_{X_0} = 0$.

■

Por consiguiente el operador $\mathfrak{d}$ (respectivamente, $\mathfrak{d}_{X_0}$) dado en (2.27) (respectivamente, (2.28)) define un complejo de homología. De hecho, usando los resultados de [128] (ver Sección 1.4.3), concluimos que la homología definida por este complejo es la homología asociada al algebroide de Lie $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ y a la A^*-conexión llana ∇ (respectivamente, ∇^{X_0}) dada por (ver (1.62), (2.26), (2.27) y (2.28))

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \Phi &= -\alpha \wedge \mathfrak{d}\Phi = \alpha \wedge (d_A i(P)\Phi + m i(X_0)\Phi - \phi_0 \wedge i(P)\Phi) \\ &= \alpha \wedge (d_A i(P)\Phi + (m-1) i(X_0)\Phi), \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \nabla^{X_0}_\alpha \Phi &= -\alpha \wedge \mathfrak{d}_{X_0}\Phi = \alpha \wedge (d_A i(P)\Phi + (m-1) i(X_0)\Phi - \phi_0 \wedge i(P)\Phi) \\ &= \alpha \wedge (d_A i(P)\Phi + m i(X_0)\Phi), \end{aligned} \tag{2.38}$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$ y $\Phi \in \Gamma(\wedge^m A^*)$, donde m es el rango de A.

2.4 Dualidad, clase modular y bialgebroides de Lie generalizados triangulares

En esta sección, introduciremos la clase modular para un bialgebroide de Lie generalizado triangular. Además, estudiaremos el papel que juega esta clase

de cohomología en la dualidad entre las teorías de cohomología y homología introducidas en las Secciones 2.2 y 2.3.
Supondremos que $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie orientable de rango m y sea $\nu \in \Gamma(\wedge^m A^*)$ una m-sección no nula en todo punto.
Si $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ es un 1-cociclo en la cohomología de A y $P \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ es una bisección satisfaciendo que $[\![P, P]\!]_{\phi_0} = 0$, podemos considerar el algebroide dual $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ asociado al triple $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$.
Definimos el operador $* : \Gamma(\wedge^k A) \to \Gamma(\wedge^{m-k} A^*)$ como sigue

$$*Q = i(Q)\nu, \qquad \forall Q \in \Gamma(\wedge^k A).$$

Claramente, $*$ es un isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos. Además, se tiene que

$$\delta_0(*Q) = (-1)^{k+1} *(d_{A^*}Q), \qquad (\delta_0)_{X_0}(*Q) = (-1)^{k+1} *((d_{A^*})_{X_0}Q), \quad (2.39)$$

donde d_{A^*} (respectivamente, $(d_{A^*})_{X_0}$) es la diferencial (respectivamente, la X_0-diferencial) del algebroide de Lie $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ y δ_0 (respectivamente, $(\delta_0)_{X_0}$) son los operadores de homología asociados a las A^*-conexiones llanas ∇_0 (respectivamente, $\nabla_0^{X_0}$) sobre $\wedge^m A^* \to M$ caracterizadas por

$$(\nabla_0)_\alpha \nu = 0, \quad (\nabla_0^{X_0})_\alpha \nu = \alpha(X_0)\nu, \qquad (2.40)$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$. Por tanto, (2.39) implica que

$$H^k(A^*) \cong H_{m-k}(A^*, \nabla_0), \qquad H^k_{X_0}(A^*) \cong H_{m-k}(A^*, \nabla_0^{X_0}), \qquad (2.41)$$

para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$.
Ahora, compararemos la homología $H_k(A^*, \nabla_0)$ (respectivamente, $H_k(A^*, \nabla_0^{X_0})$) con la homología del algebroide de Lie dual $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ asociada con la A^*-conexión llana ∇ (respectivamente, ∇^{X_0}) definida en (2.37) (respectivamente, (2.38)).
De hecho, usando (2.37), (2.38) y (2.40), se obtiene que

$$\nabla_\alpha \nu - (\nabla_0)_\alpha \nu = \nabla_\alpha^{X_0} \nu - (\nabla_0^{X_0})_\alpha \nu = \alpha \wedge (d_A i(P)\nu + (m-1) i(X_0)\nu), \quad (2.42)$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$.
Por otra parte, si $\mathcal{L}^A$ es la derivada de Lie sobre A, de (2.25), se deduce que

$$\begin{array}{rclcl} 0 & = & d_A(i(P)(\alpha\wedge\nu)) & = & d_A(i(\#_P(\alpha))\nu) + d_A\alpha\wedge i(P)\nu - \alpha\wedge d_A i(P)\nu \\ & & & = & \mathcal{L}^A_{\#_P(\alpha)}\nu + d_A\alpha\wedge i(P)\nu - \alpha\wedge d_A i(P)\nu \\ & & & = & \mathcal{L}^A_{\#_P(\alpha)}\nu + i(P)(d_A\alpha)\nu - \alpha\wedge d_A i(P)\nu, \\ & & & & \\ 0 & = & i(X_0)(\alpha\wedge\nu) & = & \alpha(X_0)\nu - \alpha\wedge i(X_0)\nu. \end{array}$$

Sustituyendo en (2.42), se concluye que

$$\begin{array}{rcl} \nabla_\alpha\nu - (\nabla_0)_\alpha\nu & = & \nabla^{X_0}_\alpha\nu - (\nabla^{X_0}_0)_\alpha\nu \\ & = & \mathcal{L}^A_{\#_P(\alpha)}\nu + (i(P)(d_A\alpha) + (m-1)\alpha(X_0))\nu. \end{array} \tag{2.43}$$

Ahora, consideramos la sección $\mathcal{M}^\nu_{(A,\phi_0,P)} \in \Gamma(A)$ caracterizada por la condición

$$\alpha(\mathcal{M}^\nu_{(A,\phi_0,P)})\nu = \mathcal{L}^A_{\#_P(\alpha)}\nu + (i(P)(d_A\alpha) + (m-1)\alpha(X_0))\nu, \tag{2.44}$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$. De (2.43) y (2.44), se sigue que

$$\nabla_\alpha\nu - (\nabla_0)_\alpha\nu = \nabla^{X_0}_\alpha\nu - (\nabla^{X_0}_0)_\alpha\nu = \alpha(\mathcal{M}^\nu_{(A,\phi_0,P)})\nu, \tag{2.45}$$

y, como ∇ y ∇_0 (respectivamente, ∇^{X_0} y $\nabla^{X_0}_0$), son A^*-conexiones llanas, se tiene que $\mathcal{M}^\nu_{(A,\phi_0,P)}$ es un 1-cociclo del algebroide de Lie $(A^*, [\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ (ver la Sección 1.4.3).
Además, usando (1.63), (1.64) y (2.45), se deduce que

$$\mathfrak{d} - \delta_0 = \mathfrak{d}_{X_0} - (\delta_0)_{X_0} = -i(\mathcal{M}^\nu_{(A,\phi_0,P)}), \tag{2.46}$$

donde $\mathfrak{d}$ (respectivamente, $\mathfrak{d}_{X_0}$) es el operador de homología dado en (2.27) (respectivamente, (2.28)).
La clase de cohomología $\mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)} = [\mathcal{M}^\nu_{(A,\phi_0,P)}] \in H^1(A^*)$ no depende de la sección ν elegida. De hecho, si $\nu' \in \Gamma(\wedge^m A^*)$ es otra sección no nula en todo punto, existe $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $f \neq 0$ en todo punto, tal que $\nu' = f\nu$. Podemos

suponer, sin pérdida de generalidad, que $f > 0$. Entonces, un cálculo directo, usando (2.44), demuestra que

$$\mathcal{M}^{\nu'}_{(A,\phi_0,P)} = \mathcal{M}^{\nu}_{(A,\phi_0,P)} + d_{A^*}(lnf).$$

Definición 2.4.1 La clase de cohomología $\mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)} = [\mathcal{M}^{\nu}_{(A,\phi_0,P)}] \in H^1(A^*)$ se denomina *la clase modular del bialgebroide de Lie generalizado triangular* (A, ϕ_0, P). El bialgebroide de Lie generalizado triangular se dice que es *unimodular* si su clase modular $\mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)}$ es nula.

De (2.41) y (2.46), se concluye

Teorema 2.4.2 *Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Lie orientable de rango m, $\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ un 1-cociclo en la cohomología del algebroide y $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$ una bisección de A satisfaciendo $[\![P, P]\!]_{\phi_0} = 0$. Si el bialgebroide generalizado triangular (A, ϕ_0, P) es unimodular entonces*

$$H^k(A^*) \cong H_{m-k}(A^*, \nabla), \qquad H^k_{X_0}(A^*) \cong H_{m-k}(A^*, \nabla^{X_0}),$$

donde $X_0 = -\#_P(\phi_0)$, y ∇ (respectivamente, ∇^{X_0}) es la A^*-conexión llana definida en (2.37) (respectivamente, (2.38)).

A continuación, relacionaremos la clase modular del bialgebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P) sobre M con la clase modular de los algebroides de Lie A y A^* (ver Sección 1.4.4).
Supongamos que $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ es un bialgebroide de Lie generalizado triangular de rango m sobre una variedad orientable M de dimensión n. Sea $\nu \in \Gamma(\wedge^m A^*)$ una m-sección no nula en todo punto y $\Omega \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen. Consideramos la sección V_ν de $\wedge^m A \to M$ caracterizada por la relación

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m = V_\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\nu, \quad \text{para todo} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Gamma(A^*).$$

Un cálculo directo prueba que

$$(div_{V_\nu}\alpha)\nu = -[\![\alpha, \nu]\!]_*, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \Gamma(A^*). \tag{2.47}$$

Entonces, usando (1.74), (2.44) y de (2.47), se concluye que

$$\#_P(\mathcal{M}_A^{(\nu,\Omega)}) = -\mathcal{M}_{A^*}^{(V_\nu,\Omega)} + \Psi = \mathcal{M}^{\nu}_{(A,\phi_0,P)} - (m-1)X_0 - \Psi', \tag{2.48}$$

donde Ψ y Ψ' son los 1-cociclos del algebroide de Lie $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ caracterizados por las relaciones

$$\alpha(\Psi)\nu = \mathcal{L}^A_{\#_P(\alpha)}\nu + [\![\alpha,\nu]\!]_*, \quad \alpha(\Psi') = div_\Omega \rho(\#_P(\alpha)) + i(P)(d_A\alpha), \tag{2.49}$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$.
De (2.48), se obtiene que

$$\#_P(\mathcal{M}_A) = -\mathcal{M}_{A^*} + [\Psi] = \mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)} - (m-1)[X_0] - [\Psi'], \tag{2.50}$$

donde $\#_P : H^1(A) \to H^1(A^*)$ es el homomorfismo entre $H^1(A)$ y $H^1(A^*)$ inducido por la aplicación $\#_P : \Gamma(A^*) \to \Gamma(A)$ (ver Proposición 2.2.2).
Estos resultados los sintetizamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.3 *Sea $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), \phi_0, P)$ un algebroide de Lie generalizado triangular. Si $\mathcal{M}_A$ (respectivamente, $\mathcal{M}_{A^*}$) denota la clase modular del algebroide de Lie A (respectivamente, del algebroide de Lie dual A^*) y $\mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)}$ es la clase modular del bialgebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P), entonces*

$$\#_P(\mathcal{M}_A) = -\mathcal{M}_{A^*} + [\Psi] = \mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)} - (m-1)[X_0] - [\Psi'],$$

donde Ψ y Ψ' son 1-cociclos del algebroide $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$.

Finalmente, si (Λ, E) es la estructura de Jacobi inducida por el bialgebroide de Lie generalizado triangular (A, ϕ_0, P) sobre la variedad base M, usando (2.50), se concluye que

$$(\rho,\phi_0)(\#_P(\mathcal{M}_A)) = (\rho,\phi_0)(\mathcal{M}_{(A,\phi_0,P)}) - \mathcal{M}_{(\Lambda,E)} + (m-n-1)[(E,0)],$$

donde $(\rho,\phi_0) : H^1(A^*) \to H^1_{LJ}(M,\Lambda,E)$ es el homomorfismo en cohomología inducido por la aplicación $(\rho,\phi_0) : \Gamma(A) \to \Gamma(TM \times \mathbb{R}) \cong \mathfrak{X}(M) \oplus C^\infty(M,\mathbb{R})$ (ver Corolario 2.2.5) y $\mathcal{M}_{(\Lambda,E)}$ es la clase modular de la variedad de Jacobi (M, Λ, E).

Ejemplos 2.4.4 1. *Bialgebroides de Lie triangulares.* Sea $((A, [\![\ ,\ ]\!], \rho), P)$ un bialgebroide de Lie triangular sobre M. Entonces $(A, \phi_0 = 0, P)$ es un bialgebroide de Lie generalizado triangular y el fibrado dual $A^* \to M$ de A admite una estructura de algebroide de Lie $([\![\ ,\ ]\!]_*, \rho_*)$ dada por (2.11).
En este caso $X_0 = \#_P(\phi_0) = 0$, la variedad M es Poisson, los operadores de cohomologías d_{A^*} y $(d_{A^*})_{X_0}$ coinciden y $H^*(A^*) = H^*_{X_0}(A^*)$. Además, el operador de homología $\mathfrak{d} : \Gamma(\wedge^* A^*) \to \Gamma(\wedge^{*-1} A^*)$ definido como en (2.27) es justamente $\mathfrak{d} = i(P)d_A - d_A i(P) = [i(P), d_A]$.
Si m es el rango de A, la A^*-conexión llana sobre $\wedge^m A^* \to M$ asociada con $\mathfrak{d}$ está dada por $\nabla_\alpha \Phi = \alpha \wedge d_A i(P)\Phi$, para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$ y $\Phi \in \Gamma(\wedge^m A^*)$ (ver (2.37)).
Asumiremos ahora, que A es orientable y sea $\nu \in \Gamma(\wedge^m A^*)$ una m-sección no nula en todo punto. Entonces, la sección $\mathcal{M}^\nu_{(A,0,P)} \in \Gamma(A)$, que denotaremos por $\mathcal{M}^\nu_{(A,P)}$, está caracterizada por la condición (ver (2.44))

$$\alpha(\mathcal{M}^\nu_{(A,P)})\nu = \mathcal{L}^A_{\#_P(\alpha)}\nu + i(P)(d_A\alpha)\nu,$$

para todo $\alpha \in \Gamma(A^*)$ y la clase de cohomología $\mathcal{M}_{(A,P)} = [\mathcal{M}^\nu_{(A,P)}] \in H^1(A^*)$ es justamente la clase modular del bialgebroide triangular (A, P) introducida en [65]. Además, por el Teorema 2.4.2, se obtiene que si $\mathcal{M}_{(A,P)}$ es cero entonces $H^k(A^*) \cong H_{n-k}(A^*, \nabla)$, para todo k. Este resultado también fue probado en [65].
A continuación consideramos algunos ejemplos particulares.
$1a)$ *Variedades de Poisson.* Sea (M, Λ) una variedad de Poisson. Si sobre TM consideramos la estructura de algebroide de Lie trivial $([\ ,\ ], Id)$, entonces el par (TM, Λ) es un bialgebroide de Lie triangular. Además, la correspondiente estructura de algebroide de Lie sobre T^*M es la asociada a la estructura de Poisson Λ, es decir, $[\![\ ,\ ]\!]_* = [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda$ y $\rho_* = \#_\Lambda$. Por tanto, $H^*(T^*M)$ es la cohomología de Lichnerowicz-Poisson $H^*_{LP}(M, \Lambda)$ de M.
Por otro lado, en este caso, $\mathfrak{d}$ es justamente el operador de homología del complejo de homología canónica de M y $H_*(T^*M, \nabla)$ es la homología canónica $H^{can}_*(M, \Lambda)$ de M.
Además, si M es orientable, la clase modular de (TM, Λ) es justamente la

clase modular de la variedad de Poisson (M, Λ) (ver (2.44) y Ejemplo 1.4.10 *ii*)). Como consecuencia, deducimos que si la clase modular de (M, Λ) es cero entonces $H^k_{LP}(M, \Lambda) \cong H^{can}_{m-k}(M, \Lambda)$, para todo k. Este resultado fue probado en [13, 29, 128].

1b) *Biálgebras de Lie triangulares.* Sea $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ un álgebra de Lie real de dimensión n y sea r una solución de la ecuación clásica de Yang-Baxter sobre $\mathfrak{g}$, es decir, $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ y $[r, r]_{\mathfrak{g}} = 0$, donde $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$ es el corchete de Schouten del algebroide de Lie $\mathfrak{g} \to \{$ punto $\}$. El 2-vector r puede ser visto como una estructura de Poisson algebraica sobre $\mathfrak{g}$. Entonces, se puede introducir el complejo de homología

$$\ldots \to \wedge^{k+1}\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\mathfrak{d}} \wedge^k\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\mathfrak{d}} \wedge^{k-1}\mathfrak{g}^* \to \ldots,$$

donde $\mathfrak{d}$ es el operador dado por $\mathfrak{d} = i(r) \circ d_{\mathfrak{g}} - d_{\mathfrak{g}} \circ i(r)$. La homología resultante $H^{can}_*(\mathfrak{g}, r)$ es la *homología canónica algebraica de* $\mathfrak{g}$ *asociada a* r. La condición $[r, r]_{\mathfrak{g}} = 0$ también implica que el operador $d_r : \wedge^k\mathfrak{g} \to \wedge^{k+1}\mathfrak{g}$ dado por

$$d_r(Q) = -[r, Q]_{\mathfrak{g}},$$

es de cuadrado cero. Por tanto, tenemos el complejo de cohomología

$$\ldots \to \wedge^{k-1}\mathfrak{g} \xrightarrow{d_r} \wedge^k\mathfrak{g} \xrightarrow{d_r} \wedge^{k+1}\mathfrak{g} \to \ldots$$

La cohomología correspondiente $H^*_P(\mathfrak{g}, r)$ es *la cohomología de Poisson algebraica de* $\mathfrak{g}$ *asociada a* r.

Por otra parte, como el par $(\mathfrak{g}, r)$ es un bialgebroide de Lie triangular, el espacio dual $\mathfrak{g}^*$ admite un corchete de Lie $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}^*}$ definido en (2.11). Además, si $d_{\mathfrak{g}^*}$ es la diferencial de $(\mathfrak{g}^*, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}^*})$, entonces $d_{\mathfrak{g}^*} = d_r$ y, por tanto, $H^*(\mathfrak{g}^*) = H^*_P(\mathfrak{g}, r)$.

Denotamos ahora por $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}^*$ el carácter modular de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ y por $\mathcal{M}_{(\mathfrak{g},r)} \in \mathfrak{g}$ la clase modular del bialgebroide de Lie triangular $(\mathfrak{g}, r)$. $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ es la clase modular del algebroide de Lie $\mathfrak{g} \to \{$ punto $\}$ (ver Ejemplo 1.4.10 *i*)). Por tanto, usando (2.48) y (2.49), probamos que $\mathcal{M}_{(\mathfrak{g},r)} = \#_r(\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}) + \xi$, donde $\#_r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ es el homomorfismo inducido por r y $\xi \in \mathfrak{g}$ está caracterizado

por la condición $\phi(\xi) = i(r)(d_{\mathfrak{g}}\phi)$, para todo $\phi \in \mathfrak{g}^*$. Consecuentemente, si el vector $\#_r(\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}) + \xi$ es nulo, deducimos que $H^k_P(\mathfrak{g}, r) \cong H^{can}_{n-k}(\mathfrak{g}, r)$, para todo k. Un ejemplo particular de esta situación es el siguiente.
Sea $(\mathfrak{u}(2), [\ ,\ ]_{\mathfrak{u}(2)})$ el álgebra de Lie del grupo unitario $U(2)$. Entonces, existe una base $\{X, Y, Z, T\}$ de $\mathfrak{u}(2)$ tal que T pertenece al centro de $\mathfrak{u}(2)$ y

$$[X, Y]_{\mathfrak{u}(2)} = Z, \quad [X, Z]_{\mathfrak{u}(2)} = -Y, \quad [Y, Z]_{\mathfrak{u}(2)} = X.$$

Por tanto, el 2-vector $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ dado por $r = X \wedge T$ satisface que $[r, r]_{\mathfrak{u}(2)} = 0$. Como consecuencia, puesto que $\mathfrak{u}(2)$ es un álgebra de Lie unimodular y $i(r)(d_{\mathfrak{g}}\phi) = 0$, para todo $\phi \in \mathfrak{u}(2)^*$, se concluye que

$$H^k_P(\mathfrak{u}(2), r) \cong H^{can}_{4-k}(\mathfrak{u}(2), r) \cong \mathbb{R}, \quad \text{para todo} \quad k.$$

Por otra parte, un cálculo directo demuestra que

$$H^i_P(\mathfrak{u}(2), r) \cong H^{can}_{4-i}(\mathfrak{u}(2), r) \cong \mathbb{R}, \quad \text{para} \quad i = 0, 4,$$

$$H^j_P(\mathfrak{u}(2), r) \cong H^{can}_{4-j}(\mathfrak{u}(2), r) \cong \mathbb{R}^2, \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3.$$

2. *Variedades de Jacobi.* Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi de dimensión n. Para el algebroide de Lie dual $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ asociado con el bialgebroide de Lie generalizado triangular $((TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi), (0, 1), (\Lambda, E))$, el operador de cohomología d_* (respectivamente, $(d_*)_{(-E,0)}$) coincide con el operador de la LJ-cohomología $d_{(\Lambda,E)}$ (respectivamente, el operador de la cohomología 1-diferenciable Chevalley-Eilenberg $(d_{(\Lambda,E)})_{(-E,0)}$) descrito en (1.56) (respectivamente, (2.6)).
Por otra parte, el operador de homología asociado con la $(T^*M \times \mathbb{R})$-conexión llana dado en (2.37) es en este caso el operador de la LJ-homología $\delta^{(\Lambda,E)}$ introducido por Vaisman [118] (ver (1.70)). Usando (1.35), (1.83), (1.86) y (2.44), deducimos que la clase modular del bialgebroide de Lie generalizado triangular $((TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi), (0, 1), (\Lambda, E))$ coincide con la clase modular de la variedad de Jacobi (M, Λ, E). En consecuencia, si $\nabla^{(\Lambda,E)}$ es la $(T^*M \times \mathbb{R})$-conexión llana sobre $\wedge^{n+1}(T^*M \times \mathbb{R})$ dada por (1.69), tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5 *Sea* (M, Λ, E) *una variedad de Jacobi unimodular de dimensión* n*. Entonces*

$$H_k^{LJ}(M) \cong H_{LJ}^{n+1-k}(M)$$
$$H_k(T^*M \times \mathbb{R}, (\nabla^{(\Lambda,E)})^{(-E,0)}) \cong H_{1-diff}^k(M),$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n+1\}$*, donde* $H_{LJ}^*(M)$ *(respectivamente,* $H_{1-diff}^*(M)$*) es la LJ-cohomología (respectivamente, la cohomología 1-diferenciable de Chevalley-Eilenberg) de* M*,* $H_*^{LJ}(M)$ *es la LJ-homología de* M *y* $(\nabla^{(\Lambda,E)})^{(-E,0)}$ *es la* $(T^*M \times \mathbb{R})$*-conexión llana sobre* $\wedge^{n+1}(T^*M \times \mathbb{R}) \to M$ *dada por*

$$\begin{aligned}
(\nabla^{(\Lambda,E)})^{(-E,0)}_{(\alpha,f)}(0,\Phi) &= \nabla^{(\Lambda,E)}_{(\alpha,f)}(0,\Phi) + (\alpha, f) \wedge i(-E,0)(0,\Phi) \\
&= (0, f di(E)\Phi + \alpha \wedge (di(\Lambda)\Phi \\
&\quad -(n+1)i(E)\Phi)).
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Jacobi

En este capítulo, haremos un cálculo explícito de la cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de diferentes ejemplos relevantes de variedades de Jacobi. Asímismo, estudiaremos ciertas propiedades que satisface esta cohomología.

3.1 Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi y cambios conformes de estructuras de Jacobi

Comenzaremos probando en la primera sección de este capítulo que la LJ-cohomología es invariante por cambios conformes.
Sea (Λ, E) una estructura de Jacobi sobre M. Un *cambio conforme* de (Λ, E) es una nueva estructura de Jacobi (Λ_a, E_a) sobre M definida por

$$\Lambda_a = a\Lambda, \qquad E_a = X_a = \#_\Lambda(da) + aE, \tag{3.1}$$

siendo a una función real, C^∞-diferenciable y positiva sobre M (ver [24, 45]). Hacemos notar que $(\Lambda, E) = ((\Lambda_a)_{\frac{1}{a}}, (E_a)_{\frac{1}{a}})$. Además, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1 *Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi y (Λ_a, E_a) un cambio conforme de la estructura de Jacobi (Λ, E). Entonces,*

$$H^k_{LJ}(M, \Lambda, E) \cong H^k_{LJ}(M, \Lambda_a, E_a),$$

para todo k. Por tanto, la LJ-cohomología es invariante bajo cambios conformes de la estructura de Jacobi.

Demostración. Definimos el isomorfismo de fibrados vectoriales $\phi : T^*M \times \mathbb{R} \to T^*M \times \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$\phi(\alpha_x, \lambda) = (\frac{1}{a(x)}\alpha_x + \lambda d(\frac{1}{a})(x), \frac{\lambda}{a(x)}) \tag{3.2}$$

para todo $\alpha_x \in T^*_xM$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos $\phi_1 : \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ inducido por ϕ está dado por

$$\phi_1(\alpha, f) = (\frac{1}{a}\alpha + fd(\frac{1}{a}), \frac{f}{a}) = (\frac{1}{a}\alpha - \frac{f}{a^2}da, \frac{f}{a}) \tag{3.3}$$

para todo $(\alpha, f) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Un cálculo directo, usando (1.38), (1.40), (3.1) y (3.2), prueba que

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda_a, E_a)} \circ \phi = \widetilde{\#}_{(\Lambda, E)}, \qquad \phi_1[\![(\alpha, f), (\beta, g)]\!]_{(\Lambda, E)} = [\![\phi_1(\alpha, f), \phi_1(\beta, g)]\!]_{(\Lambda_a, E_a)}$$

para todo $(\alpha, f), (\beta, g) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$. Así, ϕ define un isomorfismo entre los algebroides de Lie $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda, E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda, E)})$ y $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda_a, E_a)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda_a, E_a)})$ asociados a las estructuras de Jacobi (Λ, E) y (Λ_a, E_a), respectivamente. Por tanto, este isomorfismo induce otro entre los grupos de cohomología (ver Sección 1.4.2), es decir,

$$H^k_{LJ}(M, \Lambda, E) \cong H^k_{LJ}(M, \Lambda_a, E_a),$$

para todo k.

■

3.2 Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Poisson

Sea (M, Λ) una variedad de Poisson y $d_{(\Lambda,0)}$ el operador de la LJ-cohomología asociado a la variedad de Jacobi $(M, \Lambda, 0)$. Usando (1.56), obtenemos que

$$d_{(\Lambda,0)}(P, Q) = (-[\Lambda, P] + \Lambda \wedge Q, [\Lambda, Q]),$$

para todo $(P, Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$.
Denotamos por d_Λ el operador de cohomogía de Lichnerowicz-Poisson (ver (1.55)).
Nótese que $d_\Lambda(\Lambda) = 0$, esto es, Λ es un 2-cociclo en el complejo LP de M. Por tanto, podemos definir el homomorfismo $L^k : H^k_{LP}(M) \to H^{k+2}_{LP}(M)$, dado por

$$L^k[P] = [P \wedge \Lambda],$$

para todo $[P] \in H^k_{LP}(M)$. Aquí $H^*_{LP}(M)$ denota la cohomología de Lichnerowicz-Poisson de (M, Λ).
En [80] (ver también [79]), Lichnerowicz ha demostrado la relación entre la LJ-cohomología (la cohomología 1-diferenciable de Chevalley-Eilenberg en su terminología) y la LP-cohomología de una variedad de Poisson. De hecho, si $dim H^k_{LP}(M) < \infty$, para todo k, se tiene que

$$H^k_{LJ}(M) \cong \frac{H^k_{LP}(M)}{Im L^{k-2}} \oplus ker L^{k-1}. \tag{3.4}$$

A continuación, obtendremos algunas consecuencias de estos resultados de Lichnerowicz y otros autores, para la LJ-cohomología de estructuras simplécticas, cosimplécticas y de Lie-Poisson.

3.2.1 Estructuras simplécticas

Sea (M, Ω) una variedad simpléctica de dimensión $2m$. Denotamos por Λ el 2-vector de Poisson y por $\#_\Lambda : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^k(M)$ el homomorfismo de

$C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos dado por (1.25) y (1.26). Como, en este caso, $\#_\Lambda$ es un isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos y

$$\#_\Lambda(d\alpha) = -d_\Lambda(\#_\Lambda(\alpha))$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ (ver [80, 117]), se sigue que $\#_\Lambda$ induce un isomorfismo entre la cohomología de De Rham de M, $H^*_{dR}(M)$, y la LP-cohomología. Por tanto, $H^k_{dR}(M) \cong H^k_{LP}(M)$.
Bajo esta identificación y como $\#_\Lambda(\Omega) = \Lambda$, el homomorfismo $L^k : H^k_{LP}(M) \cong H^k_{dR}(M) \to H^{k+2}_{LP}(M) \cong H^{k+2}_{dR}(M)$ está dado por

$$L^k([\alpha]) = [\alpha \wedge \Omega], \tag{3.5}$$

para todo $[\alpha] \in H^k_{dR}(M)$ y $0 \leq k \leq 2m$.
Así, de (3.4), se tiene

$$H^k_{LJ}(M) \cong \frac{H^k_{dR}(M)}{ImL^{k-2}} \oplus kerL^{k-1}. \tag{3.6}$$

Por tanto, si $b_r((M)$ es el r-ésimo número de Betti de M, deducimos que

$$\begin{aligned} dimH^k_{LJ}(M) &\leq b_k(M) + b_{k-1}(M), \\ dimH^k_{LJ}(M) &\geq max\{b_k(M) - b_{k-2}(M), b_{k-1}(M) - b_{k+1}(M)\}. \end{aligned}$$

Discutiremos a continuación el comportamiento de algunos ejemplos de variedades simplécticas con respecto a estas desigualdades. En todos los casos supondremos que M es de tipo finito.
Variedades simplécticas exactas. Si Ω es una 2-forma exacta, entonces los homomorfismo L^k son nulos y de (3.6), se sigue que

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M) \oplus H^{k-1}_{dR}(M)$$

(ver [79]). Consecuentemente,

$$dimH^k_{LJ}(M) = b_k(M) + b_{k-1}(M).$$

En particular, la dimensión de $H^k_{LJ}(M)$ es un invariante topológico de M, para todo k.

Variedades simplécticas Lefschetz. Una variedad simpléctica (M, Ω) de dimensión $2m$ se dice que es una *variedad simpléctica Lefschetz* si satisface el teorema fuerte de Lefschetz, es decir, si para todo k, $0 \leq k \leq m$, el homomorfismo

$$\Delta^k = L^{k+2(m-k-1)} \circ \ldots \circ L^{k+2} \circ L^k : H^k_{dR}(M) \to H^{2m-k}_{dR}(M)$$
$$[\alpha] \mapsto \Delta^k([\alpha]) = [\alpha \wedge \Omega^{m-k}]$$

es un isomorfismo.
Si (M, Ω) es una variedad simpléctica de Lefschetz, entonces se prueban fácilmente los dos siguientes hechos:
$i)$ L^k es un monomorfismo, para $k \leq m-1$,
$ii)$ L^k es un epimorfismo, para $k \geq m-1$.
Así, se deduce que

$$\begin{aligned} b_k(M) - b_{k-2}(M) &\leq 0, \qquad \text{para} \quad k \geq m+1, \\ b_{k-1}(M) - b_{k+1}(M) &\leq 0, \quad \text{para} \quad k \leq m. \end{aligned}$$

Además, usando (3.6), se tiene que

$$\begin{aligned} H^k_{LJ}(M) &\cong \frac{H^k_{dR}(M)}{ImL^{k-2}}, \quad \text{para} \quad k \leq m, \\ H^k_{LJ}(M) &\cong kerL^{k-1}, \quad \text{para} \quad k \geq m+1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} dimH^k_{LJ}(M) &= b_k(M) - b_{k-2}(M), \qquad \text{para} \quad k \leq m, \\ dimH^k_{LJ}(M) &= b_{k-1}(M) - b_{k+1}(M), \quad \text{para} \quad k \geq m+1. \end{aligned}$$

Por tanto, la dimensión de $H^k_{LJ}(M)$ es nuevamente un invariante topológico de M, para todo k.

Observación 3.2.1 $i)$ Una variedad M dotada con un estructura compleja J se dice que es *Kähler* si admite una métrica Riemanniana h compatible con J y tal que la 2-forma Kähler Ω dada por

$$\Omega(X, Y) = h(X, JY),$$

es cerrada (ver [62]). En tal caso, Ω define una estructura simpléctica sobre M. Además, si M es compacta entonces (M,Ω) es una variedad simpléctica de Lefschetz (ver [126]).
ii) Existen ejemplos de variedades simplécticas Lefschetz que no admiten estructuras Kähler (ver [18, 30]).

Nilvariedades simplécticas compactas. Sea G un grupo de Lie nilpotente, simplemente conexo de dimensión par y sea $\widetilde{\Omega}$ una 2-forma simpléctica invariante a izquierda sobre G. Supongamos que Γ es un subgrupo discreto de G tal que el espacio cociente de las clases por la derecha $\Gamma\backslash G$ es una variedad compacta. Entonces, la 2-forma $\widetilde{\Omega}$ induce una 2-forma simpléctica Ω sobre $\Gamma\backslash G$ y así, $\Gamma\backslash G$ es una nilvariedad simpléctica compacta.
Ahora, denotamos por $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie sobre G y por $H^*(\mathfrak{g})$ la cohomología del álgebra $\mathfrak{g}$ (ver Ejemplo 1.4.5 *ii*)).
Definimos el homomorfismo $(L_{\mathfrak{g}})^k : H^k(\mathfrak{g}) \to H^{k+2}(\mathfrak{g})$ por

$$(L_{\mathfrak{g}})^k[\alpha] = [\alpha \wedge \widetilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}] \tag{3.8}$$

para $[\alpha] \in H^k(\mathfrak{g})$, donde $\widetilde{\Omega}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ es la 2-forma simpléctica sobre $\mathfrak{g}$ inducida por $\widetilde{\Omega}$.
Usando el Teorema de Nomizu [103], tenemos que el homomorfismo canónico $i^k : H^k(\mathfrak{g}) \to H^k_{dR}(\Gamma\backslash G)$ es un isomorfismo. Además, de (3.5) y (3.8), se deduce que

$$i^{k+2} \circ (L_{\mathfrak{g}})^k = L^k \circ i^k$$

para todo k. Así (ver (3.6)),

$$H^k_{LJ}(\Gamma\backslash G) \cong \frac{H^k(\mathfrak{g})}{Im(L_{\mathfrak{g}})^{k-2}} \oplus ker(L_{\mathfrak{g}})^{k-1}. \tag{3.9}$$

Observación 3.2.2 *i*) Una nilvariedad simpléctica Lefschetz compacta es necesariamente un toro (ver [7]).
ii) Si el grupo de Lie G es completamente resoluble, entonces (3.9) sigue siendo cierto. Esto es debido a que el homomorfismo canónico $i^k : H^k(\mathfrak{g}) \to H^k_{dR}(\Gamma\backslash G)$ es también un isomorfismo, para todo k (ver [47]).

Ejemplos 3.2.3 Sea H el *grupo de Heisenberg* que consiste de las matrices reales de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$. H es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo de dimensión 3. Denotamos por G el grupo de Lie nilpotente de dimensión 4 definido por $G = H \times \mathbb{R}$.
Si t es la coordenada usual sobre $\mathbb{R}$, una base de 1-formas invariantes a izquierda sobre G está dada por

$$\{\widetilde{\alpha} = dx, \widetilde{\beta} = dy, \widetilde{\eta} = dz - xdy, \widetilde{\gamma} = dt\}.$$

Tenemos que

$$d\widetilde{\alpha} = d\widetilde{\beta} = 0, \quad d\widetilde{\eta} = -\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}, \quad d\widetilde{\gamma} = 0. \tag{3.10}$$

Por tanto,

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\eta} + \widetilde{\beta} \wedge \widetilde{\gamma}$$

es una 2-forma simpléctica invariante a izquierda sobre G.
Por otra parte, si $\bar{\Gamma}$ es el subgrupo de H que consiste de aquellas matrices en H con coeficientes enteros, entonces $\Gamma = \bar{\Gamma} \times \mathbb{Z}$ es un subgrupo discreto de G y el espacio cociente de las clases por la derecha $\Gamma \backslash G = (\bar{\Gamma} \backslash H) \times S^1$ es una nilvariedad compacta. De hecho, $\Gamma \backslash G$ es la *variedad de Kodaira-Thurston* (ver [63, 109]).
Las 1-formas $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\eta}$ y $\widetilde{\gamma}$ sobre G, inducen 1-formas sobre $\Gamma \backslash G$ que denotaremos por α, β, η y γ, respectivamente. Además, usando (3.10) y el Teorema de Nomizu, se sigue que

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{g}) \cong H^0_{dR}(\Gamma \backslash G) &= \langle \{1\} \rangle, \\
H^1(\mathfrak{g}) \cong H^1_{dR}(\Gamma \backslash G) &= \langle \{[\alpha], [\beta], [\gamma]\} \rangle, \\
H^2(\mathfrak{g}) \cong H^2_{dR}(\Gamma \backslash G) &= \langle \{[\alpha \wedge \eta], [\alpha \wedge \gamma], [\beta \wedge \eta], [\beta \wedge \gamma]\} \rangle, \qquad (3.11) \\
H^3(\mathfrak{g}) \cong H^3_{dR}(\Gamma \backslash G) &= \langle \{[\alpha \wedge \beta \wedge \eta], [\alpha \wedge \eta \wedge \gamma], [\beta \wedge \eta \wedge \gamma]\} \rangle, \\
H^4(\mathfrak{g}) \cong H^4_{dR}(\Gamma \backslash G) &= \langle \{[\alpha \wedge \beta \wedge \eta \wedge \gamma]\} \rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$b_0(\Gamma\backslash G) = b_4(\Gamma\backslash G) = 1, \;\; b_1(\Gamma\backslash G) = b_3(\Gamma\backslash G) = 3, \;\; b_2(\Gamma\backslash G) = 4. \qquad (3.12)$$

En consecuencia, de (3.8), (3.9) y (3.11), se deduce que

$$\begin{aligned} dimH^0_{LJ}(\Gamma\backslash G) = dimH^5_{LJ}(\Gamma\backslash G) = 1, \qquad dimH^2_{LJ}(\Gamma\backslash G) = 4, \\ dimH^1_{LJ}(\Gamma\backslash G) = dimH^4_{LJ}(\Gamma\backslash G) = 3, \qquad dimH^3_{LJ}(\Gamma\backslash G) = 2. \end{aligned}$$

Así que tenemos las siguientes desigualdades (ver (3.12))
$max\{b_k(\Gamma\backslash G) - b_{k-2}(\Gamma\backslash G), b_{k-1}(\Gamma\backslash G) - b_{k+1}(\Gamma\backslash G)\} < dimH^k_{LJ}(M) < b_k(\Gamma\backslash G)$ $+ b_{k-1}(\Gamma\backslash G)$, para $k = 2, 3$.

3.2.2 Estructuras cosimplécticas

Sea (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica con campo de Reeb ξ. Denotamos por $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por (1.5). Entonces $\flat$ puede ser extendido a un isomorfismo, que también denotaremos por $\flat$, del espacio $\mathcal{V}^k(M)$ en $\Omega^k(M)$ de la siguiente manera

$$\flat(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) = \flat(X_1) \wedge \ldots \wedge \flat(X_k), \qquad (3.13)$$

para todo $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Además, tenemos que

$$\#_\Lambda(\alpha) = (-1)^k \flat^{-1}(\alpha) + \xi \wedge \#_\Lambda(i(\xi)\alpha). \qquad (3.14)$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$, donde Λ denota la estructura de Poisson asociada a M.
Ahora consideramos el submódulo $\Omega^k_\xi(M)$ de $\Omega^k(M)$ dado por

$$\Omega^k_\xi(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) / i(\xi)\alpha = 0\}$$

y definimos el operador $d_\xi : \Omega^k_\xi(M) \to \Omega^{k+1}_\xi(M)$ de la siguiente forma

$$d_\xi \alpha = d\alpha - \eta \wedge i(\xi) d\alpha, \;\; \text{para todo} \;\; \alpha \in \Omega^k_\xi(M).$$

d_ξ es un operador de cohomología, esto es, $d_\xi^2 = 0$. Así, podemos considerar el correspondiente complejo diferencial $(\Omega^*_\xi(M), d_\xi)$. Denotamos por $H^*_\xi(M)$ la cohomología de este complejo (ver [32]).

En [73] los autores obtienen una descripción de la cohomología de Lichnerowicz-Poisson de M en términos de la cohomología $H^*_\xi(M)$.

Teorema 3.2.4 *Sean (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica con campo de Reeb ξ y Λ la estructura de Poisson asociada. Supongamos que $F^k : \Omega^k_\xi(M) \oplus \Omega^{k-1}_\xi(M) \to \mathcal{V}^k(M)$ es el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por*

$$F^k(\alpha, \beta) = \#_\Lambda \alpha + \xi \wedge \#_\Lambda \beta.$$

Entonces:

i) Las aplicaciones F^k inducen un isomorfismo de complejos $F : (\Omega^*_\xi(M), -d_\xi) \oplus (\Omega^{*-1}_\xi(M), d_\xi) \to (\mathcal{V}^k(M), d_\Lambda)$, donde d_Λ es el operador de la LP-cohomología de M.

ii) Para todo k, $0 \leq k \leq dim M$, $H^k_{LP}(M) \cong H^k_\xi(M) \oplus H^{k-1}_\xi(M)$.

Observación 3.2.5 El homomorfismo inverso a la aplicación F^k definida en el Teorema 3.2.4 está dado por

$$(F^k)^{-1}(P) = ((-1)^k(\flat(P) - \eta \wedge i(\xi)\flat(P)), (-1)^{k-1} i(\xi)\flat(P)) \in \Omega^k_\xi(M) \oplus \Omega^{k-1}_\xi(M),$$

para todo $P \in \mathcal{V}^k(M)$ (ver [72]).

Usando el Teorema 3.2.4, la Observación 3.2.5, (1.6), (3.4) y (3.13) deducimos

Teorema 3.2.6 *Sea (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica con campo de Reeb ξ. Supongamos que Λ es la estructura de Poisson asociada sobre M y que $\overline{F}^k : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ y $\overline{G}^k : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to \Omega^{k-1}(M) \oplus \Omega^{k-2}(M)$ son los homomorfismos de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos definidos por*

$$\overline{F}^k(\alpha, \beta) = (F^k(\alpha, \beta), 0), \qquad \overline{G}^k(P, Q) = (F^{k-1})^{-1}(Q)$$

para $(\alpha, \beta) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ y $(P, Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$. Entonces:

i) Las aplicaciones $\overline{F}^k$ y $\overline{G}^k$ inducen una sucesión exacta de complejos

$$0 \to (\Omega^*_\xi(M), -d_\xi) \oplus (\Omega^{*-1}_\xi(M), d_\xi) \xrightarrow{\overline{F}} (\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), d_{(\Lambda,0)}) \xrightarrow{\overline{G}}$$
$$\xrightarrow{\overline{G}} (\Omega^{*-1}_\xi(M), d_\xi) \oplus (\Omega^{*-2}_\xi(M), -d_\xi) \to 0.$$

ii) *Esta sucesión exacta induce una sucesión exacta larga de cohomología*

$$\ldots \stackrel{\overline{L}^{k-2}}{\longrightarrow} H^k_\xi(M) \oplus H^{k-1}_\xi(M) \stackrel{\overline{F}^k_*}{\longrightarrow} H^k_{LJ}(M) \stackrel{\overline{G}^k_*}{\longrightarrow} H^{k-1}_\xi(M) \oplus H^{k-2}_\xi(M) \stackrel{\overline{L}^{k-1}}{\longrightarrow}$$
$$\stackrel{\overline{L}^{k-1}}{\longrightarrow} H^{k+1}_\xi(M) \oplus H^k_\xi(M) \stackrel{\overline{F}^{k+1}_*}{\longrightarrow} \ldots$$

donde el homomorfismo conector $\overline{L}^{k-1} : H^{k-1}_\xi(M) \oplus H^{k-2}_\xi(M) \to H^{k+1}_\xi(M) \oplus H^k_\xi(M)$ *está dado por*

$$\overline{L}^{k-1}([\alpha],[\beta]) = ([\alpha \wedge \Phi],[\beta \wedge \Phi])$$

para $([\alpha],[\beta]) \in H^{k-1}_\xi(M) \oplus H^{k-2}_\xi(M)$.

A continuación, aplicaremos el Teorema anterior a un ejemplo particular.

Ejemplo 3.2.7 Sea $(\widetilde{M}, J, h)$ una variedad compacta Kähler con 2-forma de Kähler $\widetilde{\Omega}$ y de dimensión $2m$ (ver Observación 3.2.1). Consideremos los homomorfismos $\widetilde{L}^k : H^k_{dR}(\widetilde{M}) \to H^{k+2}_{dR}(\widetilde{M})$ definidos por

$$\widetilde{L}^k[\widetilde{\alpha}] = [\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\Omega}], \qquad \text{para} \qquad [\widetilde{\alpha}] \in H^k_{dR}(\widetilde{M}).$$

Denotemos por $\mathcal{H}^k(\widetilde{M})$ el espacio de las k-formas armónicas sobre $\widetilde{M}$. Entonces $\mathcal{H}^k(\widetilde{M}) \cong H^k_{dR}(\widetilde{M})$. Bajo esta identificación y usando el hecho de que $\widetilde{\Omega}$ es paralela, se deduce que los homomorfismos $\widetilde{L}^k$ vienen dados por

$$\widetilde{L}^k(\widetilde{\beta}) = \widetilde{\beta} \wedge \widetilde{\Omega}, \qquad \text{para} \qquad \widetilde{\beta} \in \mathcal{H}^k(M).$$

Además, se tiene que (ver [42, 126]):

i) $\widetilde{L}^k$ es inyectiva, si $k \leq m-1$,

ii) $\widetilde{L}^k$ es sobre, si $k \geq m+1$.

Ahora, sea (Φ, η) la estructura cosimpléctica sobre la variedad producto $M = \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = pr_1^*(\widetilde{\Omega}), \qquad \eta = pr_2^*(dt),$$

donde pr_1 y pr_2 son las proyecciones canónicas sobre el primer y segundo factor, respectivamente. El campo de Reeb ξ de M es

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

y, usando los resultados de [73], se sigue que

$$H^k_\xi(M) \cong H^k_{dR}(\widetilde{M}) \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^k(\widetilde{M}) \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{3.15}$$

Por otra parte, denotemos por $L^k : H^k_\xi(M) \to H^{k+2}_\xi(M)$ los homomorfismos dados por

$$L^k[\alpha] = [\alpha \wedge \Phi].$$

Entonces, bajo la identificación (3.15), se tiene que L^k está caracterizada por

$$L^k(\widetilde{\alpha} \otimes f) = (\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\Omega}) \otimes f, \quad \text{para} \quad \widetilde{\alpha} \in \mathcal{H}^k(\widetilde{M}) \text{ y } f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{3.16}$$

Así:

i) L^k es inyectiva, si $k \leq m-1$,

ii) L^k es sobre, si $k \geq m+1$.

Por tanto, si $k \leq m$, usando el Teorema 3.2.6 se sigue que

$$\begin{aligned} H^k_{LJ}(M) &\cong \frac{H^k_\xi(M)}{ImL^{k-2}} \oplus \frac{H^{k-1}_\xi(M)}{ImL^{k-3}} \cong \\ &(\frac{H^k_{dR}(\widetilde{M})}{Im\widetilde{L}^{k-2}} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus (\frac{H^{k-1}_{dR}(\widetilde{M})}{Im\widetilde{L}^{k-3}} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $k \geq m+1$. Entonces, de (3.16), se deduce que

$$ker\overline{L}^{k-1} \cong ((ker\widetilde{L}^{k-1}) \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus ((ker\widetilde{L}^{k-2}) \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})).$$

Nota que

$$ker\widetilde{L}^r \cong \{\widetilde{\alpha} \in \mathcal{H}^r(\widetilde{M}) / \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\Omega} = 0\}.$$

Bajo las identificaciones anteriores podemos definir la aplicación lineal $s^k : ker\overline{L}^{k-1} \to H^k_{LJ}(M)$ caracterizada por

$$s^k(\widetilde{\alpha} \otimes f, \widetilde{\beta} \otimes g) = [(0, F^{k-1}(f\widetilde{\alpha}, g\widetilde{\beta}))],$$

para $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{H}^{k-1}(\widetilde{M})$, $\widetilde{\beta} \in \mathcal{H}^{k-2}(\widetilde{M})$ y $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Un cálculo directo prueba que

$$\overline{G}_*^k \circ s^k = Id.$$

Entonces $H_{LJ}^k(M) \cong Ker\overline{L}^{k-1} \oplus H_\xi^k(M) \oplus \dfrac{H_\xi^{k-1}}{Im\overline{L}^{k-2}}$.

Por tanto, usando el Teorema 3.2.6, concluimos que

$$\begin{aligned}
H_{LJ}^k(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{k-1} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus (ker\widetilde{L}^{k-2} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})), k \geq m+4 \\
H_{LJ}^{m+3}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{m+2} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus (ker\widetilde{L}^{m+1} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\
&\quad \oplus (\frac{H_{dR}^{m+2}(M)}{Im\widetilde{L}^m} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\
H_{LJ}^{m+2}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{m+1} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus (ker\widetilde{L}^{m} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\
&\quad \oplus (\frac{H_{dR}^{m+2}(M)}{Im\widetilde{L}^m} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus (\frac{H_{dR}^{m+1}(M)}{Im\widetilde{L}^{m-1}} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\
H_{LJ}^{m+1}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{m} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \oplus (\frac{H_{dR}^{m+1}(M)}{Im\widetilde{L}^{m+1}} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\
&\quad \oplus (\frac{H_{dR}^{m}(M)}{Im\widetilde{L}^{m-2}} \otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

3.2.3 Estructuras de Lie-Poisson

Sea (M, Λ) una *variedad de Poisson exacta*, es decir, una variedad M sobre la que existe un campo de vectores X, tal que

$$\Lambda = d_\Lambda X = -[X, \Lambda].$$

En [80], Lichnerowicz probó que, para este tipo de variedades se tiene

$$H_{LJ}^k(M) \cong H_{LP}^k(M) \oplus H_{LP}^{k-1}(M),$$

para todo k.

Supongamos ahora, que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real de dimensión n y consideramos la estructura de Lie-Poisson $\bar{\Lambda}$ sobre $\mathfrak{g}^*$ (ver la Sección 1.1.2). Usando (1.9), deducimos que $(\mathfrak{g}^*, \bar{\Lambda})$ es una variedad de Poisson exacta. Por lo tanto,

$$H_{LJ}^k(\mathfrak{g}^*) \cong H_{LP}^k(\mathfrak{g}^*) \oplus H_{LP}^{k-1}(\mathfrak{g}^*). \tag{3.17}$$

Por otra parte, si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto, en [40] se prueba que

$$H^k_{LP}(\mathfrak{g}^*) \cong H^k(\mathfrak{g}) \otimes Inv, \tag{3.18}$$

donde Inv es el álgebra de las *funciones Casimires* sobre $\mathfrak{g}^*$, es decir,

$$Inv = \{f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})/X_f = 0\}.$$

Por tanto, de (3.17) y (3.18), concluimos que, para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto, se tiene lo siguiente

$$H^k_{LJ}(\mathfrak{g}^*) \cong (H^k(\mathfrak{g}) \otimes Inv) \oplus (H^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes Inv). \tag{3.19}$$

3.2.4 Una estructura de Poisson cuadrática

Sea Λ la estructura de Poisson cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\Lambda = xy\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

donde (x, y) son las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$.
La restricción de Λ al subconjunto abierto

$$\mathbb{R}^2 - (\{(x,0)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y)/y \in \mathbb{R}\})$$

define una estructura simpléctica y los puntos $(x,0), (0,y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$, son puntos singulares. Además, $(\mathbb{R}^2, \Lambda)$ no es una variedad de Poisson exacta y tenemos (ver [99])

$$H^0_{LP}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \cong \mathbb{R},\ H^1_{LP}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \cong \mathbb{R}^2,\ H^2_{LP}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \cong \mathbb{R}^2. \tag{3.20}$$

Usando estos hechos y (3.4) se deduce

$$\begin{aligned} &H^0_{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \cong \mathbb{R}, && H^1_{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \cong \mathbb{R}^2, \\ &H^2_{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \cong \mathbb{R}^3, && H^3_{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \cong \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3 Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de contacto

En esta sección estudiaremos la LJ-cohomología de una variedad de contacto. Primeramente, obtendremos un resultado general para variedades de Jacobi, que relaciona la cohomología de De Rham y la LJ-cohomología.
Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi. Denotamos por $\#_\Lambda : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^k(M)$ el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por (1.25) y (1.26). Entonces, se tiene (ver [72] y [73])

$$\begin{aligned} &-[\Lambda, \#_\Lambda(\alpha)] + kE \wedge \#_\Lambda(\alpha) = -\#_\Lambda(d\alpha) + \#_\Lambda(i(E)\alpha) \wedge \Lambda, \\ &\mathcal{L}_E(\#_\Lambda(\alpha)) = \#_\Lambda(\mathcal{L}_E \alpha), \end{aligned} \tag{3.22}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$. Usando (1.1), (1.56) y (3.22), se deduce el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1 *Sea (M, Λ, E) una variedad de Jacobi y $\widetilde{F}^k : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos definido por*

$$\widetilde{F}^k(\alpha, \beta) = (\#_\Lambda(\alpha) + E \wedge \#_\Lambda(\beta), -\#_\Lambda(i(E)\alpha) + E \wedge \#_\Lambda(i(E)\beta)) \tag{3.23}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$. Entonces, los homomorfismos $\widetilde{F}^k$ inducen un homomorfismo de complejos

$$\widetilde{F} : (\Omega^*(M), -d) \oplus (\Omega^{*-1}(M), d) \to (\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), d_{(\Lambda, E)}).$$

Así, si $H^*_{dR}(M)$ es la cohomología de De Rham de M, tenemos el correspondiente homomorfismo en cohomología

$$\widetilde{F} : H^*_{dR}(M) \oplus H^{*-1}_{dR}(M) \to H^*_{LJ}(M).$$

Ahora, sea (M, η) una variedad de contacto y (Λ, E) su estructura de Jacobi asociada. El isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ definido en (1.11) puede ser extendido a una aplicación, que también denotamos por

$\flat$, del espacio de los k-vectores $\mathcal{V}^k(M)$ en el espacio de las k-formas $\Omega^k(M)$ de la siguiente manera

$$\flat(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) = \flat(X_1) \wedge \ldots \wedge \flat(X_k),$$

para $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Esta extensión también es un isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos. De hecho, se tiene que

$$\#_\Lambda(\alpha) = (-1)^k \flat^{-1}(\alpha) + E \wedge \#_\Lambda(i(E)(\alpha)), \tag{3.24}$$

para $\alpha \in \Omega^k(M)$ (ver [73]). Además,

Teorema 3.3.2 *Sea (M, η) una variedad de contacto de dimensión $2m+1$. Entonces, el homomorfismo*

$$\widetilde{F}^k : H^k_{dR}(M) \oplus H^{k-1}_{dR}(M) \to H^k_{LJ}(M),$$

descrito en la Proposición 3.3.1, es un isomorfismo para todo k. Así, $H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M) \oplus H^{k-1}_{dR}(M)$.

Demostración. De (3.23) y (3.24) y de la igualdad

$$i(E) \circ \flat = \flat \circ i(\eta),$$

deducimos que el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos, $\widetilde{G}^k : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^k(P, Q) &= ((-1)^k(\flat(P) + \eta \wedge \flat(Q) - \eta \wedge \flat(i(\eta)P)), \\ &\quad (-1)^{k-1}(\flat(i(\eta)P) - \eta \wedge \flat(i(\eta)Q))) \end{aligned}$$

es el homomorfismo inverso de $\widetilde{F}^k : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$. Por tanto, usando la Proposición 3.3.1, concluimos que

$$\widetilde{F} : (\Omega^*(M), -d) \oplus (\Omega^{*-1}(M), d) \to (\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), d_{(\Lambda, E)})$$

es un isomorfismo de complejos.

$\blacksquare$

Observación 3.3.3 En [79], Lichnerowicz probó que la cohomología 1-diferenciable Chevalley-Eilenberg de una variedad de contacto es trivial (comparar este resultado con el Teorema 3.3.2).

3.4 Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad localmente conforme simpléctica

En esta sección, estudiaremos la LJ-cohomología de una variedad l.c.s. Distinguiremos los dos casos siguientes:

i) El caso particular de una variedad globalmente conforme simpléctica. Sea (M, Ω) una variedad g.c.s. con 1-forma de Lee ω y sea (Λ, E) la estructura de Jacobi asociada. Entonces, existe una función real C^∞-diferenciable, f, sobre M tal que $\omega = df$ y la 2-forma $\bar{\Omega} = e^{-f}\Omega$ es simpléctica. Denotamos por $\bar{\Lambda}$ el 2-vector de Poisson sobre M asociado con la 2-forma simpléctica $\bar{\Omega}$. Usando (1.3), (1.15) y la Observación 1.2.1 *iv*), se deduce que

$$\Lambda = e^{-f}\bar{\Lambda}, \qquad E = \#_{\bar{\Lambda}}(d(e^{-f})).$$

Así, la estructura de Jacobi (Λ, E) es un cambio conforme de la estructura de Poisson $\bar{\Lambda}$ (ver (3.1)). Por tanto, de (3.6) y del Teorema 3.1.1, obtenemos

Teorema 3.4.1 *Sea (M, Ω) una variedad g.c.s. de tipo finito con 1-forma de Lee $\omega = df$. Entonces,*

$$H^k_{LJ}(M) \cong \frac{H^k_{dR}(M)}{Im\bar{L}^{k-2}} \oplus ker\bar{L}^{k-1},$$

para todo k, donde $H^*_{dR}(M)$ es la cohomología de De Rham de M y $\bar{L}^r : H^r_{dR}(M) \to H^{r+2}_{dR}(M)$ es el homomorfismo definido por

$$\bar{L}^r[\alpha] = [e^{-f}\alpha \wedge \Omega],$$

para todo $[\alpha] \in H^r_{dR}(M)$.

Ejemplo 3.4.2 Sea (N, η) una variedad de contacto de tipo finito. Consideramos sobre la variedad producto $M = N \times \mathbb{R}$ la 2-forma Ω dada por

$$\Omega = (pr_1)^*(d\eta) - (pr_2)^*(dt) \wedge (pr_1)^*(\eta), \tag{3.25}$$

donde t es la coordenada usual sobre $\mathbb{R}$ y (pr_i) $(i = 1, 2)$ son las proyecciones canónicas de M sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Entonces (M, Ω) es una variedad g.c.s. con 1-forma de Lee $\omega = (pr_2)^*(dt)$. Además, en este caso, la 2-forma simpléctica $\bar{\Omega} = e^{-t}\Omega$ es exacta, lo que implica que el homomorfismo $\bar{L}^r$ es nulo, para todo r. Consecuentemente, usando el Teorema 3.4.1, se tiene que

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M) \oplus H^{k-1}_{dR}(M) \cong H^k_{dR}(N) \oplus H^{k-1}_{dR}(N).$$

ii) EL CASO GENERAL. Ahora, estudiaremos la LJ-cohomología de una variedad l.c.s. arbitraria. Primero, obtendremos algunos resultados sobre la cohomología definida por una 1-forma cerrada sobre una variedad diferenciable arbitraria (ver Ejemplos 2.1.2 *i*)).
Sea M una variedad diferenciable y ω una 1-forma cerrada sobre M.
Denotamos por d_ω el operador de cohomología definido en (2.4) y por $H^*_\omega(M)$ la cohomología del complejo $(\Omega^*(M), d_\omega)$.

Proposición 3.4.3 *Sea M una variedad diferenciable y ω una 1-forma cerrada sobre M. Entonces:*
i) El complejo diferencial $(\Omega^*(M), d_\omega)$ es elíptico. Por tanto, si M es compacta, los grupos de cohomología $H^k_\omega(M)$ tienen dimensión finita.
ii) Si ω es exacta y f es una función real C^∞-diferenciable, tal que $\omega = df$, entonces la aplicación

$$H^k_{dR}(M) \to H^k_\omega(M), \quad [\alpha] \mapsto [e^{-f}\alpha],$$

es un isomorfismo. Por tanto, $H^k_\omega(M) \cong H^k_{dR}(M)$.

Demostración. *i)* Es fácil comprobar que los operadores diferenciales d y d_ω tienen el mismo símbolo, lo que implica que el complejo $(\Omega^*(M), d_\omega)$ es elíptico.
ii) Un cálculo directo prueba este resultado.

■

Si la 1-forma ω no es exacta entonces, en general,

$$H^*_\omega(M) \ncong H^*_{dR}(M).$$

De hecho, probaremos que si M es compacta y ω es no nula y paralela con respecto a una métrica Riemanniana sobre M, entonces la cohomología $H^*_\omega(M)$ es trivial. Primeramente, recordaremos algunos resultados probados por Guédira y Lichnerowicz [45] que nos serán útiles.
Supongamos que M es una variedad diferenciable compacta de dimensión n, que ω es una 1-forma cerrada sobre M y que g es una métrica Riemanniana. Consideramos el campo de vectores U sobre M caracterizado por la condición

$$\omega(X) = g(X, U),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Denotamos por δ el operador codiferencial dado por (ver [42])

$$\delta\alpha = (-1)^{nk+n+1}(\star \circ d \circ \star)(\alpha), \tag{3.26}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$, siendo $\star$ el isomorfismo de Hodge. Entonces, definimos el operador $\delta_\omega : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ por (ver [45])

$$\delta_\omega = \delta + i(U), \tag{3.27}$$

donde $i(U)$ es la contracción por el campo de vectores U, es decir (ver [42]),

$$i(U)(\alpha) = (-1)^{nk+n} \star (\omega \wedge \star\alpha), \tag{3.28}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$.
Ahora, consideramos el producto escalar estándar $<\ ,\ >$ sobre el espacio $\Omega^k(M)$

$$<\ ,\ >: \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto <\alpha, \beta> = \int_M \alpha \wedge (\star\beta).$$

Entonces, es fácil probar que (ver [45])

$$< d_\omega\alpha, \beta > = < \alpha, \delta_\omega\beta >,$$

para $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$.

Así, como M es compacta y el complejo $(\Omega^*(M), d_\omega)$ es elíptico, obtenemos una descomposición del espacio $\Omega^k(M)$ como sigue

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k_\omega(M) \oplus d_\omega(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta_\omega(\Omega^{k+1}(M)), \tag{3.29}$$

donde $\mathcal{H}^k_\omega(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M)/d_\omega(\alpha) = 0, \delta_\omega(\alpha) = 0\}$ (ver [45]).
De (3.29), se sigue que

$$H^k_\omega(M) \cong \mathcal{H}^k_\omega(M). \tag{3.30}$$

Ahora, probaremos el resultado enunciado anteriormente sobre la trivialidad de la cohomología $H^*_\omega(M)$.

Teorema 3.4.4 *Sea M una variedad diferenciable compacta y ω una 1-forma cerrada sobre M, $\omega \neq 0$. Supongamos que g es una métrica Riemanniana sobre M tal que ω es paralela con respecto a g. Entonces, la cohomología $H^*_\omega(M)$ es trivial.*

Demostración. Como ω es paralela y no nula, se sigue que $\|\omega\| = c$, con c una constante estrictamente positiva. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $c = 1$. Nótese que si $c \neq 1$, se puede considerar la métrica Riemanniana $g' = c^2 g$ y es claro que el módulo de ω respecto a g' es 1 y que ω es también paralela con respecto a g'.
Bajo la hipótesis $c = 1$, tenemos que

$$\omega(U) = 1. \tag{3.31}$$

Usando que ω es paralela y que U es Killing, obtenemos que (ver (3.26), (3.28) y [42])

$$\mathcal{L}_U = -\delta \circ e(\omega) - e(\omega) \circ \delta, \tag{3.32}$$

$$\delta \circ \mathcal{L}_U = \mathcal{L}_U \circ \delta, \tag{3.33}$$

donde $e(\omega) : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ es el operador dado por

$$e(\omega)(\alpha) = \omega \wedge \alpha, \tag{3.34}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$.

De (2.4), (3.26), (3.27), (3.28), (3.31), (3.33) y (3.34), deducimos las siguientes relaciones

$$d_\omega \circ i(U) = -i(U) \circ d_\omega + \mathcal{L}_U + Id, \quad \delta_\omega \circ i(U) = -i(U) \circ \delta_\omega, \tag{3.35}$$

$$d_\omega \circ \mathcal{L}_U = \mathcal{L}_U \circ d_\omega, \quad \delta_\omega \circ \mathcal{L}_U = \mathcal{L}_U \circ \delta_\omega, \tag{3.36}$$

donde Id denota la transformación identidad.
Por otro lado, (3.32) implica que

$$\begin{aligned} < \mathcal{L}_U\alpha, \alpha > &= - < \alpha, di(U)\alpha + i(U)d\alpha > \\ &= - < \alpha, \mathcal{L}_U\alpha > \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$. Así,

$$< \mathcal{L}_U\alpha, \alpha >= 0. \tag{3.37}$$

Ahora, si $\alpha \in \mathcal{H}^k_\omega(M)$, entonces, usando (3.35), obtenemos que

$$\mathcal{L}_U\alpha = -\alpha + d_\omega(i(U)\alpha).$$

Pero, por (3.36), deducimos que $\mathcal{L}_U\alpha \in \mathcal{H}^k_\omega(M)$. Por tanto (ver (3.29)), obtenemos que

$$\mathcal{L}_U\alpha = -\alpha.$$

Consecuentemente, de (3.37), se sigue que $\alpha = 0$.
Esto prueba que $\mathcal{H}^k_\omega(M) = \{0\}$, lo que implica que $H^k_\omega(M) = \{0\}$ (ver (3.30)).

■

Ahora, obtendremos algunos resultados que relacionan la LJ-cohomología de una variedad l.c.s. M con su cohomología de De Rham y con la cohomología $H^*_\omega(M)$, siendo ω la 1-forma de Lee de M.
Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee ω. Supongamos que (Λ, E) es la estructura de Jacobi asociada a M. El isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos $\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ definido en (1.16) puede ser extendido a una aplicación, que también denotamos por $\flat$, desde el espacio $\mathcal{V}^k(M)$ sobre el espacio $\Omega^k(M)$ de la siguiente forma

$$\flat(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) = \flat(X_1) \wedge \ldots \wedge \flat(X_k)$$

para todo $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Esta extensión es también un isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos. En realidad, se tiene que (ver [73])

$$\#_\Lambda(\alpha) = (-1)^k \flat^{-1}(\alpha) \tag{3.38}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$, donde $\#_\Lambda : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^k(M)$ es el homomorfismo dado en (1.25) y (1.26).
Usando (1.15), (1.25), (1.26) y que $\#_\Lambda(\omega) = -E$, obtenemos

$$\#_\Lambda \circ i(E) = i(\omega) \circ \#_\Lambda, \quad i(E) \circ \flat = -\flat \circ i(\omega). \tag{3.39}$$

Así, de (3.22), (3.38) y (3.39), deducimos que

$$-\flat([\Lambda, P]) + k\omega \wedge \flat(P) = d(\flat(P)) - i(E)(\flat(P)) \wedge \Omega, \quad \mathcal{L}_E \flat(P) = \flat(\mathcal{L}_E P) \tag{3.40}$$

para todo $P \in \mathcal{V}^k(M)$.
Además, probamos el siguiente resultado.

Teorema 3.4.5 *Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee ω. Supongamos que (Λ, E) es la estructura de Jacobi asociada sobre M y que $\bar{F}^k : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ y $\bar{G}^k : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ son los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos definidos por*

$$\bar{F}^k(\alpha) = (\#_\Lambda \alpha, -\#_\Lambda(i(E)\alpha)) \quad y \quad \bar{G}^k(P, Q) = (-1)^k(-\flat(Q) + i(E)\flat(P))$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $(P, Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$. Entonces:
i) Las aplicaciones $\bar{F}^k$ y $\bar{G}^k$ inducen una sucesión exacta de complejos

$$0 \to (\Omega^*(M), d) \xrightarrow{\bar{F}} (\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), -d_{(\Lambda,E)}) \xrightarrow{\bar{G}} (\Omega^{*-1}(M), -d_\omega) \to 0,$$

donde d es la diferencial exterior, $d_{(\Lambda,E)}$ es el operador de la LJ-cohomología y d_ω es el operador dado en (2.4).
ii) Esta sucesión exacta induce una sucesión larga exacta de cohomología

$$\ldots \xrightarrow{L^{k-2}} H^k_{dR}(M) \xrightarrow{\bar{F}^k_*} H^k_{LJ}(M) \xrightarrow{\bar{G}^k_*} H^{k-1}_\omega(M) \xrightarrow{L^{k-1}} H^{k+1}_{dR}(M) \xrightarrow{\bar{F}^{k+1}_*} \ldots,$$

donde el homomorfismo conector $L^{k-1} : H^{k-1}_\omega(M) \to H^{k+1}_{dR}(M)$ está definido por

$$L^{k-1}([\alpha]) = [\alpha \wedge \Omega]$$

para todo $[\alpha] \in H^{k-1}_\omega(M)$.

Demostración. Se sigue de (1.15), (1.56), (2.4), (3.22), (3.38), (3.39) y (3.40). ■

Usando el Teorema 3.4.5, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.4.6 *Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. de tipo finito con 1-forma de Lee ω. Supongamos que la dimensión del k-ésimo grupo de cohomología $H^k_\omega(M)$ es finita, para todo k. Entonces,*

$$H^k_{LJ}(M) \cong \frac{H^k_{dR}(M)}{ImL^{k-2}} \oplus kerL^{k-1},$$

donde $L^r : H^r_\omega(M) \to H^{r+2}_{dR}(M)$ es el homomorfismo dado por

$$L^r([\alpha]) = [\alpha \wedge \Omega],$$

para $[\alpha] \in H^r_\omega(M)$. En particular, la dimensión de $H^k_{LJ}(M)$ es finita.

Observación 3.4.7 El Teorema 3.4.1 se obtiene directamente de la Proposición 3.4.3 y del Corolario 3.4.6.

Usando el Teorema 3.4.4 y el Corolario 3.4.6, deducimos además, los siguientes resultados.

Corolario 3.4.8 *Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. de tipo finito con 1-forma de Lee ω, y tal que la dimensión del k-ésimo grupo de cohomología $H^k_\omega(M)$ es finita, para todo k. Si la 2-forma Ω es $d_{(-\omega)}$-exacta, es decir, existe una 1-forma η sobre M, tal que $\Omega = d\eta - \omega \wedge \eta$, entonces,*

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M) \oplus H^{k-1}_\omega(M), \qquad \textit{para todo } k.$$

Corolario 3.4.9 *Sea (M, Ω) una variedad compacta l.c.s. con 1-forma de Lee ω, $\omega \neq 0$. Supongamos que g es una métrica Riemanniana sobre M tal que ω es paralela respecto a g. Entonces,*

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M), \qquad \textit{para todo } k.$$

Ejemplo 3.4.10 Sea (N, η) una variedad de contacto compacta y consideramos sobre la variedad producto $M = N \times S^1$ la 2-forma Ω definida por

$$\Omega = (pr_1)^*(d\eta) - (pr_2)^*(\theta) \wedge (pr_1)^*(\eta), \tag{3.41}$$

siendo θ el elemento de longitud de S^1. Entonces, (M, Ω) es una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee $\omega = (pr_2)^*(\theta)$. Además, si h es una métrica Riemanniana sobre N, la 1-forma ω es paralela respecto a la métrica Riemanniana g sobre M dada por

$$g = (pr_1)^*(h) + \omega \otimes \omega.$$

Así, usando el Corolario 3.4.9, deducimos que

$$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M) \cong H^k_{dR}(N) \oplus H^{k-1}_{dR}(N).$$

3.5 Cohomología de Lichnerowicz-Jacobi de la esfera unidad de un álgebra de Lie real

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real de dimensión n dotada de un producto escalar, $< \ , \ >$, entonces la esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ admite una estructura de Jacobi (ver la Sección 1.1.2, Ejemplo 2c)). En esta sección, describiremos la LJ-cohomología de $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ para el caso en el que $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto.
Primeramente, probaremos algunos resultados que nos serán útiles en lo sucesivo.

Lema 3.5.1 *Si $\xi \in \mathfrak{g}$ y $\widetilde{\xi} : S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real C^∞-diferenciable dada por*

$$\widetilde{\xi}(\eta, t) = e^t < \xi, \eta > \tag{3.42}$$

para todo $(\eta, t) \in S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\xi}) = \widetilde{\xi}. \tag{3.43}$$

Además, si $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es una base de $\mathfrak{g}$, se tiene que $\{d\widetilde{\xi}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es una base global del espacio de las 1-formas sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$.

Demostración. (3.43) se obtiene directamente de (3.42).
Por otra parte, sea $F : \mathfrak{g} - \{0\} \to S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$ el difeomorfismo definido en (1.30). Entonces, deducimos que

$$\widetilde{\xi} \circ F = < \xi, \ >$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, donde $< \xi, \ >: \mathfrak{g} - \{0\} \to \mathbb{R}$ es la función real dada por

$$< \xi, \ > (\eta) = < \xi, \eta >,$$

para todo $\eta \in \mathfrak{g} - \{0\}$. Esto prueba la segunda afirmación de este Lema.

■

Usando el Lema 3.5.1, obtenemos

Lema 3.5.2 *Sea P (respectivamente, Q) un k-vector (respectivamente, un $(k-1)$-vector) sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$. Denotamos por $\widetilde{(P,Q)}$ el k-vector sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$ dado por*

$$\widetilde{(P,Q)} = e^{-kt}(P + \frac{\partial}{\partial t} \wedge Q). \tag{3.44}$$

Si $\mathcal{L}$ es el operador derivada de Lie sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{(P,Q)} = -k\widetilde{(P,Q)}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{(P,Q)}(d\widetilde{\xi}_1, \ldots, d\widetilde{\xi}_k)) = 0 \tag{3.45}$$

para todo $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathfrak{g}$, donde $\widetilde{\xi}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ es la función real C^∞-diferenciable sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$ dada por (3.42).

Ahora describiremos la LJ-cohomología de $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ cuando $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto y $< \ , \ >$ es un producto escalar sobre $\mathfrak{g}$ arbitrario.

Teorema 3.5.3 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto G de dimensión n. Supongamos $< \ , \ >$ un producto escalar sobre $\mathfrak{g}$ y consideramos sobre la esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$, la estructura de Jacobi inducida. Entonces,*

$$H^k_{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H^k(\mathfrak{g}) \otimes Inv,$$

para todo k, donde $H^*(\mathfrak{g})$ es la cohomología de $\mathfrak{g}$ relativa a la representación trivial de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ y Inv es la subálgebra de $C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$ definida por

$$Inv = \{\varphi \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}) / X_f(\varphi) = 0, \ \forall f \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})\}.$$

Demostración. Denotamos por $\overline{Ad}^*$ la acción de G sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ dada por (1.28). Esta acción induce una representación de $\mathfrak{g}$ sobre el espacio vectorial $C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$ dada por

$$(\xi, \varphi) \in \mathfrak{g} \times C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}) \to \xi_{S^{n-1}(\mathfrak{g})}(\varphi) \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}),$$

siendo $\xi_{S^{n-1}(\mathfrak{g})}$ el generador infinitesimal con respecto a la acción $\overline{Ad}^*$, asociado a $\xi \in \mathfrak{g}$. Consideramos entonces el complejo de cohomología definido por esta representación, $(C^*(\mathfrak{g}; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})), \partial)$, y su cohomología $H^*(\mathfrak{g}\,; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}))$ (ver la Sección 1.4.2).

Demostraremos que

$$H^k_{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H^k(\mathfrak{g}; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})),$$

para todo k.

Sea $C^k_{HCE}(S^{n-1}(\mathfrak{g}))$ el espacio de las k-cocadenas en el complejo H-Chevalley-Eilenberg de $S^{n-1}(\mathfrak{g})$. Definimos el homomorfismo

$$\mu^k : C^k_{HCE}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \to C^k(\mathfrak{g}; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}))$$

por

$$(\mu^k(c^k))(\xi_1, \dots, \xi_k) = c^k(< \xi_1, \ >, \dots, < \xi_k, \ >) \tag{3.46}$$

para todo $c^k \in C^k_{HCE}(S^{n-1}(\mathfrak{g}))$ y $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{g}$, donde $< \xi_j, \ >$ $(j = 1, \dots, k)$ es la función real C^∞-diferenciable sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ dada por (1.22).

Ahora, consideramos el homomorfismo de $C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$-módulos

$$\Phi^k : \mathcal{V}^k(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \to C^k(\mathfrak{g}; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}))$$

definido por

$$\Phi^k = \mu^k \circ j^k, \tag{3.47}$$

donde $j^k : \mathcal{V}^k(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \to C^k_{HCE}(S^{n-1}(\mathfrak{g}))$ es la aplicación dada por (1.59).

Un cálculo directo demuestra que

$$\begin{aligned}&(\Phi^k(P,Q))(\xi_1,\dots,\xi_k)(\xi)=P(d<\xi_1,\ >,\dots,d<\xi_k,\ >)(\xi)+\\&\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}<\xi_i,\xi>Q(d<\xi_1,\ >,\dots,\widehat{d<\xi_i,\ >},\dots,d<\xi_k,\ >)(\xi)\\&=((\widetilde{P,Q})(d\widetilde{\xi}_1,\dots,d\widetilde{\xi}_k))(\xi,0),\end{aligned} \tag{3.48}$$

para todo $(P,Q)\in\mathcal{V}^k(S^{n-1}(\mathfrak{g}))\oplus\mathcal{V}^{k-1}(S^{n-1}\mathfrak{g})),\xi_1,\dots,\xi_k\in\mathfrak{g}$ y $\xi\in S^{n-1}(\mathfrak{g})$, donde $(\widetilde{P,Q})$ es el k-vector sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})\times\mathbb{R}$ definido en (3.44) y $\widetilde{\xi}_i$ ($i=1,\dots,k$) es la función sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})\times\mathbb{R}$ dada en (3.42).
Usando (1.23), (1.29), (1.48), (1.58) y (3.46), tenemos que las aplicaciones μ^k inducen un homomorfismo entre los complejos

$$(C^*_{HCE}(S^{n-1}(\mathfrak{g})),\partial_{HCE})\qquad\text{y}\qquad(C^*(\mathfrak{g};C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}),\mathbb{R})),\partial).$$

Así, las aplicaciones Φ^k inducen un homomorfismo entre los complejos (ver (1.60) y (3.47))

$$\mathcal{V}^*(S^{n-1}(\mathfrak{g}))\oplus\mathcal{V}^{*-1}(S^{n-1}(\mathfrak{g})),d_{(\Lambda,E)})\ \text{y}\ (C^*(\mathfrak{g};C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}),\mathbb{R})),\partial).$$

Por otro lado, si $\Phi^k(P,Q)=0$ entonces, usando (3.45), (3.48) y el Lema 3.5.1, se obtiene que

$$0=(\widetilde{P,Q})=e^{-kt}(P+\frac{\partial}{\partial t}\wedge Q).$$

Por tanto, $P=0$ y $Q=0$.
Como consecuencia, la aplicación Φ^k es un monomorfismo.
Ahora, probaremos que Φ^k es también un epimorfismo.
Sea $c^k:\mathfrak{g}\times\dots^{(k}\dots\times\mathfrak{g}\to C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}),\mathbb{R})$ una k-cocadena $C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}),\mathbb{R})$-valuada.
Definimos un k-vector R sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})\times\mathbb{R}$ caracterizado por la condición

$$R(d\widetilde{\xi}_1,\dots,d\widetilde{\xi}_k)(\xi,t)=e^{kt}(c^k(\xi_1,\dots,\xi_k)(\xi)) \tag{3.49}$$

para todos $\xi_1,\dots,\xi_k\in\mathfrak{g}$ y $(\xi,t)\in S^{n-1}(\mathfrak{g})\times\mathbb{R}$.

Por el Lema 3.5.1, deducimos que R está bien definido y, usando (3.43) y (3.49), obtenemos que

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} R = 0.$$

Esto implica que

$$R = P + \frac{\partial}{\partial t} \wedge Q, \tag{3.50}$$

con $(P, Q) \in \mathcal{V}^k(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(S^{n-1}(\mathfrak{g}))$.
Además, de (3.44), (3.48), (3.49) y (3.50), deducimos que

$$\Phi^k(P, Q) = c^k.$$

Por tanto, Φ^k es un epimorfismo.
Usando estos resultados, concluimos que

$$H^k_{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H^k(\mathfrak{g}; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})),$$

para todo k.
Ahora, si aplicamos un resultado general de Ginzburg y Weinstein (ver el Teorema 3.5 de [40]; ver también [28]), obtenemos que

$$H^k(\mathfrak{g}; C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})) \cong H^k(\mathfrak{g}) \otimes \overline{Inv}$$

donde $\overline{Inv}$ es el álgebra de las funciones G-invariantes sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ con respecto de la acción $\overline{Ad}^*$.
Finalmente, de (1.29) y como la foliación característica de $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ está generada por el conjunto de campos de vectores hamiltonianos

$$\{X_{<\xi,\,>} / \xi \in \mathfrak{g}\},$$

deducimos que $\overline{Inv} = Inv$.

■

Es bien conocido que si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie semisimple compacto, entonces $H^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Así, usando el Teorema 3.5.3, tenemos

Corolario 3.5.4 *Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie G semisimple, compacto, de dimensión n. Supongamos que $<\ ,\ >$ es un producto escalar sobre $\mathfrak{g}$ y consideramos sobre la esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ la estructura de Jacobi inducida. Entonces,*

$$H^2_{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) = \{0\}.$$

3.6 Tabla resumen: cohomología de Lichnerowicz-Jacobi

En las siguientes tablas se hace un resumen de los principales resultados obtenidos a lo largo de las Secciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 sobre la LJ-cohomología de los diferentes tipos de variedades de Jacobi.

LJ-cohomología de variedades de Poisson

TIPO	LJ-COHOMOLOGIA	OBSERVACIONES
(M,Ω) simpléctica de tipo finito	$H^k_{LJ}(M) \cong \dfrac{H^k_{dR}(M)}{ImL^{k-2}} \oplus kerL^{k-1}$	$L^r: \quad H^r_{dR}(M) \to H^{r+2}_{dR}(M)$ $[\alpha] \mapsto [\alpha \wedge \Omega]$
M simpléctica exacta de tipo finito	$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M) \oplus H^{k-1}_{dR}(M)$	$dimH^k_{LJ}(M) = b_k(M) + b_{k-1}(M)$
M^{2m} simpléctica Lefschetz de tipo finito	$H^k_{LJ}(M) \cong \dfrac{H^k_{dR}(M)}{ImL^{k-2}},\ \ k \leq m$ $H^k_{LJ}(M) \cong kerL^{k-1},\ \ k \geq m+1$	$dimH^k_{LJ}(M)$=$b_k(M)$-$b_{k-2}(M)$ $k \leq m$ $dimH^k_{LJ}(M)$=$b_{k-1}(M)$-$b_{k+1}(M)$ $k \geq m+1$
$M = \Gamma\backslash G$ nilvariedad simpléctica compacta	$H^k_{LJ}(M)\cong\dfrac{H^k(\mathfrak{g})}{Im(L_{\mathfrak{g}})^{k-2}}\oplus ker(L_{\mathfrak{g}})^{k-1}$	$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de G $\widetilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ forma simpléctica inducida $(L_{\mathfrak{g}})^r: \quad H^r(\mathfrak{g}) \to H^{r+2}(\mathfrak{g})$ $[\alpha] \mapsto [\alpha \wedge \widetilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}]$

LJ-cohomología de variedades de Poisson (continuación)

TIPO	LJ-COHOMOLOGIA	OBSERVACIONES
(M,Φ,η) cosimpléctica con campo de Reeb ξ	$\to H^k_\xi(M)\oplus H^{k-1}_\xi(M) \overset{\overline{F}^k_*}{\to} H^k_{LJ}(M) \overset{\overline{G}^k_*}{\to} H^{k-1}_\xi(M)\oplus H^{k-2}_\xi(M) \to \dots$ sucesión exacta	$\overline{F}^k_*([\alpha],[\beta]) = [(\#_\Lambda\alpha+\xi\wedge\#_\Lambda\beta,0)]$ $\overline{G}^k_*([(P,Q)]) = (-1)^k([\flat(P)- \eta\wedge i(\xi)\flat(P)],-[i(\xi)\flat(P)])$ $\overline{L}^k_*([\alpha],[\beta]) = ([\alpha\wedge\Phi],[\beta\wedge\Phi])$
$M=\widetilde{M}\times\mathbb{R}$ $\widetilde{M}$ compacta Kähler con 2-forma de Kähler $\widetilde{\Omega}$ $dim\widetilde{M}=2m$	$H^k_{LJ}(M)\cong (ker\widetilde{L}^{k-1}\otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ $\oplus(ker\widetilde{L}^{k-2}\otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))\oplus$ $(\frac{H^k_{dR}(M)}{Im\widetilde{L}^{k-2}}\otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ $\oplus(\frac{H^{k-1}_{dR}(M)}{Im\widetilde{L}^{k-3}}\otimes C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$	$\widetilde{L}^k : H^k_{dR}(\widetilde{M})\to H^{k+2}_{dR}(\widetilde{M})$ $[\widetilde{\alpha}]\mapsto[\widetilde{\alpha}\wedge\widetilde{\Omega}]$ $\widetilde{L}^k$ es inyectiva si $k\le m-1$ $\widetilde{L}^k$ es sobre si $k\ge m+1$
Dual de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ de dimensión finita	$H^k_{LJ}(\mathfrak{g}^*)\cong H^k_{LP}(\mathfrak{g}^*)\oplus H^{k-1}_{LP}(\mathfrak{g}^*)$	
Dual de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto	$H^k_{LJ}(\mathfrak{g}^*)\cong (H^k(\mathfrak{g})\otimes Inv)\oplus (H^{k-1}(\mathfrak{g})\otimes Inv)$	$Inv\equiv$ subálgebra de las funciones Casimires de $\mathfrak{g}^*$

LJ-cohomología de variedades de Jacobi y no Poisson

TIPO	LJ-COHOMOLOGIA	OBSERVACIONES
M contacto	$H^k_{LJ}(M)\cong H^k_{dR}(M)\oplus H^{k-1}_{dR}(M)$	
(M,Ω) g.c.s. de tipo finito con 1-forma de Lee $\omega=df$	$H^k_{LJ}(M)\cong\frac{H^k_{dR}(M)}{Im\bar{L}^{k-2}}\oplus ker\bar{L}^{k-1}$	$\bar{L}^r:\ H^r_{dR}(M)\to H^{r+2}_{dR}(M)$ $[\alpha]\mapsto[e^{-f}\alpha\wedge\Omega]$

LJ-cohomología de variedades de Jacobi y no de Poisson (continuación)

TIPO	LJ-COHOMOLOGIA	OBSERVACIONES
(M, Ω) l.c.s. de tipo finito con 1-forma de Lee ω y $dim H^*_\omega(M) < \infty$	$H^k_{LJ}(M) \cong \frac{H^k_{dR}(M)}{ImL^{k-2}} \oplus kerL^{k-1}$	$L^r: \quad H^r_\omega(M) \to H^{r+2}_{dR}(M)$ $[\alpha] \mapsto [\alpha \wedge \Omega]$
M l.c.s. compacta con 1-forma de Lee ω paralela con respecto a una métrica Riemanniana	$H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M)$	$dim H^k_{LJ}(M) = b_k(M)$
Esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto ($dim\mathfrak{g} = n$)	$H^k_{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H^k(\mathfrak{g}) \otimes Inv$	$Inv \equiv$subálgebra de las funciones constantes sobre las hojas de la foliación característica

CAPÍTULO 4

Homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Jacobi

De forma similar a como se hizo en el capítulo anterior con la cohomología, en este capítulo haremos un cálculo explícito de la homología de Lichnerowicz-Jacobi de diferentes ejemplos de variedades de Jacobi. También estudiaremos ciertas propiedades de carácter general que satisface esta homología.

4.1 Homología de Lichnerowicz-Jacobi y cambios conformes de estructuras de Jacobi

Demostraremos a continuación que la LJ-homología de una variedad de Jacobi también es invariante por cambios conformes.

Teorema 4.1.1 *Sea* (M, Λ, E) *una variedad de Jacobi y* (Λ_a, E_a) *un cambio conforme de la estructura de Jacobi* (Λ, E)*. Entonces*

$$H_k^{LJ}(M, \Lambda, E) \cong H_k^{LJ}(M, \Lambda_a, E_a),$$

para todo k*. Por tanto, la LJ-homología es invariante bajo cambios conformes de la estructura de Jacobi.*

Demostración. Consideramos el isomorfismo de fibrados vectoriales $\phi : T^*M \times \mathbb{R} \to T^*M \times \mathbb{R}$ dado en (3.2). Como ya vimos en la demostración del Teorema 3.1.1, este isomorfismo de fibrados define un isomorfismo de algebroides de Lie entre $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda,E)})$ y $(T^*M \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda_a,E_a)}, \widetilde{\#}_{(\Lambda_a,E_a)})$.
De (1.35), (1.51) y (3.3), obtenemos que

$$\phi_{n+1}(0, \Phi) = (0, \frac{1}{a^{n+1}}\Phi), \tag{4.1}$$

para $\Phi \in \Omega^n(M)$, donde n es la dimensión de M y $\phi_{n+1} : \Gamma(\wedge^{n+1}(T^*M \times \mathbb{R})) \to \Gamma(\wedge^{n+1}(T^*M \times \mathbb{R}))$ es el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos inducido por ϕ.
Por otro lado, si $\nabla^{(\Lambda,E)}$ (respectivamente, $\nabla^{(\Lambda_a,E_a)}$) es la $(T^*M \times \mathbb{R})$-conexión llana sobre $\wedge^{n+1}(T^*M \times \mathbb{R}) \to M$ definida por (1.69) y asociada a la estructura de Jacobi (Λ, E) (respectivamente, (Λ_a, E_a)), entonces, usando (1.69), (3.3), (4.1) y el hecho de que

$$i(\#_\Lambda(\alpha))\Phi = -\alpha \wedge i(\Lambda)\Phi,$$

probamos que

$$\phi_{n+1}(\nabla^{(\Lambda,E)}_{(\alpha,f)}(0,\Phi)) = \nabla^{(\Lambda_a,E_a)}_{\phi_1(\alpha,f)}\phi_{n+1}(0,\Phi),$$

para todo $(\alpha, f) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $\Phi \in \Omega^n(M)$.
Consecuentemente, el resultado se deduce usando la Proposición 1.4.6.

■

4.2 Homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de Poisson

Sea (M, Λ) una variedad de Poisson y $\delta^{(\Lambda,0)}$ (respectivamente, δ^Λ) el operador de la LJ-homología (respectivamente, de la homología canónica) asociado a M. Entonces

$$\begin{aligned} \delta^\Lambda\alpha &= i(\Lambda)d\alpha - di(\Lambda)\alpha \\ \delta^{(\Lambda,0)}(\alpha,\beta) &= (\delta^\Lambda\alpha, \delta^\Lambda\beta + (-1)^k i(\Lambda)\alpha) \end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ (ver (1.68) y (1.70)).
Usando (4.2), obtenemos la siguiente relación entre la LJ-homología $H_*^{LJ}(M)$ y la homología canónica $H_*^{can}(M)$.

Teorema 4.2.1 *Sea* (M,Λ) *una variedad de Poisson. Supongamos que* $(0,Id_k)$: $\Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ *y* $(\pi_1)_k : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$ *son los homomorfismos de* $C^\infty(M,\mathbb{R})$*-módulos dados por*

$$(0, Id_k)(\beta) = (0, \beta), \quad (\pi_1)_k(\alpha, \beta) = \alpha$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ *y* $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$*. Entonces:*

(i) *Las aplicaciones* $(0, Id_k)$ *y* $(\pi_1)_k$ *definen una sucesión exacta de complejos*

$$0 \to (\Omega^{*-1}(M), \delta^\Lambda) \stackrel{(0,Id)}{\to} (\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M), \delta^{(\Lambda,0)}) \stackrel{\pi_1}{\to} (\Omega^*(M), \delta^\Lambda) \to 0$$

(ii) *La sucesión exacta anterior induce una sucesión exacta larga de homología*

$$\ldots \to H_{k-1}^{can}(M) \stackrel{(0,Id_k)_*}{\to} H_k^{LJ}(M) \stackrel{((\pi_1)_k)_*}{\to} H_k^{can}(M) \stackrel{\Lambda_k}{\to} H_{k-2}^{can}(M) \to \ldots$$

donde el homomorfismo conector Λ_k *está definido por*

$$\Lambda_k[\alpha] = (-1)^k[i(\Lambda)(\alpha)] \tag{4.3}$$

para todo $[\alpha] \in H_k^{can}(M)$.

Del Teorema 4.2.1, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 4.2.2 *Sea* M *una variedad de Poisson tal que sus grupos de homología canónica tienen dimensión finita. Entonces, los grupos de la LJ-homología también tienen dimensión finita y*

$$H_k^{LJ}(M) \cong \frac{H_{k-1}^{can}(M)}{Im\Lambda_{k+1}} \oplus ker\Lambda_k,$$

donde $\Lambda_r : H_r^{can}(M) \to H_{r-2}^{can}(M)$ *es el homomorfismo dado por (4.3).*

A continuación, obtendremos una relación explícita entre la LJ-homología y la LJ-cohomología para los casos particulares de estructuras simplécticas, cosimplécticas y de Lie-Poisson.

4.2.1 Estructuras simplécticas

Sea (M, Ω) una variedad simpléctica de dimensión $2m$. Si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, se sigue que $\mathcal{L}_{X_f}\Omega = 0$ lo que implica que

$$\mathcal{L}_{X_f}(\Omega \wedge \ldots^{(m} \ldots \wedge \Omega) = 0.$$

Así, M es una variedad de Poisson unimodular (ver [124]). Usando este hecho, (3.6), el Teorema 1.4.11 y la Observación 1.4.12, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3 *Sea (M, Ω) una variedad simpléctica de dimensión $2m$. Entonces*

$$H_k^{LJ}(M) \cong H_{LJ}^{2m-k+1}(M)$$

para todo k. Además, si M es de tipo finito, tenemos

$$H_k^{LJ}(M) \cong \frac{H_{dR}^{2m-k+1}(M)}{ImL^{2m-k-1}} \oplus kerL^{2m-k}, \tag{4.4}$$

donde $H_{dR}^*(M)$ es la cohomología de De Rham de M y $L^r : H_{dR}^r(M) \to H_{dR}^{r+2}(M)$ es el homomorfismo dado en (3.5).

A continuación aplicaremos los resultados anteriores a algunos ejemplos de variedades simplécticas.

Variedades simplécticas exactas. Si Ω es una 2-forma exacta, entonces los homomorfismos L^k son nulos. Por tanto, de (4.4), se obtiene que

$$H_k^{LJ}(M) \cong H_{dR}^{2m-k+1}(M) \oplus H_{dR}^{2m-k}(M).$$

Variedades simplécticas Lefschetz. Sea (M, Ω) una variedad simpléctica Lefschetz de dimensión $2m$ (ver Sección 3.2.1). Entonces, usando (3.7) y (4.4), se tiene

$$\begin{aligned} H_k^{LJ}(M) &\cong \frac{H_{dR}^{2m-k+1}(M)}{ImL^{2m-k-1}}, &\quad \text{para} \quad k \leq m, \\ H_k^{LJ}(M) &\cong kerL^{2m-k}, &\quad \text{para} \quad k \geq m+1. \end{aligned}$$

Nilvariedades simplécticas compactas. Supongamos que $(\Gamma\backslash G)$ es una nilvariedad simpléctica compacta (ver Sección 3.2.1) y que $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie G . Usando (3.9) y (4.4), deducimos que

$$H_k^{LJ}(\Gamma\backslash G) \cong \frac{H^{2m-k+1}(\mathfrak{g})}{Im(L_{\mathfrak{g}})^{2m-k-1}} \oplus ker(L_{\mathfrak{g}})^{2m-k},$$

donde $(L_{\mathfrak{g}})^r$ son los homomorfismos definidos en (3.8).

4.2.2 Estructuras cosimplécticas

En [33] (ver también [32]) los autores han demostrado que si M es una variedad cosimpléctica de dimensión $2m+1$ con campo de Reeb ξ, entonces la homología canónica de M viene dada como sigue

$$H_k^{can}(M) \cong H_\xi^{2m+1-k}(M) \oplus H_\xi^{2m-k}(M), \tag{4.5}$$

donde $H_\xi^*(M)$ es la cohomología del complejo $(\Omega_\xi^*(M), d_\xi)$ introducido en la Sección 3.2.2. De hecho, este isomorfismo se define como sigue. Consideramos el operador $\star_\xi : \Omega_\xi^r(M) \to \Omega_\xi^{2m+1-r}(M)$ dado por

$$\star_\xi(\alpha) = \frac{1}{m!} i(\flat^{-1}(\alpha))\Phi^m \wedge \eta.$$

Se tiene que $\star_\xi^2 = Id$ y, además, la aplicación

$$F_k : H_k^{can}(M) \to H_\xi^{2m+1-k}(M) \oplus H_\xi^{2m-k}(M)$$

definida por

$$F_k([\alpha]) = ([\star_\xi(\alpha - \eta \wedge i(\xi)\alpha)], [\star_\xi(i(\xi)\alpha)]),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. De hecho, el homomorfismo inverso $G_k : H_\xi^{2m+1-k}(M) \oplus H_\xi^{2m-k}(M) \to H_k^{can}(M)$ está dado por

$$G_k([\alpha], [\beta]) = [\star_\xi\alpha + \eta \wedge \star_\xi\beta].$$

Usando estos resultados, el Teorema 4.2.1 y el hecho de que $\star_\xi \circ i(\Lambda) = i(\Lambda) \circ \star_\xi$, deducimos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.4 *Sea (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica de dimensión $2m+1$ con campo de Reeb ξ. Entonces, tenemos una sucesión exacta larga de espacios vectoriales*

$$\ldots \to H_\xi^{2m+2-k}(M) \oplus H_\xi^{2m+1-k}(M) \stackrel{\overline{G}_{k-1}}{\to} H_k^{LJ}(M) \stackrel{\overline{F}_k}{\to}$$
$$H_\xi^{2m+1-k}(M) \oplus H_\xi^{2m-k}(M) \stackrel{\overline{i(\Lambda)}}{\to} H_\xi^{2m+3-k}(M) \oplus H_\xi^{2m+2-k}(M) \to \ldots$$

donde las aplicaciones $\overline{G}_{k-1}$, $\overline{F}_k$ y $\overline{i(\Lambda)}$ están definidas por

$$\begin{aligned} \overline{G}_{k-1}([\alpha],[\beta]) &= [(0,(G_{k-1}([\alpha],[\beta]))], \\ \overline{F}_k([(\alpha',\beta')]) &= [(\star_\xi(\alpha' - \eta \wedge i(\xi)\alpha'), \star_\xi(i(\xi)\alpha'))], \\ \overline{i(\Lambda)}([\alpha''],[\beta'']) &= (-1)^k([i(\Lambda)\alpha''],[i(\Lambda)\beta'']). \end{aligned}$$

Con el fin de estudiar la dualidad entre la LJ-cohomología y la LJ-homología, calcularemos en el siguiente resultado la clase modular de una variedad cosimpléctica.

Proposición 4.2.5 *Sea (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica de dimensión $2m+1$. Entonces M es una variedad de Poisson unimodular.*

Demostración. Sea ξ el campo de Reeb de M. Consideramos entonces la forma de volumen $\nu = \Phi^m \wedge \eta$. Si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, usando que η es una 1-forma cerrada y el hecho de que $\eta(X_f) = 0$ (ver (1.27) y la Observación 1.2.1), se sigue

$$\mathcal{L}_{X_f}\eta = 0. \tag{4.6}$$

Por otra parte, de (1.6), (1.7) y (3.14), deducimos

$$i(X_f)\Phi = -df + \xi(f)\eta.$$

Así,

$$\mathcal{L}_{X_f}\Phi = d(\xi(f)) \wedge \eta. \tag{4.7}$$

Usando (4.6) y (4.7) concluimos entonces

$$\mathcal{L}_{X_f}\nu = 0.$$

Así, la clase modular-Poisson de M es cero.

$\blacksquare$

En consecuencia, por el Teorema 1.4.11, la Observación 1.4.12 y la Proposición 4.2.5 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.6 *Sea (M, Φ, η) una variedad cosimpléctica de dimensión $2m+1$ con campo de Reeb ξ. Entonces,*

$$H_k^{LJ}(M) \cong H_{LJ}^{2m+2-k}(M), \ \ \textit{para todo } k.$$

Ejemplo 4.2.7 Sea $(\widetilde{M}, J, h)$ una variedad compacta Kähler con 2-forma de Kähler $\widetilde{\Omega}$ y de dimensión $2m$. Consideramos sobre la variedad producto $M = \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ la estructura cosimpléctica (Φ, η) definida por

$$\Phi = pr_1^*(\widetilde{\Omega}), \quad \eta = pr_2^*(dt),$$

donde pr_1 y pr_2 son las proyecciones canónicas de M sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Entonces, usando el Teorema 4.2.6, deducimos que (ver Ejemplo 3.2.7)

$$\begin{aligned}
H_k^{LJ}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{2m+1-k} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \oplus (ker\widetilde{L}^{2m-k} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})), k \leq m-2 \\
H_{m-1}^{LJ}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{m+2} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \oplus (ker\widetilde{L}^{m+1} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\
&\oplus (\frac{H_{dR}^{m+2}(M)}{Im\widetilde{L}^m} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\
H_m^{LJ}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{m+1} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \oplus (ker\widetilde{L}^{m} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\
&\oplus (\frac{H_{dR}^{m+2}(M)}{Im\widetilde{L}^m} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \oplus (\frac{H_{dR}^{m+1}(M)}{Im\widetilde{L}^{m-1}} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\
H_{m+1}^{LJ}(M) &\cong (ker\widetilde{L}^{m} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \oplus (\frac{H_{dR}^{m+1}(M)}{Im\widetilde{L}^{m+1}} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\
&\oplus (\frac{H_{dR}^{m}(M)}{Im\widetilde{L}^{m-2}} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})),
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{L}^r : H_{dR}^r(\widetilde{M}) \rightarrow H_{dR}^{r+2}(\widetilde{M})$ son los homomorfismos definidos por

$$\widetilde{L}^r([\widetilde{\alpha}]) = [\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\Omega}], \qquad \text{para} \qquad [\widetilde{\alpha}] \in H_{dR}^r(\widetilde{M}).$$

4.2.3 Estructuras de Lie-Poisson

Sea $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ un álgebra de Lie real de dimensión n y consideramos sobre el espacio dual $\mathfrak{g}^*$ la estructura de Lie-Poisson $\bar{\Lambda}$.
Supongamos que $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y que (x_i) son las correspondientes coordenadas globales para $\mathfrak{g}^*$. Denotamos por $\bar{\nu}$ la forma de volumen sobre $\mathfrak{g}^*$ dada por

$$\bar{\nu} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

El carácter modular ξ_0 de $\mathfrak{g}$ (ver Ejemplo 1.4.8 i)) induce un campo de vectores constante sobre $\mathfrak{g}^*$ que es el campo modular de la variedad de Poisson $(\mathfrak{g}^*, \bar{\Lambda})$ respecto a la forma de volumen $\bar{\nu}$ (ver [69, 124]). Así, si $\mathfrak{g}$ es unimodular, es decir, si su carácter modular ξ_0 es cero, entonces $(\mathfrak{g}^*, \bar{\Lambda})$ es una variedad de Poisson unimodular. Por tanto, por el Teorema 1.4.11 y la Observación 1.4.12, tenemos

Teorema 4.2.8 *Sea $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ un álgebra de Lie real unimodular de dimensión n y consideramos sobre el espacio dual $\mathfrak{g}^*$ la estructura de Lie-Poisson. Entonces, para todo k se tiene*

$$H_k^{LJ}(\mathfrak{g}^*) \cong H_{LJ}^{n-k+1}(\mathfrak{g}^*).$$

Ahora, usando (3.19), el Teorema 4.2.8 y el hecho de que el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto es unimodular, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.9 *Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto de dimensión n y consideramos sobre su espacio dual $\mathfrak{g}^*$ la estructura de Lie-Poisson. Entonces, para todo k,*

$$H_k^{LJ}(\mathfrak{g}^*) \cong H_{LJ}^{n-k+1}(\mathfrak{g}^*) \cong (H^{n-k+1}(\mathfrak{g}) \otimes Inv) \oplus (H^{n-k}(\mathfrak{g}) \otimes Inv),$$

donde Inv es el álgebra de las funciones Casimires sobre $\mathfrak{g}^*$ y $H^*(\mathfrak{g})$ es la cohomología de $\mathfrak{g}$ relativa a la representación trivial de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$.

4.2.4 Una estructura de Poisson cuadrática

Sea Λ la estructura de Poisson cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$ considerada en la Sección 3.2.4, es decir,

$$\Lambda = xy\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

El campo modular de $(\mathbb{R}^2, \Lambda)$ respecto al volumen estandar $\nu = dx \wedge dy$ es

$$\mathcal{X}_\Lambda^\nu = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Es fácil ver que $[\mathcal{X}_\Lambda^\nu] \neq 0$ en $H^1_{LP}(\mathbb{R}^2, \Lambda)$. Por tanto, $(\mathbb{R}^2, \Lambda)$ no es una variedad de Poisson unimodular.

La homología canónica de $(\mathbb{R}^2,\Lambda)$. Primeramente, calcularemos $H_2^{can}(\mathbb{R}^2,\Lambda)$. Supongamos que $\beta = hdx \wedge dy$ es una 2-forma sobre $\mathbb{R}^2$, con $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Tenemos que

$$\delta^\Lambda \beta = -di(\Lambda)(\beta) = -d(xyh). \tag{4.8}$$

De aquí deducimos que

$$\delta^\Lambda \beta = 0 \iff xyh = cte \iff h = 0 \iff \beta = 0.$$

Así,

$$H_2^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \{0\}. \tag{4.9}$$

Ahora, sea α una 1-forma sobre $\mathbb{R}^2$. Se tiene que

$$\delta^\Lambda \alpha = i(\Lambda)(d\alpha) = xyd\alpha(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}).$$

Consecuentemente,

$$\delta^\Lambda \alpha = 0 \iff d\alpha = 0 \iff \alpha = df, \quad \text{para} \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Esto implica que (ver (4.8))

$$H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \frac{\{df/f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}{\delta^\Lambda(\Omega^2(\mathbb{R}^2))} = \frac{\{df/f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}{\{d(xyh)/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}. \tag{4.10}$$

En particular, obtenemos que la dimensión de $H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda)$ no es finita. De hecho, si m es un entero arbitrario, $m \geq 1$, y

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k [dx^k] = 0, \quad \text{con} \quad \lambda_k \in \mathbb{R},$$

se tiene que

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k = xyh,$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Así, concluimos que

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R},$$

y de aquí se sigue que $\lambda_k = 0$, para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$ (nótese que $p(x) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k$ es un polinomio de grado $\leq m$).

Finalmente, calcularemos $H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda)$.

Si $\gamma = fdx + gdy$ es una 1-forma sobre $\mathbb{R}^2$, deducimos que

$$\delta^\Lambda \gamma = i(\Lambda)(d\gamma) = xy(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}),$$

lo que implica que

$$H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}{\{xy(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})/f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}.$$

Por otra parte, usando que $H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) = \{0\}$, obtenemos la siguiente igualdad de conjuntos

$$\{xy(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})/f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\} = \{xyh/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}$$

y, por tanto,

$$H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}{\{xyh/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}.$$

Ahora, consideramos la aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$\psi : H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \to H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \oplus \mathbb{R}$$

definida por

$$\psi([f]) = ([df], f(0,0)), \quad \text{para toda} \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Un cálculo directo demuestra que ψ es un isomorfismo. De hecho, la aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$\zeta : H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \oplus \mathbb{R} \to H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda)$$

dada por

$$\zeta([df], k) = [f - f(0,0) + k]$$

es justamente la inversa de ψ.
Consecuentemente,

$$H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \cong \frac{\{df/f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}{\{d(xyh)/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}} \oplus \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Observación 4.2.10 De (3.20), (4.9), (4.10) y (4.11), concluimos que

$$H_i^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \ncong H_{LP}^{2-i}(\mathbb{R}^2, \Lambda),$$

para $i \in \{0, 1, 2\}$.

La LJ-homología de $(\mathbb{R}^2, \Lambda)$. Usando (4.9), (4.10), (4.11) y el Teorema 4.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} H_3^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) &\cong H_2^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \{0\} \\ H_2^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) &\cong H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \frac{\{df/f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}{\{d(xyh)/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}} \\ H_0^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) &\cong H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) = \frac{\{df/f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}{\{d(xyh)/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}} \oplus \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Demostraremos ahora que

$$H_1^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \cong H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \oplus H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda).$$

Para ello, consideramos la aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$\widetilde{\psi} : H_1^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \oplus H_0^{can}(\mathbb{R}^2, \Lambda) \rightarrow H_1^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0)$$

dada por

$$\widetilde{\psi}([\alpha], [f]) = [(\alpha, f)]$$

para todo $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, con $\delta^\Lambda \alpha = 0$.
Nótese que si

$$\alpha' = \alpha + \delta^\Lambda \beta, \qquad f' = f + \delta^\Lambda \gamma,$$

con $\beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ y $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, entonces, como $H^2_{dR}(\mathbb{R}^2) = \{0\}$, existe una 1-forma $\tilde{\gamma}$ sobre $\mathbb{R}^2$ satisfaciendo $\beta = -d\tilde{\gamma}$ y

$$\delta^{(\Lambda,0)}(\beta, \gamma + \tilde{\gamma}) = (\delta^\Lambda \beta, \delta^\Lambda \gamma).$$

Así,

$$(\alpha', f') = (\alpha, f) + \delta^{(\Lambda,0)}(\beta, \gamma + \tilde{\gamma}).$$

Esto prueba que la aplicación $\widetilde{\psi}$ está bien definida.
Por otra parte, está claro que $\widetilde{\psi}$ es un epimorfismo. Además, usando de nuevo que $H^2_{dR}(\mathbb{R}^2) = \{0\}$, se sigue que $\widetilde{\psi}$ es un monomorfismo.
Por tanto (ver (4.10) y (4.11)),

$$H_1^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \cong \left(\frac{\{df / f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}{\{d(xyh)/h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}}\right)^2 \oplus \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Observación 4.2.11 De (3.21), (4.12) y (4.13), concluimos que

$$H_i^{LJ}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0) \ncong H_{LJ}^{3-i}(\mathbb{R}^2, \Lambda, 0), \quad \text{para} \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

4.3 Homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad de contacto

Sea (M, η) una variedad de contacto de dimensión $2m+1$. Entonces, $\nu = \eta \wedge (d\eta)^m$ es una forma de volumen y (ver [118])

$$\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,E)} = (-(m+1)E, 0),$$

donde (Λ, E) es la estructura de Jacobi asociada a M. Así, M no es una variedad de Jacobi unimodular y por tanto, no es posible aplicar el Teorema 1.4.11. De hecho, en esta sección, demostraremos que la LJ-homología de una variedad de contacto M es trivial.

Primeramente, probamos un resultado que será útil en lo sucesivo.

Lema 4.3.1 *Sea (M, η) una variedad de contacto de dimensión $2m+1$ y sea (Λ, E) la estructura de Jacobi asociada a M. Si $e(\eta) : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ y $\widetilde{L}^k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+2}(M)$ son los operadores definidos por*

$$e(\eta)(\alpha) = \eta \wedge \alpha, \quad \widetilde{L}^k(\alpha) = \alpha \wedge d\eta,$$

entonces,

$$i(\Lambda) \circ e(\eta) = e(\eta) \circ i(\Lambda), \tag{4.14}$$

$$i(\Lambda) \circ \widetilde{L}^k - \widetilde{L}^{k-2} \circ i(\Lambda) = (m-k)Id + e(\eta) \circ i(E), \tag{4.15}$$

donde Id denota la transformación identidad.

Demostración. Sea x un punto arbitrario de M. Supongamos que $(t, q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m)$ son coordenadas canónicas en un entorno abierto U de x satisfaciendo (1.13).

De (1.13), se sigue que

$$(i(\Lambda) \circ e(\eta))(\alpha) = (e(\eta) \circ i(\Lambda))(\alpha),$$

para todo $\alpha \in \Omega^*(U)$. Esto prueba (4.14).

Por otro lado, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son 1-formas sobre U, entonces un cálculo directo, usando de nuevo (1.13), demuestra que

$$\begin{aligned}(i(\Lambda) \circ \widetilde{L}^k - \widetilde{L}^{k-2} \circ i(\Lambda))(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = m(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) \\ - \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{i-1} \wedge [\sum_{j=1}^{m} (\alpha_i(\frac{\partial}{\partial q^j} + p_j \frac{\partial}{\partial t}) dq^j + \alpha_i(\frac{\partial}{\partial p_j}) dp_j)] \wedge \\ \alpha_{i+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_k = (m-k)(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) + (e(\eta) \circ i(E))(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k).\end{aligned}$$

De aquí se obtiene (4.15). ∎

Ahora, probamos el resultado anunciado al comienzo de esta sección, acerca de la LJ-homología de una variedad de contacto.

Teorema 4.3.2 *La LJ-homología de una variedad de contacto es trivial.*

Demostración. Sea (M,η) una variedad de contacto de dimensión $2m+1$ y $\delta^{(\Lambda,E)}$ el operador de la LJ-homología.
Si α (respectivamente, β) es una k-forma (respectivamente, una $(k-1)$-forma) sobre M tal que

$$\delta^{(\Lambda,E)}(\alpha,\beta)=(0,0),$$

entonces, usando (1.12), (1.70) y el Lema 4.3.1, deducimos que

$$(\alpha,\beta)=\delta^{(\Lambda,E)}(\frac{\eta\wedge\alpha}{m+1},\frac{\eta\wedge\beta}{m+1}).$$

Por tanto, $H_k^{LJ}(M)=\{0\}$.

■

4.4 Homología de Lichnerowicz-Jacobi de una variedad localmente conforme simpléctica

Como en la Sección 3.4 del tercer capítulo, distinguimos los siguientes casos:
i) El caso particular de una variedad g.c.s. Sea (M,Ω) una variedad g.c.s. con 1-forma de Lee ω. Entonces , existe $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ tal que $\omega=df$ y la estructura de Jacobi de M es un cambio conforme de la estructura de Poisson de M asociada con la forma simpléctica $e^{-f}\Omega$. Así, de los Teoremas 3.1.1 , 4.1.1 y 4.2.3, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1 *Sea (M,Ω) una variedad g.c.s. de dimensión $2m$. Entonces,*

$$H_k^{LJ}(M)\cong H_{LJ}^{2m-k+1}(M),$$

para todo k. Además, si M es de tipo finito, tenemos

$$H_k^{LJ}(M)\cong\frac{H_{dR}^{2m-k+1}(M)}{Im\bar{L}^{2m-k+1}}\oplus ker\bar{L}^{2m-k},$$

donde $H^*_{dR}(M)$ *es la cohomología de De Rham de* M *y* $\bar{L}^r : H^r_{dR}(M) \to H^{r+2}_{dR}(M)$ *es el homomorfismo dado por*

$$\bar{L}^r[\alpha] = ([e^{-f}\alpha \wedge \Omega]),$$

para todo $[\alpha] \in H^r_{dR}(M)$.

Observación 4.4.2 En [118], Vaisman demuestra que una variedad g.c.s. es una variedad de Jacobi unimodular. Usando este hecho, el Teorema 3.4.1 y el Teorema 1.4.11, podemos también probar el Teorema 4.4.1.

Ejemplo 4.4.3 Sea (N, η) una variedad de contacto de tipo finito. Supongamos que la dimensión de N es $2m-1$ y consideramos sobre la variedad producto $M = N \times \mathbb{R}$ la estructura g.c.s. Ω dada en (3.25). Entonces, usando el Teorema 4.4.1, tenemos

$$H_k^{LJ}(M) \cong H_{dR}^{2m-k+1}(M) \oplus H_{dR}^{2m-k}(M) \cong H_{dR}^{2m-k+1}(N) \oplus H_{dR}^{2m-k}(N).$$

ii) El caso general. Ahora, estudiaremos la LJ-homología de una variedad l.c.s. arbitraria.

Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. de dimensión $2m$ con 1-forma de Lee ω. Entonces $\nu = \Omega^m$ es una forma de volumen y (ver [118])

$$\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,E)} = [(-(1+m)E, 0)],$$

donde (Λ, E) es la estructura de Jacobi asociada a M. Así, en general, M no es una variedad de Jacobi unimodular (ver [118]) y por tanto, no es posible aplicar el Teorema 1.4.11. De hecho, en esta sección probaremos que si $k \in \{0, \ldots, 2m+1\}$ entonces, en general, los espacios $H^k_{LJ}(M)$ y $H^{LJ}_{2m-k+1}(M)$ no son isomorfos.

Primeramente, introduciremos una cierta cohomología para dar una descripción explícita de la LJ-homología de M.

Consideramos las 1-formas cerradas ω_0 y ω_1 sobre M definidas por

$$\omega_0 = -m\omega, \qquad \omega_1 = -(m+1)\omega. \tag{4.16}$$

Denotamos por $H^*_{\omega_0}(M)$ y por $H^*_{\omega_1}(M)$ las cohomologías de los complejos $(\Omega^*(M), d_{\omega_0})$ y $(\Omega^*(M), d_{\omega_1})$, donde d_{ω_0} y d_{ω_1} son los operadores diferenciales con cuadrado cero dados por (ver (2.4) y (3.34))

$$d_{\omega_0} = d + e(\omega_0), \qquad d_{\omega_1} = d + e(\omega_1). \tag{4.17}$$

Ahora, sea $\tilde{d} : \Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M) \to \Omega^{k+1}(M)\oplus\Omega^k(M)$ el operador diferencial definido por

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) = (d_{\omega_1}\alpha - \Omega \wedge \beta, -d_{\omega_0}\beta). \tag{4.18}$$

Usando (1.14), se sigue que $\tilde{d}^2 = 0$. Así, podemos considerar el complejo

$$\ldots \to \Omega^{k-1}(M)\oplus\Omega^{k-2}(M) \stackrel{\tilde{d}}{\to} \Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M) \stackrel{\tilde{d}}{\to} \Omega^{k+1}(M)\oplus\Omega^k(M) \to \ldots$$

Denotamos por $\widetilde{H}^*(M)$ la cohomología de este complejo.
De (4.17) y (4.18), deducimos el siguiente resultado que relaciona $\widetilde{H}^*(M)$ con las cohomologías $H^*_{\omega_0}(M)$ y $H^*_{\omega_1}(M)$.

Proposición 4.4.4 *Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee ω. Supongamos que $(Id^k, 0) : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ y $(\pi_2)^k : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ son los homomorfismos de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos definidos por*

$$(Id^k, 0)(\alpha) = (\alpha, 0), \qquad (\pi_2)^k(\alpha, \beta) = \beta,$$

para $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$. Entonces:

(i) Las aplicaciones $(Id^k, 0)$ y $(\pi_2)^k$ inducen una sucesión exacta de complejos

$$0 \to (\Omega^*(M), d_{\omega_1}) \stackrel{(Id,0)}{\to} (\Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M), \tilde{d}) \stackrel{\pi_2}{\to} (\Omega^{*-1}(M), -d_{\omega_0}) \to 0.$$

(ii) Esta sucesión exacta induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\ldots \stackrel{-L^{k-2}}{\to} H^k_{\omega_1}(M) \stackrel{(Id^k,0)_*}{\to} \widetilde{H}^k(M) \stackrel{((\pi_2)^k)_*}{\to} H^{k-1}_{\omega_0}(M) \stackrel{-L^{k-1}}{\to} H^{k+1}_{\omega_1}(M)$$
$$\stackrel{(Id^{k+1},0)_*}{\to} \ldots,$$

donde el homomorfismo conector $-L^{k-1}$ está definido por

$$(-L^{k-1})[\alpha] = [-\alpha \wedge \Omega], \tag{4.19}$$

para todo $[\alpha] \in H^{k-1}_{\omega_0}(M)$.

Ahora, de la Proposición 4.4.4, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4.5 *Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee ω y tal que los grupos de cohomología $H^k_{\omega_0}(M)$ y $H^k_{\omega_1}(M)$ tienen dimensión finita, para todo k. Entonces, el grupo de cohomología $\widetilde{H}^k(M)$ también tiene dimensión finita, para todo k, y*

$$\widetilde{H}^k(M) \cong \frac{H^k_{\omega_1}(M)}{ImL^{k-2}} \oplus kerL^{k-1},$$

donde $L^r : H^r_{\omega_0}(M) \to H^{r+2}_{\omega_1}(M)$ es el homomorfismo dado en (4.19).

Usando (4.16), (4.17), la Proposición 3.4.3, el Teorema 3.4.4 y el Corolario 4.4.5, probamos los siguientes resultados.

Corolario 4.4.6 *Sea (M, Ω) una variedad l.c.s. con 1-forma de Lee ω, tal que las dimensiones de los grupos de cohomología $H^k_{\omega_0}(M)$ y $H^k_{\omega_1}(M)$ son finitas, para todo k. Supongamos que Ω es $d_{(-\omega)}$-exacta, es decir, que existe una 1-forma η sobre M, satisfaciendo*

$$\Omega = d\eta - \omega \wedge \eta.$$

Entonces, para todo k, tenemos

$$\widetilde{H}^k(M) \cong H^k_{\omega_1}(M) \oplus H^{k-1}_{\omega_0}(M).$$

Corolario 4.4.7 *Sea (M, Ω) una variedad compacta l.c.s. con 1-forma de Lee $\omega \neq 0$. Supongamos que g es una métrica Riemanniana sobre M tal que ω es paralela respecto a g. Entonces, la cohomología $\widetilde{H}^*(M)$ es trivial.*

Ahora, estudiaremos la relación entre la LJ-homología de una variedad l.c.s. M y la cohomología $\widetilde{H}^*(M)$.
Sea (M,Ω) una variedad l.c.s. de dimensión $2m$ con 1-forma de Lee ω. Denotamos por (Λ, E) la estructura de Jacobi asociada a M y por $\#_\Lambda : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^k(M)$ el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos dado por (1.25) y (1.26).
Definimos el operador estrella $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{2m-k}(M)$ por

$$\star\alpha = (-1)^k i(\#_\Lambda(\alpha))\frac{\Omega^m}{m!} \tag{4.20}$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$.

Lema 4.4.8 *Si α es una k-forma sobre M entonces:*

(i) $\star(\star\alpha) = \alpha$.

(ii) $(i(E)\circ\star)(\alpha) = (-1)^k(\star\circ e(\omega))(\alpha)$.

(iii) $(\mathcal{L}_E\circ\star)(\alpha) = (\star\circ\mathcal{L}_E)(\alpha)$.

(iv) $(i(\Lambda)\circ\star)(\alpha) = \star(\alpha\wedge\Omega)$.

Demostración. *(i)* Sean $(q^1,\dots,q^m,p_1,\dots,p_m)$ coordenadas en un subconjunto abierto U de M tal que

$$\omega = d\sigma, \qquad \Omega = e^\sigma\sum_i dq^i\wedge dp_i, \qquad \Lambda = e^{-\sigma}\sum_i(\frac{\partial}{\partial q^i}\wedge\frac{\partial}{\partial p_i}),$$

donde $\sigma : U \to \mathbb{R}$ es una función real C^∞-diferenciable sobre U (ver (1.18)). Consideramos sobre U la 2-forma simpléctica

$$\bar{\Omega} = e^{-\sigma}\Omega = \sum_i dq^i\wedge dp_i. \tag{4.21}$$

Denotamos por $\bar{\star} : \Omega^k(U) \to \Omega^{2m-k}(U)$ el operador estrella inducido por $\bar{\Omega}$, es decir,

$$\bar{\star}\alpha = (-1)^k(i(\#_{\bar{\Lambda}}(\alpha))\frac{\bar{\Omega}^m}{m!},$$

donde $\bar{\Lambda}$ es la estructura de Poisson asociada a $\overline{\Omega}$.
En [12] (ver también [76]), Brylinski demuestra que

$$\bar{\star}^2 = Id. \tag{4.22}$$

Por otro lado, usando (1.18), (1.25), (1.26), (4.20) y (4.21), tenemos que

$$\star\alpha = e^{(m-k)\sigma}\bar{\star}\alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \Omega^k(U). \tag{4.23}$$

Así de (4.22) y (4.23), se sigue que $\star^2(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$. Esto prueba (i).
Usando (1.15), (3.38) y (4.20), deducimos (ii).
De (1.17), (4.20) y la segunda relación de (3.22), obtenemos que (iii) es cierto.
Finalmente, (iv) se sigue directamente usando (4.20) y el hecho de que

$$\#_\Lambda(\Omega) = \Lambda.$$

■

El operador $\bar{\star}$ inducido por una forma simpléctica $\bar{\Omega}$ en una variedad M satisface la siguiente relación (ver [12])

$$\bar{\star}(\delta^\Lambda\alpha) = (-1)^{k+1}d(\bar{\star}\alpha),$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$, donde δ^Λ es el operador de la homología canónica (ver (1.68)). Por tanto, procediendo como en la demostración de la primera parte del Lema 4.4.8 y usando dicho Lema deducimos el siguiente resultado.

Lema 4.4.9 *Si α es una k-forma sobre M, se tiene*

$$\star(i(\Lambda)d\alpha - di(\Lambda)\alpha) = (-1)^{k+1}(d(\star\alpha) - (m-k+1)e(\omega)(\star\alpha) - \Omega \wedge i(E)(\star\alpha)).$$

Ahora, aplicando los Lemas 4.4.8 y 4.4.9, obtenemos la relación anunciada entre la LJ-homología de M y la cohomología $\widetilde{H}^*(M)$.

Teorema 4.4.10 *Sea (M,Ω) una variedad l.c.s. de dimensión $2m$ y con 1-forma de Lee ω. Supongamos que (Λ, E) es la estructura de Jacobi asociada a M y que $\tilde{\phi}_k : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^{2m-k+1}(M) \oplus \Omega^{2m-k}(M)$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos definido por*

$$\tilde{\phi}_k(\alpha,\beta) = (\star\beta, i(E)(\star\beta) - \star\alpha),$$

donde $\star$ es el operador estrella dado en (4.20). Si $\delta^{(\Lambda,E)}$ es el operador de la LJ-homología de M y $\tilde{d}$ es el operador diferencial definido en (4.18) entonces,

$$\tilde{\phi}_{k-1}(\delta^{(\Lambda,E)}(\alpha,\beta)) = (-1)^k \tilde{d}(\tilde{\phi}_k(\alpha,\beta)),$$

para todo $(\alpha,\beta) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$. Así,

$$H_k^{LJ}(M) \cong \widetilde{H}^{2m-k+1}(M).$$

Usando el Teorema 4.4.10 y los Corolarios 4.4.5, 4.4.6 y 4.4.7, deducimos las siguientes consecuencias.

Corolario 4.4.11 *Sea (M,Ω) una variedad l.c.s. de dimensión $2m$, con 1-forma de Lee ω y tal que los grupos de cohomología $H^k_{\omega_0}(M)$ y $H^k_{\omega_1}(M)$ tienen dimensión finita, para todo k. Entonces,*

$$H_k^{LJ}(M) \cong \frac{H^{2m-k+1}_{\omega_1}(M)}{ImL^{2m-k-1}} \oplus kerL^{2m-k},$$

donde $L^r : H^r_{\omega_0}(M) \to H^{r+2}_{\omega_1}(M)$ es el homomorfismo dado en (4.19).

Corolario 4.4.12 *Sea (M,Ω) una variedad l.c.s. de dimensión $2m$ con 1-forma de Lee ω y tal que la dimensión de los grupos de cohomología $H^k_{\omega_0}(M)$ y $H^k_{\omega_1}(M)$ es finita, para todo k. Supongamos que Ω es $d_{(-\omega)}$-exacta, es decir, que existe una 1-forma η sobre M que cumple*

$$\Omega = d\eta - \omega \wedge \eta.$$

Entonces,

$$H_k^{LJ}(M) \cong H^{2m-k+1}_{\omega_1}(M) \oplus H^{2m-k}_{\omega_0}(M),$$

para todo k.

Corolario 4.4.13 *Sea (M, Ω) una variedad compacta l.c.s. con 1-forma de Lee ω, $\omega \neq 0$. Supongamos que g es una métrica Riemanniana sobre M tal que ω es paralela con respecto a g. Entonces, la LJ-homología de M es trivial.*

Observación 4.4.14 Nótese que bajo las mismas hipótesis que en el Corolario 4.4.13, tenemos que $H^k_{LJ}(M) \cong H^k_{dR}(M)$, para todo k.

Ejemplo 4.4.15 Sea (N, η) una variedad de contacto compacta de dimensión $2m-1$. Consideramos sobre la variedad producto $M = N \times S^1$ la estructura l.c.s. Ω dada en (3.41). Entonces, usando el Corolario 4.4.13, se sigue que la LJ-homología de M es trivial.

4.5 Homología de Lichnerowicz-Jacobi de la esfera unidad de un álgebra de Lie real

En esta última sección del Capítulo 4 daremos una descripción explícita de la LJ-homología de la esfera unidad del álgebra de Lie real de un grupo de Lie compacto. Para ello, probaremos que la esfera unidad de un álgebra de Lie real unimodular es una variedad de Jacobi unimodular.

Teorema 4.5.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real unimodular de dimensión n. Supongamos que $< \ , \ >$ es un producto escalar sobre $\mathfrak{g}$ y consideramos sobre la esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ la estructura de Jacobi inducida. Entonces $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ es una variedad de Jacobi unimodular. Así,*

$$H_k^{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H_{LJ}^{n-k}(S^{n-1}(\mathfrak{g})),$$

para todo k.

Demostración. Sean $(x^i)_{i=1,\dots,n}$ las coordenadas globales para $\mathfrak{g}$ obtenidas de una base ortonormal $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$ de $\mathfrak{g}$.
Consideramos la forma de volumen $\bar{\nu}$ sobre $\mathfrak{g}$ definida por

$$\bar{\nu} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Denotamos por $\flat_{<\,,\,>} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo lineal entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ dado en (1.19) y por $\bar{\Lambda}$ la estructura de Poisson sobre $\mathfrak{g}$ inducida por la estructura de Lie-Poisson sobre $\mathfrak{g}^*$ y por el isomorfismo $\flat_{<\,,\,>}$.
Supongamos que $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ son las coordenadas globales para $\mathfrak{g}^*$ obtenidas de la base $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$. Como $\flat^*_{<\,,\,>}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \bar{\nu}$, se sigue que el campo modular $\mathcal{X}^{\bar{\nu}}_{\bar{\Lambda}}$ de $(\mathfrak{g}, \bar{\Lambda})$ con respecto a $\bar{\nu}$ es cero (ver la Sección 4.2.2).
Ahora, consideramos la $(n-1)$-forma ν sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ definida por

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} < \xi_i, \;\; > d < \xi_1, \;\; > \wedge \ldots \wedge d\, \widehat{< \xi_i, \;\;} > \wedge \ldots \wedge d < \xi_n, \;\; >,$$

donde $< \xi_j, \;\; >: S^{n-1}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ es la función real dada por (1.22). Entonces, si $F : \mathfrak{g} - \{0\} \to S^{n-1}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{R}$ es el difeomorfismo definido en (1.30), con un cálculo directo probamos que

$$(F^{-1})^*(\bar{\nu}_{|\mathfrak{g}-\{0\}}) = e^{nt} \nu \wedge dt. \tag{4.24}$$

Por tanto, ν es una forma de volumen sobre $S^{n-1}(\mathfrak{g})$, y, usando (4.24), la Observación 1.4.13 y el hecho de que el campo modular de $(\mathfrak{g} - \{0\}, \bar{\Lambda}_{|\mathfrak{g}-\{0\}})$ con respecto a $\bar{\nu}_{|\mathfrak{g}-\{0\}}$ es cero, deducimos que

$$\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,E)} = (0,0),$$

siendo (Λ, E) la estructura de Jacobi de $S^{n-1}(\mathfrak{g})$. Nótese que F es un isomorfismo Poisson entre $(\mathfrak{g} - \{0\}, \bar{\Lambda}_{|\mathfrak{g}-\{0\}})$ y la poissonización de $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ (ver el Ejemplo 1.3.1 *iii*)).

■

De los Teoremas 3.5.3 y 4.5.1, concluimos

Teorema 4.5.2 *Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto de dimensión n. Supongamos que $< \;,\; >$ es un producto escalar sobre $\mathfrak{g}$ y consideramos sobre la esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$, la estructura de Jacobi inducida. Entonces,*

$$H^{LJ}_k(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H^{n-k}_{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong H^{n-k}(\mathfrak{g}) \otimes Inv$$

para todo k*, donde* $H^*(\mathfrak{g})$ *es la cohomología de* $\mathfrak{g}$ *relativa a la representación trivial de* $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *y* Inv *es la subálgebra de* $C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$ *definida por*

$$Inv = \{\varphi \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})/X_f(\varphi) = 0, \quad para \quad f \in C^\infty(S^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathbb{R})\}.$$

4.6 Tabla resumen: homología de Lichnerowicz-Jacobi

En las siguientes tablas se resumen los principales resultados obtenidos a lo largo del Capítulo 4 sobre la LJ-homología y su relación con la LJ-cohomología de diferentes tipos de variedades de Jacobi.

LJ-homología de variedades de Poisson

TIPO	LJ-HOMOLOGIA	CLASE MODULAR	OBSERVACIONES
(M^{2m}, Ω) simpléctica de tipo finito	$H_k^{LJ}(M) \cong H_{LJ}^{2m+1-k}(M)$ $\cong \dfrac{H_{dR}^{2m+1-k}(M)}{ImL^{2m-k+1}} \oplus kerL^{2m-k}$	0	$L^r : H_{dR}^r(M) \to H_{dR}^{r+1}(M)$ $[\alpha] \mapsto [\alpha \wedge \Omega]$
(M^{2m+1}, Φ, η) cosimpléctica	$H_k^{LJ}(M) \cong H_{LJ}^{2m+2-k}(M)$	0	
$M = \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ $\widetilde{M}$ compacta Kähler, con 2-forma de Kähler $\widetilde{\Omega}$ $dim\widetilde{M} = 2m$	$H_k^{LJ}(M) \cong (ker\widetilde{L}^{2m+1-k} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ $\oplus(ker\widetilde{L}^{2m-k} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ $\oplus(\dfrac{H_{dR}^{2m+2-k}(M)}{Im\widetilde{L}^{2m-k}} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ $\oplus(\dfrac{H_{dR}^{2m+1-k}(M)}{Im\widetilde{L}^{2m-1-k}} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$	0	$\widetilde{L}^r : H_{dR}^r(\widetilde{M}) \to H_{dR}^{r+2}(\widetilde{M})$ $[\widetilde{\alpha}] \mapsto [\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\Omega}]$ $\widetilde{L}^r$ inyectiva si $r \leq m-1$ $\widetilde{L}^r$ sobre si $r \geq m+1$.

LJ-homología de variedades de Poisson (continuación)

TIPO	LJ-HOMOLOGIA	CLASE MODULAR	OBSERVACIONES
Dual de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ unimodular de dimensión n	$H_k^{LJ}(\mathfrak{g}^*) \cong H_{LJ}^{n-k+1}(\mathfrak{g}^*)$	0	
Dual del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto (dim $\mathfrak{g} = n$)	$H_k^{LJ}(\mathfrak{g}^*) \cong$ $H_{LJ}^{n-k+1}(\mathfrak{g}^*) \cong (H^{n-k+1}(\mathfrak{g}) \otimes$ $Inv) \otimes (H^{n-k}(\mathfrak{g}) \otimes Inv)$	0	$Inv \equiv$subálgebra de las funciones Casimires de $\mathfrak{g}^*$

LJ-homología de variedades de Jacobi no Poisson

TIPO	LJ-HOMOLOGIA	CLASE MODULAR	OBSERVACIONES
M^{2m+1} contacto	$H_k^{LJ}(M) = \{0\}$	$[(-(m+1)E, 0)]$ $\neq 0$	$E \equiv$campo de Reeb
(M^{2m}, Ω) g.c.s. de tipo finito con 1-forma de Lee $\omega = df$	$H_k^{LJ}(M) \cong$ $\dfrac{H_{dR}^{2m+1-k}(M)}{Im\bar{L}^{2m-k-1}} \oplus ker\bar{L}^{2m-k}$	0	$\bar{L}^r : H_{dR}^r(M) \to H_{dR}^{r+2}(M)$ $[\alpha] \mapsto [e^{-f}\alpha \wedge \Omega]$
(M^{2m}, Ω) l.c.s. con 1-forma de Lee ω y $dimH_{\omega_i}^*(M) < \infty$ $(i = 0, 1)$	$H_k^{LJ}(M) \cong$ $\dfrac{H_{\omega_1}^{2m+1-k}(M)}{ImL^{2m-k-1}} \oplus kerL^{2m-k}$	$[(-(m+1)E, 0)]$	$L^r : H_{\omega_0}^r(M) \to H_{\omega_1}^{r+2}(M)$ $[\alpha] \mapsto [\alpha \wedge \Omega]$ $\omega_0 = -m\omega$, $\omega_1 = -(m+1)\omega$

LJ-homología de variedades de Jacobi no Poisson (continuación)

TIPO	LJ-HOMOLOGIA	CLASE MODULAR	OBSERVACIONES
M^{2m} l.c.s. compacta con 1-forma de Lee ω paralela con respecto a una métrica Riemanniana	$H_k^{LJ}(M) = \{0\}$	$[(-(m+1)E, 0)]$ $\neq 0$	
Esfera unidad $S^{n-1}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie compacto ($dim\mathfrak{g} = n$)	$H_k^{LJ}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong$ $H_{LJ}^{n-k}(S^{n-1}(\mathfrak{g})) \cong$ $H^{n-k}(\mathfrak{g}) \otimes Inv$	0	Inv $\equiv$subálgebra de las funciones constantes sobre las hojas de la foliación característica

CAPÍTULO 5

Estructuras de Nambu-Poisson y de Nambu-Jacobi. Algebroides de Leibniz

5.1 Estructuras de Nambu-Poisson

En esta primera sección del Capítulo 5 recordaremos la noción de variedad de Nambu-Poisson y mostraremos algunos ejemplos. Además, describiremos la foliación característica asociada a este tipo de estructuras.

5.1.1 Variedades de Nambu-Poisson. Ejemplos

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n.
Un *corchete de Nambu-Poisson de orden* m ($m \leq n$) sobre M (ver [108]) es una aplicación m-lineal $\{,\ldots,\} : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times \ldots^{(m} \ldots \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ satisfaciendo las siguientes propiedades:
(1) *Antisimetría:* si $f_1,\ldots,f_m \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ entonces

$$\{f_1,\ldots,f_m\} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\{f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(m)}\},$$

para todo $\sigma \in \mathfrak{S}(m)$, donde $\mathfrak{S}(m)$ es el grupo de las permutaciones de orden m y $\varepsilon(\sigma)$ es la paridad de la permutación σ.

(2)*Regla de Leibniz:* si $f_1, g_1, f_2, \dots, f_m \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ entonces

$$\{f_1 g_1, f_2, \dots, f_m\} = f_1\{g_1, f_2, \dots, f_m\} + g_1\{f_1, f_2, \dots, f_m\}.$$

(3)*Identidad Fundamental:* si $f_1, \dots, f_{m-1}, g_1, \dots, g_m \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ entonces

$$\{f_1, \dots, f_{m-1}, \{g_1, \dots, g_m\}\} = \sum_{i=1}^{m} \{g_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{m-1}, g_i\}, \dots, g_m\}.$$

Dado un corchete de Nambu-Poisson $\{,\dots,\}$, podemos definir un m-vector Λ, como sigue

$$\Lambda(df_1, \dots, df_m) = \{f_1, \dots, f_m\},$$

para $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Al par (M, Λ) se le denomina *variedad de Nambu-Poisson de orden m.*
El siguiente teorema describe la estructura local de los corchetes de Nambu-Poisson de orden m, con $m \geq 3$.

Teorema 5.1.1 *[2, 36, 52, 92, 100] Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. El m-vector Λ, $3 \leq m \leq n$, define una estructura de Nambu-Poisson sobre M si y sólo si para todo $x \in M$, con $\Lambda(x) \neq 0$, existen coordenadas locales $(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n)$ alrededor de x tal que*

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ejemplos 5.1.2 *i)* Sea M una variedad orientada n-dimensional y elegimos una forma de volumen ν sobre M. Entonces, podemos considerar el siguiente corchete de Nambu-Poisson $\{,\dots,\}_\nu$ definido por la fórmula

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_n = \{f_1, \dots, f_n\}_\nu \nu.$$

Denotaremos por Λ_ν la estructura de Nambu-Poisson de orden n dada por este corchete.
De hecho, si (M, Λ) es una variedad de Nambu-Poisson de orden n y de dimensión n, tal que $\Lambda \neq 0$ en todo punto, entonces existe una forma de volumen ν sobre M tal $\Lambda = \Lambda_\nu$.

ii) Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$ y sea $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Entonces $i(df)\Lambda$ define una estructura de Nambu-Poisson sobre M de orden $m-1$ (ver [52]). De hecho en [43] se prueba que las variedades de Nambu-Poisson pueden ser definidas inductivamente usando la construcción descrita en este ejemplo. Más concretamente, ellos demuestran que si $m \geq 3$ y Λ es un m-vector sobre una variedad M, entonces Λ define una estructura de Nambu-Poisson de orden m sobre M si y sólo si las contracciones $i(df)\Lambda$ definen una estructura de Nambu-Poisson sobre M de orden $m-1$, para todo $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Por otra parte, puesto que una 1-forma cerrada es localmente exacta, se tiene que si (M, Λ) es una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$, y θ es una 1-forma cerrada sobre M, entonces $i(\theta)\Lambda$ es una estructura de Nambu-Poisson de orden $m-1$ sobre M.
Si ahora consideramos la estructura de Nambu-Poisson Λ_ν de orden n asociada con un volumen ν sobre una variedad orientada M de dimensión n (ver Ejemplo i)) y una 1-forma θ sobre M, entonces usando el Teorema 5.1.1 podemos probar fácilmente que $(M, i(\theta)\Lambda_\nu)$ es una estructura de Nambu-Poisson si y sólo si θ es una 1-forma cerrada.

5.1.2 La foliación característica de una variedad de Nambu-Poisson

Describiremos a continuación la foliación característica asociada a una variedad de Nambu-Poisson.
Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m y sea k un entero tal que $k \leq m$.
Si $\wedge^k(T^*M)$ (respectivamente, $\wedge^{m-k}(TM)$) denota el fibrado vectorial de las k-formas (respectivamente, $(m-k)$-vectores) entonces Λ induce un homomorfismo de fibrados vectoriales $\#_\Lambda^k : \wedge^k(T^*M) \to \wedge^{m-k}(TM)$ definido de la siguiente forma

$$\#_\Lambda^k(\beta) = i(\beta)\Lambda(x), \tag{5.1}$$

para $\beta \in \wedge^k(T_x^*M)$ y $x \in M$, donde $i(\beta)$ es la contracción por β. Denotamos también por $\#_\Lambda^k : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^{m-k}(M)$ el homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por

$$\#_\Lambda^k(\alpha)(x) = \#_\Lambda^k(\alpha(x)), \tag{5.2}$$

para toda $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $x \in M$.

Observación 5.1.3 Es claro que la aplicación $\#_\Lambda^k : \Omega^k(M) \to \mathcal{V}^{m-k}(M)$ induce un isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos $\overline{\#}_\Lambda^k : \dfrac{\Omega^k(M)}{ker\#_\Lambda^k} \to \#_\Lambda^k(\Omega^k(M))$ definido por

$$\overline{\#}_\Lambda^k([\alpha]) = \#_\Lambda^k(\alpha), \tag{5.3}$$

para todo $[\alpha] \in \dfrac{\Omega^k(M)}{ker\#_\Lambda^k}$.

Ahora, sean $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Definimos el campo de vectores $X^\Lambda_{f_1 \cdots f_{m-1}}$ como sigue

$$X^\Lambda_{f_1 \cdots f_{m-1}} = \#_\Lambda^{m-1}(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{m-1}). \tag{5.4}$$

$X^\Lambda_{f_1 \cdots f_{m-1}}$ es el *campo hamiltoniano* asociado a las funciones $f_1, \ldots, f_{m-1}$.
De la identidad fundamental, se sigue que los campos hamiltonianos son automorfismos infinitesimales de Λ, es decir,

$$\mathcal{L}_{X^\Lambda_{f_1 \cdots f_{m-1}}} \Lambda = 0, \tag{5.5}$$

para todo $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Si $m \geq 3$, (5.5) implica que (ver [54])

$$\mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)} \Lambda = (-1)^m \#_\Lambda^m(d\alpha)\Lambda, \tag{5.6}$$

para todo $\alpha \in \Omega^{m-1}(M)$.
Nótese que (5.6) no es cierta para $m = 2$.

Definición 5.1.4 Un punto x de una variedad de Nambu-Poisson (M, Λ) de orden $m \geq 3$ se dice que es *regular* si $\Lambda(x) \neq 0$. Si todos los puntos de M son regulares, entonces, la variedad de Nambu-Poisson (M, Λ) es *regular*.

Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$, y consideramos la *distribución característica* $\mathcal{D}$ sobre M, dada por

$$\begin{array}{rcl} x \in M & \to & \mathcal{D}(x) = \#_{\Lambda}^{m-1}(\wedge^{m-1}(T_x^*M)) \\ & = & \langle \{X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}}(x)/f_1,\ldots,f_{m-1} \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})\}\rangle \subseteq T_xM. \end{array}$$

Entonces, $\mathcal{D}$ define una foliación generalizada sobre M cuyas hojas son o bien puntos o bien variedades m-dimensionales dotadas con una estructura Nambu-Poisson inducida por una forma de volumen (ver [52]).
Usando el Teorema 5.1.1, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.5 *Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson regular de orden m, con $3 \leq m$, y de dimensión n. Entonces:*
(i) $\mathcal{D}$ define una foliación sobre M de dimensión m.
(ii) Para todo $k \in \{0,\ldots,m\}$, $ker\#_{\Lambda}^{k}$ (respectivamente, $\#_{\Lambda}^{k}(\wedge^k(T^*M))$), es un subfibrado vectorial de $\wedge^k(T^*M) \to M$ (respectivamente, $\wedge^{m-k}(TM) \to M$) de rango $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$ (respectivamente, $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$), y el homomorfismo $\#_{\Lambda}^{k} : \wedge^k(T^*M) \to \wedge^{m-k}(TM)$ induce un isomorfismo de fibrados vectoriales

$$\overline{\#}_{\Lambda}^{k} : \frac{\wedge^k(T^*M)}{ker\#_{\Lambda}^{k}} \to \#_{\Lambda}^{k}(\wedge^k(T^*M)).$$

(iii) Las secciones $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$-diferenciables del fibrado vectorial $\#_{\Lambda}^{k}(\wedge^k(T^*M))$ $\to M$ son los $(m-k)$-vectores sobre M que son tangentes a $\mathcal{D}$.

Observación 5.1.6 $i)$ La notación $\overline{\#}_{\Lambda}^{k}$ está justificada por el siguiente hecho.
El espacio de las secciones $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$-diferenciables de $\dfrac{\wedge^k(T^*M)}{ker\#_{\Lambda}^{k}} \to M$ (respectivamente, $\#_{\Lambda}^{k}(\wedge^k(T^*M))\to M$) puede ser identificado con $\dfrac{\Omega^k(M)}{ker\#_{\Lambda}^{k}}$ (respectivamente, $\#_{\Lambda}^{k}(\Omega^k(M))$) de tal forma que el correspondiente isomorfismo de $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$-módulos inducido por $\#_{\Lambda}^{k}$ es justamente la aplicación $\overline{\#}_{\Lambda}^{k}$: $\dfrac{\Omega^k(M)}{ker\#_{\Lambda}^{k}} \to \#_{\Lambda}^{k}(\Omega^k(M))$ dada por (5.3).

ii) Recordamos que un $(m-k)$-vector P sobre M es tangente a $\mathcal{D}$ si

$$i(\alpha(x))(P(x)) = 0,$$

para todo $x \in M$ y para todo $\alpha(x) \in \mathcal{D}^0(x)$, donde $\mathcal{D}^0(x)$ es el anulador de $\mathcal{D}(x)$ en T_x^*M. Nótese que $\mathcal{D}^0(x) = ker((\#_\Lambda^1)_{|T_x^*M})$, para todo $x \in M$.

5.2 Estructuras de Nambu-Jacobi

En esta sección, de forma similar a como se hizo para variedades de Nambu-Poisson en la anterior, recordaremos la noción de variedad de Nambu-Jacobi mostrando algunos ejemplos y describiremos la foliación característica asociada a este tipo de estructuras.

5.2.1 Variedades de Nambu-Jacobi. Ejemplos

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Un *corchete de Nambu-Jacobi* de orden m ($m \leq n$) sobre M (ver [92]) es una aplicación m-lineal $\{,\ldots,\} : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times \ldots^{(m} \ldots \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ que satisface las siguientes propiedades:
i)*Antisimetría:* si $f_1,\ldots,f_m \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ entonces

$$\{f_1,...,f_m\} = \varepsilon_\sigma\{f_{\sigma(1)},...,f_{\sigma(m)}\},$$

para todo $\sigma \in \mathfrak{S}(m)$, donde $\mathfrak{S}(m)$ es el grupo de las permutaciones de orden m y ε_σ es la paridad de la permutación σ.
ii) $\{,...,\}$ *es un operador diferencial de primer orden sobre* M *con respecto a cada argumento:* si $f_1, g_1, f_2, \ldots, f_m \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ entonces

$$\{f_1g_1, f_2, ..., f_m\} = f_1\{g_1, f_2, ..., f_m\} + g_1\{f_1, f_2, ..., f_m\} - f_1g_1\{1, f_2, ..., f_m\}.$$

iii)*Identidad Fundamental:* si $f_1,\ldots,f_{m-1}, g_1,\ldots,g_m \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ entonces

$$\{f_1,...,f_{m-1},\{g_1,...,g_m\}\} = \sum_{i=1}^{m}\{g_1,...,g_{i-1},\{f_1,...,f_{m-1},g_i\},g_{i+1},...,g_m\}.$$

Dado un corchete de Nambu-Jacobi, $\{,\ldots,\}$, podemos definir un m-vector Λ y un $(m-1)$-vector $\Box$ sobre M como sigue:

$$\Box(df_1,...,df_{m-1}) = \{1,f_1,...,f_{m-1}\},$$
$$\Lambda(df_1,...,df_m) = \{f_1,...,f_m\} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i f_i\{1,f_1,...,\hat{f}_i,...,f_m\},$$

para todo $f_1,...,f_m \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Al triple $(M,\Lambda,\Box)$ se le denomina *variedad de Nambu-Jacobi*. Nótese que si $\Box = 0$, entonces (M,Λ) es una variedad de Nambu-Poisson de orden m (ver Sección 5.1). Además se tiene que si $(M,\Lambda,\Box)$ es una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$, entonces Λ y $\Box$ son estructuras de Nambu-Poisson sobre M de órdenes m y $m-1$, respectivamente (ver [92]).

Definición 5.2.1 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi. Diremos que un punto x de M es regular si $\Lambda(x) \neq 0$ y $\Box(x) \neq 0$.*

El siguiente teorema describe la estructura local de un corchete de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$, en un entorno de un punto regular.

Teorema 5.2.2 *[92] Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, con $m \geq 3$, y de dimensión n. Entonces, en un entorno de cada punto regular $x \in M$, existen coordenadas locales $(x^1,\ldots,x^m,x^{m+1},\ldots,x^n)$ alrededor de x tal que*

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x^m} \qquad y \qquad \Box = \frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{m-1}}.$$

Ejemplos 5.2.3 *i)* Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, con $m \geq 3$, y de dimensión n y sea θ una 1-forma cerrada sobre M. Entonces $(\Lambda, i(\theta)\Lambda)$ es una estructura de Nambu-Jacobi de orden m sobre M (ver [53]).

En particular, si M es una variedad orientada de dimensión n y Λ_ν denota la estructura de Nambu-Poisson definida por una forma de volumen ν sobre M (ver Ejemplo 5.1.2 *i)*), $(M,\Lambda_\nu,i(\theta)\Lambda_\nu)$ es una variedad de Nambu-Jacobi de orden n, donde θ es una 1-forma cerrada sobre M. De hecho, $(\Lambda_\nu, i(\theta)\Lambda_\nu)$ es

una estructura de Nambu-Jacobi si y sólo si θ es una 1-forma cerrada sobre M (ver [53, 92]).
ii) Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$, (respectivamente, una variedad simpléctica de orden 2). Entonces $(0, \Lambda)$ es una estructura de Nambu-Jacobi de orden $m+1$ (respectivamente, de orden 3) sobre M (ver [53]).

5.2.2 La foliación característica de una variedad de Nambu-Jacobi

Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$, y sean $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Introducimos el campo de vectores hamiltoniano $X_{f_1 \cdots f_{m-1}}$ sobre $(M, \Lambda, \Box)$ asociado a las funciones $f_1, \ldots, f_{m-1}$ como sigue

$$X_{f_1 \cdots f_{m-1}} = X^{\Lambda}_{f_1 \cdots f_{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} f_i X^{\Box}_{f_1 \cdots \hat{f}_i \cdots f_{m-1}}. \tag{5.7}$$

donde $X^{\Lambda}_{f_1 \cdots f_{m-1}}$ (respectivamente, $X^{\Box}_{f_1 \cdots \hat{f}_i \cdots f_{m-1}}$) es el campo hamiltoniano de la estructura de Nambu-Poisson Λ (respectivamente, $\Box$) asociado a las funciones $f_1, \ldots, f_{m-1}$ (respectivamente, $f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_{m-1}$).
Los campos hamiltonianos generan una foliación generalizada $\mathcal{F}$ sobre M, *la foliación característica de* $(M, \Lambda, \Box)$, cuyo espacio característico en cada punto $x \in M$ es

$$T_x\mathcal{F} = \#^{m-1}_{\Lambda}(\wedge^{m-1}(T^*_xM)) + \#^{m-2}_{\Box}(\wedge^{m-2}(T^*_xM))$$

donde $\#^{m-1}_{\Lambda}$ (respectivamente, $\#^{m-2}_{\Box}$) es el homomorfismo de fibrados vectoriales definido como en (5.1) (ver [53]).
Si L es la hoja de $\mathcal{F}$ que pasa por x, entonces, $(\Lambda, \Box)$ induce una estructura de Nambu-Jacobi $(\Lambda_L, \Box_L)$ sobre L tal que (ver [53]):
i) Si $\Lambda(x) \neq 0$ entonces L tiene dimensión m, Λ_L es una estructura de Nambu-Poisson de orden m asociada a una forma de volumen sobre L y existe una 1-forma cerrada θ_L tal que $\Box_L = i(\theta_L)\Lambda_L$.
ii) Si $\Lambda(x) = 0$ y $\Box(x) \neq 0$, entonces L tiene dimensión $m-1$ y $\Lambda_L = 0$. Además se tiene:

(a) Si $m > 3$, entonces $\Box_L$ es una estructura de Nambu-Poisson de orden $m-1$ asociada a una forma de volumen sobre L.

(b) Si $m = 3$, entonces $\Box_L$ es una estructura simpléctica sobre L.

iii) Si $\Lambda(x) = 0$ y $\Box(x) = 0$, entonces $L = \{x\}$ y la estructura de Nambu-Jacobi inducida es la trivial.

5.3 Algebroides de Leibniz y cohomología

5.3.1 Algebroides de Leibniz

En [54] se ha introducido la noción de algebroide de Leibniz, una generalización natural de la noción de algebroide de Lie. De hecho, los algebroides de Leibniz pueden considerarse como la versión no conmutativa de los algebroides de Lie. Comenzaremos esta sección recordando su definición. Posteriormente mostraremos que toda variedad de Nambu-Poisson tiene asociado un algebroide de Leibniz.

Primeramente, recordamos la definición de un álgebra de Leibniz real (ver [20, 85, 86, 87]). Una *estructura de álgebra de Leibniz a la izquierda* sobre un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal $\{\ ,\ \} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfaciendo la *identidad de Leibniz a la izquierda*, es decir,

$$\{a_1, \{a_2, a_3\}\} - \{\{a_1, a_2\}, a_3\} - \{a_2, \{a_1, a_3\}\} = 0, \tag{5.8}$$

para $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{g}$. En tal caso, al par $(\mathfrak{g}, \{\ ,\ \})$ se denomina un *álgebra de Leibniz a la izquierda.*

Además, si se requiere la condición de antisimetría, entonces $(\mathfrak{g}, \{\ ,\ \})$ es un álgebra de Lie. En este sentido, un álgebra de Leibniz es la versión no conmutativa de un álgebra de Lie.

Observación 5.3.1 De igual forma puede definirse un álgebra de Leibniz a la derecha sustituyendo (5.8) por

$$\{a_1, \{a_2, a_3\}'\}' - \{\{a_1, a_2\}', a_3\}' + \{\{a_1, a_3\}', a_2\}' = 0.$$

Nótese que si $(\mathfrak{g}, \{\ ,\ \})$ es un álgebra de Leibniz a la izquierda entonces el corchete $\{\ ,\ \}' : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dado por

$$\{a_1, a_2\}' = \{a_2, a_1\}$$

define una estructura de álgebra de Leibniz a la derecha.

Ahora, la noción de algebroide de Leibniz puede ser introducida de la misma forma que la de algebroide de Lie.

Definición 5.3.2 *Una estructura de algebroide de Leibniz a la izquierda sobre un fibrado vectorial diferenciable $\pi : A \to M$ es un par formado por una estructura de álgebra de Leibniz a la izquierda $[\![\ ,\ ]\!]$ sobre el espacio $\Gamma(A)$ de las secciones globales de $\pi : A \to M$ y un morfismo de fibrados vectoriales $\rho : A \to TM$, llamado aplicación ancla, tal que la aplicación inducida $\rho : \Gamma(A) \to \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ satisface la siguiente relación:*

$$[\![s_1, fs_2]\!] = f[\![s_1, s_2]\!] + \rho(s_1)(f)s_2. \tag{5.9}$$

Al triple $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ se le denomina algebroide de Leibniz sobre M.

Observación 5.3.3 Como consecuencia de la compatibilidad entre la aplicación ancla y el corchete de Leibniz, se obtiene que la aplicación ancla es un homomorfismo de álgebras de Leibniz, es decir:

$$\rho[\![s_1, s_2]\!] = [\rho(s_1), \rho(s_2)] \tag{5.10}$$

Observación 5.3.4 En lo que sigue, si no se especifica el término derecha o izquierda, entenderemos que un álgebra de Leibniz es un álgebra de Leibniz a la izquierda.

5.3.2 Ejemplos de algebroides de Leibniz

A continuación mostraremos algunos ejemplos de algebroides de Leibniz.
i) ALGEBROIDES DE LIE. Es evidente que un algebroide de Leibniz $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ sobre M es un algebroide de Lie si y sólo si su corchete de Leibniz $[\![\ ,\ ]\!]$ sobre $\Gamma(A)$ es antisimétrico.

ii) Algebroide de Leibniz sobre $A \times \mathbb{R}$, con A algebroide de Lie (ver [120]). Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!]_A, \rho_A)$ un algebroide de Lie sobre M. Consideramos el corchete $[\![\ ,\ ]\!]_{A\times\mathbb{R}}$ sobre el espacio $\Gamma(A \times \mathbb{R})$ de las secciones del fibrado vectorial $A \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ definido por

$$[\![(X, f), (Y, g)]\!]_{A\times\mathbb{R}} = ([\![X, Y]\!]_A, \rho_A(X)(g))$$

para $(X, f), (Y, g) \in \Gamma(A) \times C^\infty(A, \mathbb{R}) \cong \Gamma(A \times \mathbb{R})$. Si $\rho_{A\times\mathbb{R}} : \Gamma(A \times \mathbb{R}) \to \mathfrak{X}(M)$ es la aplicación dada por

$$\rho_{A\times\mathbb{R}}(X, f) = \rho_A(X)(f), \quad \text{para} \quad (X, f) \in \Gamma(A) \times C^\infty(A, \mathbb{R}),$$

entonces $(A \times \mathbb{R}, [\![\ ,\ ]\!]_{A\times\mathbb{R}}, \rho_{A\times\mathbb{R}})$ es un algebroide de Leibniz sobre M.
iii) Álgebras de Leibniz. Las álgebras de Leibniz son los algebroides de Leibniz con espacio base un punto. En este caso el ancla es la aplicación idénticamente nula.
iv) algebroides de Courant (ver [120]). *Un algebroide de Courant* ([83, 106]) es un fibrado vectorial $A \to M$ con una forma bilineal simétrica no degenerada $(\ ,\ )$ sobre el fibrado, un corchete (no necesariamente antisimétrico) $[\![\ ,\ ]\!]$ sobre $\Gamma(A)$ y una aplicación fibrada $\rho : A \to TM$ tal que las siguientes propiedades se satisfacen:

1. $[\![e_1, [\![e_2, e_3]\!]]\!] = [\![[\![e_1, e_2]\!], e_3]\!] + [\![e_2, [\![e_1, e_3]\!]]\!]$.
2. $\rho[\![e_1, e_2]\!] = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$.
3. $[\![e_1, fe_2]\!] = f[\![e_1, e_2]\!] + \rho(e_1)(f)e_2$.
4. $([\![e_1, e_1]\!], e_2) = \dfrac{1}{2}\rho(e_2)(e_1, e_1)$.
5. $\rho(e_1)[\![h_1, h_2]\!] = ([\![e_1, h_1]\!], h_2) + (h_1, [\![e_1, h_2]\!])$.

Las propiedades $1, 2$ y 3 implican que los algebroides de Courant son ejemplos particulares de algebroides de Leibniz.
v) Un algebroide de Leibniz asociado a una variedad de Nambu-Poisson. ([54]) Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m,

$3 \leq m$, y de dimensión n. Consideramos el corchete $[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda : \Omega^{m-1}(M) \times \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^{m-1}(M)$ de $(m-1)$-formas definido por

$$[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda = \mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)}\beta + (-1)^m \#_\Lambda^m(d\alpha)\beta \qquad (5.11)$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^{m-1}(M)$.
Entonces, $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ es un algebroide de Leibniz (ver [54]).
En particular, tenemos que

$$\#_\Lambda^{m-1}([\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda) = [\#_\Lambda^{m-1}(\alpha), \#_\Lambda^{m-1}(\beta)] \qquad (5.12)$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^{m-1}(M)$.
Nótese que si (M, Λ) es una variedad de Poisson, entonces podemos considerar el corchete de 1-formas definido como en (5.11). Sin embargo, este corchete, en general, no es un corchete de Leibniz.
La estructura de algebroide de Leibniz $([\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ asociada a una variedad de Nambu-Poisson (M, Λ) de orden m, $m \geq 3$, caracteriza la estructura de Nambu-Poisson en el siguiente sentido.

Proposición 5.3.5 *Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y m un entero, con $3 \leq m \leq n$. Sea Λ un m-vector sobre M. Consideramos la aplicación $\#_\Lambda^{m-1} : \Omega^{m-1}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ y el corchete $[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda : \Omega^{m-1}(M) \times \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^{m-1}(M)$ definidos como en (5.2) y (5.11), respectivamente. Entonces, (M, Λ) es una variedad de Nambu-Poisson si y sólo si $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ es un algebroide de Leibniz.*

Demostración.
Supongamos que $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ es un algebroide de Leibniz. Definimos el siguiente corchete de funciones $\{, \dots, \} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \dots^{m)} \dots \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$\{f_1, \dots, f_m\} = \Lambda(df_1, \dots, df_m). \qquad (5.13)$$

Este corchete es antisimétrico y es una derivación en cada uno de sus argumentos.

A continuación, comprobaremos que este corchete de funciones cumple la identidad fundamental. Para ello, consideramos los campos hamiltonianos

$$X_{f_1\dots f_{m-1}} = \#_\Lambda^{m-1}(df_1 \wedge \dots \wedge df_{m-1}),$$

con $f_1, \dots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Nota que

$$X_{f_1\dots f_{m-1}}(f) = \{f_1, \dots, f_{m-1}, f\}.$$

Ya que $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ es un algebroide de Leibniz entonces

$$\#_\Lambda^{m-1}[\![df_1 \wedge \dots \wedge df_{m-1}, dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{m-1}]\!]_\Lambda = [X_{f_1\dots f_{m-1}}, X_{g_1\dots g_{m-1}}]. \quad (5.14)$$

Por otra parte, de (5.11) deducimos que

$$\begin{aligned}[\![df_1 \wedge \dots \wedge df_{m-1}, dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{m-1}]\!]_\Lambda = & \sum_{i=1}^{m-1} dg_1 \wedge \dots \wedge d\{f_1, \dots, f_{m-1}, g_i\}\wedge \\ & \wedge \dots \wedge dg_{m-1}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}&\#_\Lambda^{m-1}([\![df_1 \wedge \dots \wedge df_{m-1}, dg_1 \wedge \dots \wedge dg_{m-1}]\!]_\Lambda)(g_m) = \\ &\sum_{i=1}^{m-1} X_{g_1\dots g_{i-1}\{f_1,\dots,f_{m-1},g_i\}g_{i+1}\dots g_{m-1}}(g_m) = \\ &\sum_{i=1}^{m-1}\{g_1, \dots, g_{i-1}, \{f_1, \dots, f_{m-1}, g_i\}, \dots, g_{m-1}, g_m\}.\end{aligned} \quad (5.15)$$

Haciendo uso de (5.14) y (5.15), concluimos

$$\begin{aligned}\{f_1, \dots, f_{m-1}, \{g_1, \dots, g_m\}\} \;\; = \;\; & \sum_{i=1}^{m}\{g_1, \dots, g_{i-1}, \{f_1, \dots, \\ & f_{m-1}, g_i\}, g_{i+1}, \dots, g_{m-1}, g_m\},\end{aligned}$$

esto es, $\{, \dots, \}$ satisface la identidad fundamental. En consecuencia, (M, Λ) es una variedad de Nambu-Poisson.

■

Por otra parte, en general, el corchete definido en (5.11) no es antisimétrico y consecuentemente el algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ no es un algebroide de Lie. En [54] se caracteriza cuándo este algebroide de Leibniz es un algebroide de Lie sobre una variedad orientada. De forma más precisa se prueba que sobre una variedad orientada M de dimensión n, $n \geq 3$, las únicas estructuras no nulas de Nambu-Poisson de orden m mayor que 2 sobre M para las cuales el algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ es un algebroide de Lie son aquellas definidas por n-vectores no idénticamente nulos.

vi) Otro algebroide de Leibniz asociado a una estructura de Nambu-Poisson. ([46]) Sea (M, Λ) una variedad n-dimensional de Nambu-Poisson de orden m, $2 \leq m$, y de dimensión n. Consideramos el corchete $[\![\ ,\ ]\!]'_\Lambda : \Omega^{m-1}(M) \times \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^{m-1}(M)$ de $(m-1)$-formas definido por

$$[\![\alpha, \beta]\!]'_\Lambda = \mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)}\beta - i(\#_\Lambda^{m-1}\beta)d\alpha \tag{5.16}$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^{m-1}(M)$.

Entonces $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]'_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ es un algebroide de Leibniz (ver [46]). También en este caso, este algebroide de Leibniz caracteriza la estructura de Nambu-Poisson en el sentido de que si consideramos sobre una variedad M, de dimensión n, el corchete de $(m-1)$-formas $[\![\ ,\ ]\!]'$ definido como en (5.16) a partir de un m-vector Λ, entonces Λ induce una estructura de Nambu-Poisson sobre M si y sólo si $([\![\ ,\ ]\!]'_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ induce una estructura de algebroide de Leibniz sobre el fibrado vectorial $\wedge^{m-1}T^*M \to M$ (ver [46]).

vii) Emparejamiento de algebroides de Leibniz. Recordemos, en primer lugar, la noción de representación de un álgebra de Leibniz sobre un espacio vectorial.

Una *representación de un álgebra de Leibniz a izquierda*, $(\mathfrak{g}, \{\ ,\ \})$ sobre un espacio vectorial real V, es un par de aplicaciones $\mathbb{R}$-bilineales $\varphi_1 : \mathfrak{g} \times V \to V$ y $\varphi_2 : V \times \mathfrak{g} \to V$ satisfaciendo las siguientes propiedades (ver [86])

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\{a_1, a_2\}, m) = \varphi_1(a_1, \varphi_1(a_2, m)) - \varphi_1(a_2, \varphi_1(a_1, m)),\\
&\varphi_2(m, \{a_1, a_2\}) = \varphi_2(\varphi_2(m, a_1), a_2) + \varphi_1(a_1, \varphi_2(m, a_2)),\\
&\varphi_2(\varphi_2(m, a_1), a_2) + \varphi_2(\varphi_1(a_1, m), a_2) = 0.
\end{aligned}$$

Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Leibniz sobre un variedad M y sea E un fibrado vectorial sobre M. Supongamos que el par $(\varphi_1 : \Gamma(A) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$ $\varphi_2 : \Gamma(E) \times \Gamma(A) \to \Gamma(E))$ es una representación del álgebra de Leibniz $(\Gamma(A), [\![\ ,\ ]\!])$ sobre $\Gamma(E)$. Entonces, (φ_1, φ_2) es una *representación de Leibniz de A sobre E* si

$$\varphi_1(s, fr) = f\varphi_1(s, r) + \rho(s)(f)r, \quad \varphi_2(r, fs) = f\varphi_2(r, s),$$

para todo $s \in \Gamma(A)$, $r \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
En el caso particular en el que $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ sea un algebroide de Lie sobre M y $\varphi : \Gamma(A) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ sea una representación de A sobre E (ver [88]), entonces el par $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ define una representación de Leibniz de A sobre E, donde $\widetilde{\varphi} : \Gamma(E) \times \Gamma(A) \to \Gamma(E)$ es la aplicación dada por $\widetilde{\varphi}(r, s) = -\varphi(s, r)$, para todo $s \in \Gamma(A)$ y $r \in \Gamma(E)$. Por tanto, la noción de representación de un algebroide de Leibniz sobre un fibrado vectorial puede ser vista como una generalización de la noción de representación de un algebroide de Lie sobre un fibrado vectorial.
La siguiente definición es una extensión a algebroides de Leibniz de la definición de emparejamiento de álgebras de Lie y de emparejamiento de algebroides de Lie (ver [66, 90, 97]).

Definición 5.3.6 *Dos algebroides de Leibniz $(A_1, [\![\ ,\ ]\!]_1, \rho_1)$ y $(A_2, [\![\ ,\ ]\!]_2, \rho_2)$ sobre M se dice que están emparejados si la suma de Whitney $A = A_1 \oplus A_2$ de los fibrados vectoriales tiene una estructura de algebroide de Leibniz $([\![\ ,\ ]\!], \rho)$, tal que A_1 y A_2 son subalgebroides de Leibniz de A.*

Usando la identificación $\Gamma(A_1 \oplus A_2) \cong \Gamma(A_1) \oplus \Gamma(A_2)$, la definición anterior implica que

$$\rho(s_1, s_2) = \rho_1(s_1) + \rho_2(s_2) \quad \text{y} \quad [\![s_i, s_i']\!] = [\![s_i, s_i']\!]_i,$$

para todo $s_i, s_i' \in \Gamma(A_i), i \in \{1, 2\}$. Además, si $\Pi_i : \Gamma(A_1 \oplus A_2) \cong \Gamma(A_1) \oplus \Gamma(A_2) \to \Gamma(A_i)$ es la correspondiente proyección, entonces, de la identidad de Leibniz, se deduce que las aplicaciones

$$\varphi_{ik}^j : \Gamma(A_i) \oplus \Gamma(A_k) \to \Gamma(A_j), \quad \varphi_{ik}^j(s_i, s_k) = \Pi_j([\![s_i, s_k]\!]),$$

con $i, k, j \in \{1, 2\}, i \neq k$, definen una representación de Leibniz $(\varphi^1_{21}, \varphi^1_{12})$ de A_2 sobre A_1 y una representación de Leibniz $(\varphi^2_{12}, \varphi^2_{21})$ de A_1 sobre A_2. Además, usando que $\rho : (\Gamma(A), [\![\ ,\ ]\!]) \to (\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ es un homomorfismo de álgebras de Leibniz, se tiene que

[L1] $\rho_i(\varphi^i_{ik}(s_i, s_k)) + \rho_k(\varphi^k_{ik}(s_i, s_k)) = [\rho_i(s_i), \rho_k(s_k)]$, para todo $i, k \in \{1, 2\}$, $i \neq k$.

Por otra parte, la igualdad $[\![s, [\![s', s'']\!]]\!] - [\![[\![s, s']\!], s'']\!] - [\![s', [\![s, s'']\!]]\!] = 0$, para todo $s, s', s'' \in \Gamma(A)$, implica que

[L2] $$[\![s_i, \varphi^i_{ik}(s'_i, s_k)]\!]_i - [\![s'_i, \varphi^i_{ik}(s_i, s_k)]\!]_i = \varphi^i_{ik}([\![s_i, s'_i]\!]_i, s_k) - \varphi^i_{ik}(s_i, \varphi^k_{ik}(s'_i, s_k)) + \varphi^i_{ik}(s'_i, \varphi^k_{ik}(s_i, s_k))$$

[L3] $$[\![s_i, \varphi^i_{ki}(s_k, s'_i)]\!]_i - [\![\varphi^i_{ik}(s_i, s_k), s'_i]\!]_i = \varphi^i_{ki}(s_k, [\![s_i, s'_i]\!]_i) - \varphi^i_{ik}(s_i, \varphi^k_{ki}(s_k, s'_i)) + \varphi^i_{ki}(\varphi^k_{ik}(s_i, s_k), s'_i)$$

[L4] $$[\![\varphi^i_{ki}(s_k, s_i), s'_i]\!]_i + [\![s_i, \varphi^i_{ki}(s_k, s'_i)]\!]_i = \varphi^i_{ki}(s_k, [\![s_i, s'_i]\!]_i) - \varphi^i_{ik}(s_i, \varphi^k_{ki}(s_k, s'_i)) - \varphi^i_{ki}(\varphi^k_{ki}(s_k, s_i), s'_i)$$

para $i, k \in \{1, 2\},\ i \neq k$. Nótese que,

$$\begin{aligned} [\![(s_1, s_2), (s'_1, s'_2)]\!] &= ([\![s_1, s'_1]\!]_1 + \varphi^1_{12}(s_1, s'_2) + \varphi^1_{21}(s_2, s'_1), \\ &\quad [\![s_2, s'_2]\!]_2 + \varphi^2_{12}(s_1, s'_2) + \varphi^2_{21}(s_2, s'_1)). \end{aligned}$$

De hecho, un cálculo directo demuestra la siguiente caracterización de algebroides de Leibniz emparejados.

Teorema 5.3.7 *Dos algebroides de Leibniz $(A_i, [\![\ ,\ ]\!]_i, \rho_i)$, $i \in \{1, 2\}$, están emparejados si y sólo si, existen dos representaciones de Leibniz, $(\varphi^2_{12}, \varphi^2_{21})$ y $(\varphi^1_{21}, \varphi^1_{12})$ de A_1 sobre A_2 y de A_2 sobre A_1 verificando las relaciones [**L1**], [**L2**], [**L3**] y [**L4**].*

A continuación, probaremos que una variedad de Nambu-Jacobi tiene asociados dos algebroides de Leibniz los cuales están emparejados.
Sea $(M, \Lambda, \square)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$. Se tiene que (ver [92])

$$\mathcal{L}_{X^{\square}_{f_1 \cdots f_{m-2}}} \Lambda = 0, \quad \mathcal{L}_{X^{\Lambda}_{f_1 \cdots f_{m-1}}} \square = (-1)^{m-1} \#^1_\Lambda (d(\square(df_1, \dots, df_{m-1}))), \tag{5.17}$$

para todo $f_1,\dots,f_{m-1}\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, donde $X^\Lambda_{f_1\dots f_{m-1}}$ (respectivamente, $X^\Box_{f_1\dots f_{m-2}}$) es el campo hamiltoniano de las funciones $f_1,\dots,f_{m-1}$ (respectivamente, $f_1,\dots,f_{m-2}$) respecto a la estructura de Nambu-Poisson Λ (respectivamente, $\Box$).

Por otra parte, del Teorema 5.2.2, se sigue que

$$\#^{m-2}_\Box(\beta)\wedge\Lambda=0,\quad \#^{m-1}_\Lambda(\alpha)\wedge\Box=(-1)^{m-1}(i(\alpha)\Box)\Lambda, \tag{5.18}$$

para todo $\alpha\in\Omega^{m-1}(M)$ y $\beta\in\Omega^{m-2}(M)$. Así, usando (5.17) y (5.18), se deduce que

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}_{\#^{m-1}_\Lambda(\alpha)}\Box &=& (-1)^{m-1}(\#^1_\Lambda(d(\#^{m-1}_\Box(\alpha)))-\#^m_\Lambda(d\alpha)\Box),\\ \mathcal{L}_{\#^{m-2}_\Box(\beta)}\Lambda &=& (-1)^{m-1}\#^{m-1}_\Box(d\beta)\Lambda.\end{array} \tag{5.19}$$

Además, como

$$[\#^{m-1}_\Lambda(\alpha),\#^{m-2}_\Box(\beta)]=i(\beta)(\mathcal{L}_{\#^{m-1}_\Lambda(\alpha)}\Box)+\#^{m-1}_\Box(\mathcal{L}_{\#^{m-2}_\Lambda(\alpha)}\beta)$$

y

$$[\#^{m-2}_\Box(\beta),\#^{m-1}_\Lambda(\alpha)]=i(\alpha)(\mathcal{L}_{\#^{m-2}_\Box(\beta)}\Lambda)+\#^{m-1}_\Lambda(\mathcal{L}_{\#^{m-2}_\Box(\beta)}\alpha),$$

usando (5.19), se concluye que

$$\left.\begin{array}{l}[\#^{m-1}_\Lambda(\alpha),\#^{m-2}_\Box(\beta)]=\#^{m-1}_\Lambda(\varphi^1_{12}(\alpha,\beta))+\#^{m-2}_\Box(\varphi^2_{12}(\alpha,\beta)),\\ [\#^{m-2}_\Box(\beta),\#^{m-1}_\Lambda(\alpha)]=\#^{m-1}_\Lambda(\varphi^1_{21}(\beta,\alpha)),\end{array}\right\} \tag{5.20}$$

donde $\varphi^1_{12}:\Omega^{m-1}(M)\times\Omega^{m-2}(M)\to\Omega^{m-1}(M)$, $\varphi^1_{21}:\Omega^{m-2}(M)\times\Omega^{m-1}(M)\to\Omega^{m-1}(M)$ y $\varphi^2_{12}:\Omega^{m-1}(M)\times\Omega^{m-2}(M)\to\Omega^{m-2}(M)$ son las aplicaciones dadas por

$$\left.\begin{array}{rcl}\varphi^1_{21}(\beta,\alpha)&=&\mathcal{L}_{\#^{m-2}_\Box(\beta)}\alpha+(-1)^{m-1}\#^{m-1}_\Box(d\beta)\alpha,\\ \varphi^1_{12}(\alpha,\beta)&=&(-1)^{m-1}d(\#^{m-1}_\Box(\alpha))\wedge\beta,\\ \varphi^2_{12}(\alpha,\beta)&=&\mathcal{L}_{\#^{m-1}_\Lambda(\alpha)}\beta+(-1)^m\#^m_\Lambda(d\alpha)\beta.\end{array}\right\} \tag{5.21}$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.3.8 (i) *El par* $(\varphi^1_{21}, \varphi^1_{12})$ *define una representación del algebroide de Leibniz* $(\wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Box, \#^{m-2}_\Box)$ *sobre el fibrado vectorial* $\wedge^{m-1}(T^*M) \to M$.

(ii) *Si* $\varphi^2_{21} : \Omega^{m-2}(M) \times \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^{m-2}(M)$ *es la aplicación idénticamente nula, el par* $(\varphi^2_{12}, \varphi^2_{21})$ *define una representación del algebroide de Leibniz* $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#^{m-1}_\Lambda)$ *sobre el fibrado vectorial* $\wedge^{m-2}(T^*M) \to M$.

Demostración: (i) En [54] (ver relación 3.10) se prueba que para cualquier estructura de Nambu-Poisson Λ sobre M se satisface la siguiente relación

$$\#^m_\Lambda(d[\![\alpha, \alpha']\!]_\Lambda) = \#^{m-1}_\Lambda(\alpha)(\#^m_\Lambda(d\alpha')) - \#^{m-1}_\Lambda(\alpha')(\#^m_\Lambda(d\alpha)). \tag{5.22}$$

De (5.11), (5.21) y (5.22), se obtiene que

$$\varphi^1_{21}([\![\beta, \beta']\!]_\Box, \alpha) = \varphi^1_{21}(\beta, \varphi^1_{21}(\beta', \alpha)) - \varphi^1_{21}(\beta', \varphi^1_{21}(\beta, \alpha))$$

y

$$\varphi^1_{12}(\alpha, [\![\beta, \beta']\!]_\Box) = \varphi^1_{12}(\varphi^1_{12}(\alpha, \beta), \beta') + \varphi^1_{21}(\beta', \varphi^1_{12}(\alpha, \beta')).$$

Por otra parte, usando (5.21) y la identidad de Leibniz, tenemos

$$\varphi^1_{12}(\varphi^1_{12}(\alpha, \beta), \beta') + \varphi^1_{12}(\varphi^1_{21}(\beta, \alpha), \beta') = 0.$$

(ii) Es una consecuencia directa de (5.11), (5.21) y (5.22) .

■

Podemos entonces construir la estructura de algebroide de Leibniz asociada a una variedad de Nambu-Jacobi.

Teorema 5.3.9 *Sea* $(M, \Lambda, \Box)$ *una variedad de Nambu-Jacobi de orden* m, $m \geq 3$. *Los algebroides de Leibniz* $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#^{m-1}_\Lambda)$ *y* $(\wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Box, \#^{m-2}_\Box)$ *asociados a las estructuras de Nambu-Poisson* Λ *y* $\Box$, *respectivamente, están emparejados y si* $([\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$ *es la estructura de algebroide de Leibniz inducida sobre el fibrado vectorial* $\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M) \to M$, *se tiene que*

$$\left.\begin{array}{r}\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\square)}(\alpha,\beta) = \#^{m-1}_{\Lambda}(\alpha) + \#^{m-2}_{\square}(\beta),\\ [\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\square)} = ([\![\alpha,\alpha']\!]_{\Lambda} + (-1)^{m-1}d(\#^{m-1}_{\square}(\alpha))\wedge\beta' +\\ (-1)^{m-1}\#^{m-1}_{\square}(d\beta)\alpha' + \mathcal{L}_{\#^{m-2}_{\square}(\beta)}\alpha', [\![\beta,\beta']\!]_{\square}\\ + \mathcal{L}_{\#^{m-1}_{\Lambda}(\alpha)}\beta' + (-1)^m\#^m_{\Lambda}(d\alpha)\beta').\end{array}\right\} \quad (5.23)$$

Demostración: Usando (5.20) deducimos que las representaciones de Leibniz $(\varphi^1_{21},\varphi^1_{12})$ y $(\varphi^2_{12},\varphi^2_{21})$ satisfacen la propiedad [**L1**]. Ahora, de (5.11), (5.19) and (5.21), obtenemos que

$$\begin{array}{rcl}\varphi^1_{12}([\![\alpha,\alpha']\!]_{\Lambda},\beta) &=& (-1)^{m-1}d(\#^{m-1}_{\Lambda}(\alpha)(\#^{m-1}_{\square}(\alpha')) - \#^{m-1}_{\square}(\mathcal{L}_{\#^{m-1}_{\Lambda}(\alpha)}\alpha'))\wedge\beta\\ && -d((\#^m_{\Lambda}(d\alpha))(\#^{m-1}_{\square}(\alpha')))\wedge\beta,\end{array}$$

lo que implica que (ver (5.11) y (5.21)),

$$\begin{array}{rcl}[\![\alpha,\varphi^1_{12}(\alpha',\beta)]\!]_{\Lambda} - [\![\alpha',\varphi^1_{12}(\alpha,\beta)]\!]_{\Lambda} &=& \varphi^1_{12}([\![\alpha,\alpha']\!]_{\Lambda},\beta) - \varphi^1_{12}(\alpha,\varphi^2_{12}(\alpha',\beta))\\ && +\varphi^1_{12}(\alpha',\varphi^2_{12}(\alpha,\beta)).\end{array}$$

Así, como φ^2_{21} es la aplicación idénticamente nula, se tiene que la relación [**L2**] se satisface.
De forma similar, usando de nuevo (5.11), (5.19) y (5.21), se prueba que las relaciones [**L3**] y [**L4**] también se verifican. Consecuentemente, del Teorema 5.3.7 y la Proposición 5.3.8, se deduce el resultado.

■

Veremos a continuación que el algebroide de Leibniz asociado a una variedad de Nambu-Jacobi caracteriza a la estructura de Nambu-Jacobi.

Proposición 5.3.10 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y m un entero, $3 \le m \le n$. Sean Λ y $\square$ un m-vector y un $(m-1)$-vector, respectivamente sobre M. Consideramos la aplicación $\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\square)} : \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ y el corchete $[\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\square)} : (\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M))^2 \to \Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)$ definidos como en (5.23). Entonces $(M,\Lambda,\square)$ es una variedad de Nambu-Jacobi si y sólo si $(\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\square)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\square)})$ es un algebroide de Leibniz.*

Demostración. Supongamos que Λ (respectivamente, $\Box$) es un m-vector (respectivamente, un $(m-1)$-vector) sobre M y que $(\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M),$ $[\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$ es un algebroide de Leibniz. Definimos el siguiente corchete de funciones $\{,\ldots,\}: C^\infty(M,\mathbb{R})\times \ldots^{m)} \ldots \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\{f_1,\ldots,f_m\} \;=\; & \Lambda(df_1,\ldots,df_m)+\\ & \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}f_i\Box(df_1,\ldots,\widehat{df_i},\ldots,df_m).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Este corchete es antisimétrico y define un operador diferencial de primer orden respecto a cada argumento.
A continuación, comprobaremos que este corchete de funciones cumple la identidad fundamental.
Para ello, consideramos los elementos $s_{f_1\ldots f_{m-1}}$ definidos por

$$s_{f_1\ldots f_{m-1}} = (df_1\wedge\ldots\wedge df_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}f_i df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_{m-1}), \tag{5.25}$$

y los campos asociados

$$X_{f_1\ldots f_{m-1}} = \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(s_{f_1\ldots f_{m-1}}). \tag{5.26}$$

Usando (5.24) se sigue que

$$X_{f_1\ldots f_{m-1}}(f) = \{f_1,\ldots,f_{m-1},f\} + (-1)^m f\Box(df_1,\ldots,df_{m-1}). \tag{5.27}$$

Como $(\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$ es un algebroide de Leibniz entonces

$$\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}[\![s_{f_1\ldots f_{m-1}}, s_{g_1\ldots g_{m-1}}]\!]_{(\Lambda,\Box)} = [X_{f_1\ldots f_{m-1}}, X_{g_1\ldots g_{m-1}}].$$

Por otra parte, de (5.23) concluimos que

$$[\![s_{f_1\ldots f_{m-1}}, s_{g_1\ldots g_{m-1}}]\!]_{(\Lambda,\Box)} = \sum_{i=1}^{m-1} s_{g_1\ldots g_{i-1}\{f_1,\ldots,f_{m-1},g_i\}g_{i+1}\ldots g_{m-1}}.$$

Por tanto,

$$[X_{f_1\dots f_{m-1}}, X_{g_1\dots g_{m-1}}](g_m) = \sum_{i=1}^{m-1} X_{g_1\dots g_{i-1}\{f_1,\dots,f_{m-1},g_i\}g_{i+1}\dots g_{m-1}}(g_m).$$

En particular,

$$\begin{array}{l}[X_{f_1\dots f_{m-1}}, X_{g_1\dots g_{j-1}1g_{j+1}\dots g_{m-1}}](g_j) = \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} X_{g_1\dots g_{j-1}1g_{j+1}\dots g_{i-1}\{f_1,\dots,f_{m-1},g_i\}g_{i+1}\dots g_{m-1}}(g_j),\end{array}$$

lo cual implica que (ver (5.27))

$$\begin{array}{l}\{f_1,\dots,f_{m-1},\Box(dg_1,\dots,dg_{m-1})\} = \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\Box(dg_1,\dots,dg_{i-1},d\{f_1,\dots,f_{m-1},g_i\},dg_{i+1},\dots,dg_{m-1})+ \\ \{g_1,\dots,g_{m-1},\Box(df_1,\dots,df_{m-1})\}.\end{array} \tag{5.28}$$

Finalmente, usando (5.27) y (5.28), deducimos que

$$\{f_1,\dots,f_{m-1},\{g_1,\dots,g_m\}\} = \sum_{i=1}^{m}\{g_1,\dots,g_{i-1},\{f_1,\dots,f_{m-1},g_i\},g_{i+1},\dots,g_{m-1},g_m\}$$

esto es, el n-corchete de funciones $\{,\dots,\}$ satisface la identidad fundamental.

■

5.3.3 Cohomología de un algebroide de Leibniz

Sea $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ un algebroide de Leibniz sobre una variedad M. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos el espacio vectorial

$$C^k(\Gamma(A);C^\infty(M,\mathbb{R})) = \{c^k : \Gamma(A)\times\dots^{(k}\dots\times\Gamma(A)\to C^\infty(M,\mathbb{R})/c^k \text{es k-lineal}\}$$

y el operador $\partial : C^k(\Gamma(A);C^\infty(M,\mathbb{R})) \to C^{k+1}(\Gamma(A);C^\infty(M,\mathbb{R}))$ definido por

$$\begin{array}{l}\displaystyle\partial c^k(s_0,\dots,s_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\rho(s_i)(c^k(s_0,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_k)) \\ \displaystyle+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i-1}c^k(s_0,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_{j-1},[\![s_i,s_j]\!],s_{j+1},\dots,s_k),\end{array} \tag{5.29}$$

para $c^k \in C^k(\Gamma(A); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ y $s_0, \ldots, s_k \in \Gamma(A)$.
Entonces, se sigue que $\partial^2 = 0$. La cohomología resultante se llama la *cohomología del algebroide de Leibniz de* A. Esta cohomología también se puede describir como la definida por la representación

$$\Gamma(A) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}), \qquad (s,f) \mapsto \rho(s)(f).$$

Nótese que aunque $c^k \in C^k(\Gamma(A); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ sea antisimétrica (respectivamente, $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineal), en general, ∂c^k no es antisimétrica (respectivamente, $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineal).

Ejemplos 5.3.11 *i*) Si $(A, [\![\ ,\ ]\!], \rho)$ es un algebroide de Lie, la cohomología de A (ver Sección 1.4.2) es justamente la cohomología del subcomplejo de las co-cadenas antisimétricas y $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales del complejo de cohomología de A como algebroide de Leibniz.
ii) Sea $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ un álgebra de Leibniz a izquierda de dimensión finita. Entonces, el par $([\ ,\ ], \rho)$ define una estructura de algebroide de Leibniz sobre el fibrado vectorial $\mathfrak{g} \to \{\text{punto}\}$, donde ρ es la aplicación idénticamente nula. En este caso, el espacio de las k-cocadenas en el correspondiente complejo de cohomología es

$$C^k(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = \{c^k : \mathfrak{g} \times \ldots^{(k} \ldots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} / c^k \,\text{es}\, k\text{-lineal}\}$$

y el operador coborde $\partial : C^k(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to C^{k+1}(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ está definido por

$$(\partial c^k)(s_0, \ldots, s_k) = \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i-1} c^k(s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_{j-1}, [s_i, s_j], s_{j+1}, \ldots, s_k).$$

La cohomología resultante es la cohomología de $\mathfrak{g}$ relativa a la representación trivial de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ (ver [85, 86, 87]).
iii) Sean (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$ y $(\wedge^{m-1}(T^*M),\ [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ el correspondiente algebroide de Leibniz. Entonces el operador de cohomología está dado por

$$\begin{aligned}\partial c^k(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \#_\Lambda^{m-1}(\alpha_i)(c^k(\alpha_0, \ldots, \widehat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \le i \le j \le k} (-1)^{i-1} c^k(\alpha_0, \ldots, \widehat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{j-1}, [\![\alpha_i, \alpha_j]\!]_\Lambda, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k),\end{aligned}$$

para todo $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \Omega^{m-1}(M)$.
iv) Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$ y $(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,E)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,E)})$ el correspondiente algebroide de Leibniz. Entonces, el operador de cohomología está dado por

$$\begin{aligned}
&\partial c^k((\alpha_0, \beta_0), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)) = \\
&\qquad \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,E)}((\alpha_i, \beta_i))(c^k((\alpha_0, \beta_0), \ldots, \widehat{(\alpha_i, \beta_i)}, \ldots, (\alpha_k, \beta_k))) \\
&\qquad + \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i-1} c^k((\alpha_0, \beta_0), \ldots, \widehat{(\alpha_i, \beta_i)}, \ldots, \\
&\qquad (\alpha_{j-1}, \beta_{j-1}), [\![(\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j)]\!]_{(\Lambda,E)}, (\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)),
\end{aligned}$$

para todo $(\alpha_0, \beta_0), \ldots, (\alpha_k, \beta_k) \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)$.

Observación 5.3.12 Las cohomologías de los algebroides de Leibniz de una variedad de Nambu-Poisson y de una variedad de Nambu-Jacobi tienen grados infinitos.

CAPÍTULO 6

Dualidad y clase modular de una estructura de Nambu-Poisson

6.1 La cohomología de Nambu-Poisson

Como hemos visto en el Capítulo 5, el algebroide de Leibniz asociado a una variedad de Nambu-Poisson nos permite introducir una teoría de cohomología, la cohomología del algebroide de Leibniz. Sin embargo, esta cohomología tiene grados infinitos y, por tanto, una dualidad tipo Poincaré con alguna teoría de homología no es posible. Con el fin de obtener una teoría de cohomología para variedades de Nambu-Poisson sin este problema, introducimos a continuación un álgebra de Lie asociada a la variedad de Nambu-Poisson.

6.1.1 Un álgebra de Lie asociada a una variedad de Nambu-Poisson

Si $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Leibniz, definimos su *centro*, $Z(\mathfrak{g})$, como el núcleo de la representación adjunta

$$ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g}), \qquad x \mapsto [x, \cdot].$$

Fácilmente se comprueba que el espacio cociente $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, dotado con el corchete inducido, es un álgebra de Lie (ver [20]).
En el caso particular de una variedad de Nambu-Poisson (M,Λ) de orden m, $m \geq 3$, tenemos que el centro del álgebra de Leibniz $(\Omega^{m-1}(M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda)$ es el espacio

$$Z(\Omega^{m-1}(M)) = \{\alpha \in \Omega^{m-1}(M) / [\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda = 0, \forall \beta \in \Omega^{m-1}(M)\}$$

y que $(\Omega^{m-1}(M)/Z(\Omega^{m-1}(M)), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda^\sim)$ es un álgebra de Lie, donde

$$[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda^\sim : \frac{\Omega^{m-1}(M)}{Z(\Omega^{m-1}(M))} \times \frac{\Omega^{m-1}(M)}{Z(\Omega^{m-1}(M))} \to \frac{\Omega^{m-1}(M)}{Z(\Omega^{m-1}(M))}$$

es el corchete inducido sobre $\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{Z(\Omega^{m-1}(M))}$, esto es,

$$[\![[\alpha], [\beta]]\!]_\Lambda^\sim = [[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda], \tag{6.1}$$

para todo $[\alpha], [\beta] \in \Omega^{m-1}(M)/Z(\Omega^{m-1}(M))$.
El siguiente resultado da una descripción explícita del centro de $(\Omega^{m-1}(M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda)$.

Proposición 6.1.1 *Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, con $m \geq 3$. Entonces, el centro del álgebra $(\Omega^{m-1}(M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda)$ es el $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulo*

$$ker\#_\Lambda^{m-1} = \{\alpha \in \Omega^{m-1}(M) / \#_\Lambda^{m-1}(\alpha) = 0\}.$$

Demostración. Si α es una $(m-1)$-forma sobre M tal que $\#_\Lambda^{m-1}(\alpha) = 0$ entonces, de (5.11), se sigue que

$$[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda = (-1)^m \#_\Lambda^m(d\alpha)\beta, \tag{6.2}$$

para todo $\beta \in \Omega^{m-1}(M)$.
Por otra parte, usando (5.6), tenemos que

$$0 = \mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)}\Lambda = (-1)^m \#_\Lambda^m(d\alpha)\Lambda.$$

Así, deducimos que $\#_\Lambda^m(d\alpha) = 0$. Consecuentemente, $[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda = 0$ (ver (6.2)).

Recíprocamente, supongamos que α es una $(m-1)$-forma sobre M tal que

$$[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda = 0, \quad \text{para todo} \quad \beta \in \Omega^{m-1}(M).$$

Si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces (ver (5.9))

$$0 = [\![\alpha, f\beta]\!]_\Lambda = f[\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda + \#_\Lambda^{m-1}(\alpha)(f)\beta = \#_\Lambda^{m-1}(\alpha)(f)\beta,$$

para cualquier $\beta \in \Omega^{m-1}(M)$. Por tanto, $\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)(f) = 0$, para cualquier $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Así, concluimos que $\#_\Lambda^{m-1}(\alpha) = 0$.

■

Consecuentemente, si (M, Λ) es una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$, el espacio cociente

$$\Omega^{m-1}(M)/Z(\Omega^{m-1}(M)) = \Omega^{m-1}(M)/ker\#_\Lambda^{m-1}$$

es un $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulo dotado con un corchete antisimétrico $[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda^\sim$ dado por (6.1) que satisface la identidad de Jacobi y la siguiente propiedad

$$[\![[\alpha], f[\beta]]\!]_\Lambda^\sim = f[\![[\alpha], [\beta]]\!]_\Lambda^\sim + \#_\Lambda^{m-1}(\alpha)(f)[\beta]$$

para cualesquiera $[\alpha], [\beta] \in \Omega^{m-1}(M)/ker\#_\Lambda^{m-1}$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Además, usando (5.12) obtenemos que la aplicación $\widetilde{\#}_\Lambda^{m-1} : \dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}} \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$\widetilde{\#}_\Lambda^{m-1}([\alpha]) = \#_\Lambda^{m-1}(\alpha)$$

induce un homomorfismo entre las álgebras de Lie $(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}, [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda^\sim)$ y $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$.

Observación 6.1.2 Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson regular de orden m, con $m \geq 3$.
(i) Usando las anteriores propiedades y la Proposición 5.1.5, deducimos que el triple

$$(\frac{\wedge^{m-1}(T^*M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}, [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda^\sim, \widetilde{\#}_\Lambda^{m-1})$$

es un algebroide de Lie sobre M.

(ii) Ahora si $\mathcal{D}$ es la foliación característica de M, entonces el algebroide de Lie $(\bigcup_{x\in M} \mathcal{D}(x) = \#_\Lambda^{m-1}(\wedge^{m-1}(T^*M)), [\,,\,], i)$ asociado a la foliación $\mathcal{D}$ (ver Ejemplos 1.4.3 iv)) es isomorfo al algebroide $(\dfrac{\wedge^{m-1}(T^*M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}, [\![\,,\,]\!]_\Lambda^{\sim}, \widetilde{\#}_\Lambda^{m-1})$ (ver Proposición 5.1.5).

6.1.2 La cohomología de Nambu-Poisson y la cohomología foliada

Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m \geq 3$. Como ya hemos visto en la Sección 6.1.1, el espacio cociente $\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}$ es un álgebra de Lie con el corchete de Lie $[\![\,,\,]\!]_\Lambda^{\sim}$ dado por (6.1).

Además, usando (5.12), podemos comprobar fácilmente que $C^\infty(M,\mathbb{R})$ es un $(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}})$-módulo relativo a la representación

$$\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}} \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}), \qquad ([\alpha], f) \mapsto (\#_\Lambda^{m-1}(\alpha))(f).$$

Así, se puede considerar el complejo de cohomología definido por esta representación

$$\left(C^*(\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R})) = \bigoplus_k C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R})), \partial_{NP} \right),$$

donde el espacio de las k-cocadenas $C^k(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R}))$ está formado por las aplicaciones $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales antisimétricas

$$c^k : \frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}} \times \dots^{(k} \dots \times \frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

y el operador de cohomología ∂_{NP} viene dado por

$$\begin{aligned}\partial_{NP}c^k([\alpha_0],\dots,[\alpha_k]) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\#_\Lambda^{m-1}(\alpha_i))(c^k([\alpha_0],\dots,\widehat{[\alpha_i]},\dots,[\alpha_k])) \\ &+ \sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{i-1}c^k([\alpha_0],\dots,\widehat{[\alpha_i]},\dots,[\alpha_{j-1}],[[\![\alpha_i,\alpha_j]\!]_\Lambda],[\alpha_{j+1}],\dots,[\alpha_k]),\end{aligned} \tag{6.3}$$

para todo $c^k \in C^k(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}};C^\infty(M,\mathbb{R}))$ y $[\alpha_0],\dots,[\alpha_k] \in \dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}$.
La cohomología de este complejo se llama *cohomología de Nambu-Poisson* y se denota por $H^*_{NP}(M)$.

Observación 6.1.3 Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson de orden m, $m\geq 3$. Consideramos el complejo de cohomología $(C^*(\Omega^{m-1}(M);C^\infty(M,\mathbb{R})),\partial)$ asociado al algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M),[\![\ ,\ ]\!]_\Lambda,\#_\Lambda^{m-1})$. La proyección natural $p:\Omega^{m-1}(M)\to\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}$ nos permite definir los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$p^k: C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}};C^\infty(M,\mathbb{R}))\to C^k(\Omega^{m-1}(M);C^\infty(M,\mathbb{R})),\quad c^k\mapsto p^k(c^k),$$

siendo $p^k(c^k):\Omega^{m-1}(M)\times\dots^{(k}\dots\times\Omega^{m-1}(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$ la aplicación dada por

$$p^k(c^k)(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=c^k([\alpha_1],\dots,[\alpha_k]).$$

Un cálculo directo, usando (5.29) y (6.3), demuestra que estos homomorfismos inducen un homomorfismo entre los complejos $(C^*(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}};C^\infty(M,\mathbb{R})),\partial_{NP})$ y $(C^*(\Omega^{m-1}(M);C^\infty(M,\mathbb{R})),\partial)$. Por tanto, tenemos el correspondiente homomorfismo en cohomología

$$p^*: H^*_{NP}(M)\to H^*(\Omega^{m-1}(M);C^\infty(M,\mathbb{R})).$$

Además, como el espacio de las 0-cocadenas en ambos complejos es $C^\infty(M,\mathbb{R})$, entonces

$$p^1: H^1_{NP}(M)\to H^1(\Omega^{m-1}(M);C^\infty(M,\mathbb{R}))$$

es un monomorfismo.

Ahora, usando el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$\widetilde{\#}_\Lambda^{m-1} : \frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}} \to \#_\Lambda^{m-1}(\Omega^{m-1}(M)), \quad \widetilde{\#}_\Lambda^{m-1}([\alpha]) = \#_\Lambda^{m-1}(\alpha),$$

relacionaremos la cohomología Nambu-Poisson con la cohomología foliada de $(M,\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D}$ es la foliación característica de M.
En primer lugar recordamos cómo se define la cohomología foliada de $(M,\mathcal{D})$. Consideramos el espacio $\Omega^k(M,\mathcal{D})$ de las k-formas α sobre M tal que

$$\alpha(X_1,\dots,X_k) = 0, \quad \text{para todo} \quad X_1,\dots,X_k \in \#_\Lambda^{m-1}(\Omega^{m-1}(M)).$$

De (5.12), se sigue que si $\alpha \in \Omega^k(M,\mathcal{D})$, entonces $d\alpha \in \Omega^{k+1}(M,\mathcal{D})$. Denotamos ahora por $\Omega^k(\mathcal{D})$ el $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulo $\dfrac{\Omega^k(M)}{\Omega^k(M,\mathcal{D})}$. Entonces, la diferencial exterior induce un operador de cohomología $d_\mathcal{D} : \Omega^k(\mathcal{D}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{D})$

$$d_\mathcal{D}([\alpha]) = [d\alpha], \quad \text{para} \quad [\alpha] \in \Omega^k(\mathcal{D}). \tag{6.4}$$

La cohomología resultante $H^*(\mathcal{D})$ es la *cohomología foliada* de $(M,\mathcal{D})$ y el operador $d_\mathcal{D}$ es la *diferencial foliada* de $(M,\mathcal{D})$. Nótese que si M es una variedad de Nambu-Poisson regular, $H^*(\mathcal{D})$ es justamente la cohomología foliada usual de $(M,\mathcal{D})$ (ver Ejemplo 1.4.5 *iv*)).
Por otra parte, tenemos

Proposición 6.1.4 *Sea* (M,Λ) *una variedad de Nambu-Poisson de orden* m*, con* $m \geq 3$*. Entonces,*

$$\Omega^k(M,\mathcal{D}) = ker\#_\Lambda^k,$$

para todo $k \in \{0,\dots,m\}$*. Así,*

$$\#_\Lambda^{k+1}(d\alpha) = 0,$$

para todo $\alpha \in ker\#_\Lambda^k$*.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \Omega^k(M,\mathcal{D})$. Probaremos que $\#^k_\Lambda(\alpha)(x)=0$, para todo $x \in M$.
Distinguimos dos casos:
(i) Si $\Lambda(x) = 0$, es claro que $\#^k_\Lambda(\alpha)(x) = 0$.
(ii) Si $\Lambda(x) \neq 0$ entonces, usando el Teorema 5.1.1, deducimos que existen coordenadas locales $(x^1,\dots,x^m,x^{m+1},\dots,x^n)$ en un entorno abierto U de x tal que

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ahora, consideramos una $(m-1)$-forma β_i sobre M satisfaciendo

$$\#^{m-1}_\Lambda(\beta_i)(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}_{|x},$$

para todo $i \in \{1,\dots,m\}$. Como $\alpha \in \Omega^k(M,\mathcal{D})$, se sigue que

$$\alpha(\#^{m-1}_\Lambda(\beta_{i_1}),\dots,\#^{m-1}_\Lambda(\beta_{i_k})) = 0,$$

para todo $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. Así,

$$\alpha_x(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}_{|x},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}_{|x}) = 0.$$

Esto implica que $\#^k_\Lambda(\alpha)(x) = 0$. Por tanto, $\Omega^k(M,\mathcal{D}) \subseteq ker\#^k_\Lambda$.
La demostración de la inclusión $ker\#^k_\Lambda \subseteq \Omega^k(M,\mathcal{D})$ es similar usando de nuevo el Teorema 5.1.1.

■

Para relacionar la cohomología de Nambu-Poisson de una variedad de Nambu-Poisson (M,Λ) de orden m, $m \geq 3$, con la cohomología foliada de $(M,\mathcal{D})$, introducimos los monomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$\tilde{i}^k : \Omega^k(\mathcal{D}) \to C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#^{m-1}_\Lambda};C^\infty(M,\mathbb{R})), \quad [\alpha] \mapsto \tilde{i}^k([\alpha]) = \psi_{[\alpha]}, \qquad (6.5)$$

donde $\psi_{[\alpha]} : \frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#^{m-1}_\Lambda} \times \dots^{(k} \dots \times \frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#^{m-1}_\Lambda} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ es la aplicación dada por

$$\psi_{[\alpha]}([\alpha_1],\dots,[\alpha_k]) = \alpha(\widetilde{\#}^{m-1}_\Lambda([\alpha_1]),\dots,\widetilde{\#}^{m-1}_\Lambda([\alpha_k])). \qquad (6.6)$$

Un cálculo directo, usando (5.12), (6.3), (6.4), (6.5) y (6.6), prueba que

$$\tilde{i}^{k+1} \circ d_{\mathcal{D}} = \partial_{NP} \circ \tilde{i}^k.$$

Por tanto, las aplicaciones $\tilde{i}^k$ inducen un monomorfismo entre los complejos $(\Omega^*(\mathcal{D}), d_{\mathcal{D}})$ y $(C^*(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R})), \partial_{NP})$.
Denotaremos por

$$\tilde{i}^k : H^k(\mathcal{D}) \to H^k_{NP}(M)$$

el correspondiente homomorfismo en cohomología.
A continuación, consideraremos el caso particular en el que la estructura Nambu-Poisson Λ es regular. En tal caso, el triple $\left(\dfrac{\wedge^{m-1}(T^*M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}, [\![\ ,\ ]\!]^{\sim}_\Lambda, \widetilde{\#}_\Lambda^{m-1}\right)$ es un algebroide de Lie sobre M (ver la Observación 6.1.2) y la cohomología de este algebroide de Lie es justamente la cohomología de Nambu-Poisson de M. Además,

$$(\overline{\#}_\Lambda^{m-1})^k \circ \tilde{i}^k = \Pi^k,$$

donde $(\overline{\#}_\Lambda^{m-1})^k : C^k(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R})) \to C^k(\#_\Lambda^{m-1}(\Omega^{m-1}(M)); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos inducido por el isomorfismo de fibrados vectoriales $\overline{\#}_\Lambda^{m-1} : \dfrac{\wedge^{m-1}(T^*M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}} \to \#_\Lambda^{m-1}(\wedge^{m-1}(T^*M))$ (ver Proposición 5.1.5) y $\Pi^k : \Omega^k(\mathcal{D}) \to C^k(\#_\Lambda^{m-1}(\Omega^{m-1}(M)); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos dado por (1.54). Así, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 6.1.5 *Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson regular de orden m, con $m \geq 3$. Entonces, los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos*

$$\tilde{i}^k : \Omega^k(\mathcal{D}) \to C^k\left(\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R})\right)$$

inducen un isomorfismo de complejos

$$\tilde{i}^* : (\Omega^*(\mathcal{D}), d_{\mathcal{D}}) \to (C^*\left(\frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#_\Lambda^{m-1}}; C^\infty(M,\mathbb{R})\right), \partial_{NP}).$$

Así, la cohomología de Nambu-Poisson de M es isomorfa a la cohomología foliada de $(M,\mathcal{D})$, es decir,

$$H^k(\mathcal{D}) \cong H^k_{NP}(M), \quad \textit{para todo} \quad k.$$

6.2 Una homología asociada a una variedad de Nambu-Poisson orientada

Sean M una variedad orientada, de dimensión n y $\nu \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen sobre M. Denotamos por $\flat_\nu : \mathcal{V}^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por

$$\flat_\nu(P) = i(P)\nu, \tag{6.7}$$

para todo $P \in \mathcal{V}^k(M)$.

Usando este isomorfismo y la diferencial exterior d podemos definir un operador de homología δ_ν como sigue

$$\delta_\nu = \flat_\nu^{-1} \circ d \circ \flat_\nu : \mathcal{V}^k(M) \to \mathcal{V}^{k-1}(M). \tag{6.8}$$

Nótese que

$$\delta_\nu(X) = div_\nu X, \tag{6.9}$$

para $X \in \mathfrak{X}(M)$, donde $div_\nu X$ es la divergencia del campo de vectores X con respecto a ν, es decir, es la función real sobre M que satisface

$$\mathcal{L}_X \nu = (div_\nu X)\nu. \tag{6.10}$$

La homología asociada al complejo $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$ se denota por $H_*^\nu(M)$ y es dual de la cohomología de De Rham de M, es decir,

$$H_k^\nu(M) \cong H_{dR}^{n-k}(M).$$

Por tanto, $H_*^\nu(M)$ no depende de la forma de volumen elegida.

Para obtener una expresión explícita del operador δ_ν, probaremos el siguiente lema que será útil en lo sucesivo.

Lema 6.2.1 *Sean M una variedad orientada, de dimensión n y ν una forma de volumen sobre M. Entonces, para todo $P \in \mathcal{V}^k(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos*

$$\mathcal{L}_X \flat_\nu(P) = \flat_\nu(\mathcal{L}_X P) + (div_\nu X)\flat_\nu(P). \tag{6.11}$$

Demostración. Si $k = 0$ o $k = 1$, la relación (6.11) se obtiene usando (6.7), (6.10) y las propiedades del operador derivada de Lie.
Procediendo por inducción sobre k, deducimos que (6.11) es cierta para cualquier k-vector descomponible. Así, (6.11) es también cierta para cualquier k-vector.

■

Ahora, usando este lema probaremos el siguiente resultado.

Proposición 6.2.2 *Sean M una variedad orientada, de dimensión n y ν una forma de volumen sobre M. Entonces*

$$i(\alpha)\delta_\nu(P) = div_\nu(i(\alpha)(P)) + (-1)^k i(d\alpha)P, \tag{6.12}$$

para todo $P \in \mathcal{V}^k(M)$ y $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre k.
Si $k = 1$, (6.12) es una consecuencia inmediata de (6.9) y (6.10).
Ahora, asumiremos que (6.12) es cierta para $P \in \mathcal{V}^{k-1}(M)$ y $\alpha \in \Omega^{k-2}(M)$ y demostraremos que (6.12) también es cierta para un k-vector P descomponible

$$P = X_1 \wedge \ldots \wedge X_k,$$

con $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. De (6.8),

$$\begin{aligned} d(\flat_\nu(P)) &= d(i(X_k)(\flat_\nu(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k-1}))) \\ &= \mathcal{L}_{X_k}\flat_\nu(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k-1}) \\ &\quad -i(X_k)\flat_\nu(\delta_\nu(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k-1})). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Ahora, usando la hipótesis de inducción, tenemos

$$\begin{aligned} &i(\beta)(\delta_\nu(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k-1})) = \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+k-1} div_\nu(\beta(X_1, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k-1})X_j) \\ &\qquad + (-1)^{k-1} d\beta(X_1, \ldots, X_{k-1}), \end{aligned}$$

para todo $\beta \in \Omega^{k-2}(M)$. Así, se deduce que

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{k-1}\delta_\nu(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k-1}) = \\
&\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j(div_\nu(X_j))X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_{k-1} \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le k-1} (-1)^{i+j}[X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_{k-1}.
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Sustituyendo (6.14) en (6.13), y usando el Lema 6.2.1, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(-1)^k d(\flat_\nu(P)) = \flat_\nu(&\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(div_\nu X_i)X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_k \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j}[X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_k).
\end{aligned}
$$

Consecuentemente,

$$
\begin{aligned}
&(-1)^k\delta_\nu(P) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(div_\nu(X_i))X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_k \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j}[X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_k.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Por otra parte, para todo $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&(-1)^k div_\nu(i(\alpha)(P)) + i(d\alpha)(P) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\alpha(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_k) div_\nu X_i \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le k} (-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_k).
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Por tanto, de (6.15) y (6.16), concluimos que (6.12) es cierta para $P = X_1 \wedge \ldots \wedge X_k$ y para todo $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$. Finalmente, usando este resultado, es fácil probar que (6.12) es cierto para todo $P \in \mathcal{V}^k(M)$ y para todo $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$.

■

Seguidamente, describiremos un interesante subcomplejo del complejo $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$, cuando M es una variedad de Nambu-Poisson.

Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson de dimensión n y de orden m, con $3 \leq m \leq n$. Para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$, consideramos el subespacio de $\mathcal{V}^k(M)$ dado por

$$\mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) = \{P \in \mathcal{V}^k(M)/i(\alpha)(P) = 0, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in ker\#_\Lambda^1\}. \tag{6.17}$$

Asumiremos que $\mathcal{V}_t^0(M, \Lambda) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Nótese que si M es una variedad de Nambu-Poisson regular, $\mathcal{V}_t^k(M, \Lambda)$ es justo el espacio de los k-vectores sobre M que son tangentes a la foliación característica (ver la Proposición 5.1.5). Por tanto,

Lema 6.2.3 *Sea M una variedad de Nambu-Poisson regular de orden m, con $m \geq 3$. Entonces*

$$\mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) = \#_\Lambda^{m-k}(\Omega^{m-k}(M)), \tag{6.18}$$

para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$.

Observación 6.2.4 Si M es una variedad de Nambu-Poisson arbitraria de orden m, con $m \geq 3$, tenemos que

$$\#_\Lambda^{m-k}(\Omega^{m-k}(M)) \subseteq \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda), \quad \text{para todo} \quad k \in \{0, \ldots, m\}.$$

En general, (6.18) no es cierto. En efecto, supongamos que M es una variedad orientada de dimensión $n \geq 3$ y que ν es una forma de volumen sobre M. Consideremos $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ una función tal que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Denotamos por Λ_ν la estructura Nambu-Poisson regular inducida por la forma de volumen ν (ver el Ejemplo 5.1.2 *i*)). Entonces, el n-vector $\Lambda = f\Lambda_\nu$ define una estructura de Nambu-Poisson singular de orden n sobre M. Además, un cálculo directo prueba que $\mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) = \mathcal{V}^k(M)$, para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$. Por otra parte, es claro que si $P \in \#_\Lambda^{n-k}(\Omega^{n-k}(M))$ y $x \in f^{-1}(0)$ entonces $P(x) = 0$. Por tanto,

$$\#_\Lambda^{n-k}(\Omega^{n-k}(M)) \neq \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) = \mathcal{V}^k(M),$$

para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$.

A continuación, probaremos que si M es una variedad orientada de Nambu-Poisson de orden m, con $m \geq 3$, y ν es una forma de volumen sobre M, entonces $(\mathcal{V}_t^*(M,\Lambda) = \bigoplus_{k=1,\dots,m} \mathcal{V}_t^k(M,\Lambda))$ es un subcomplejo del complejo $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$.

Proposición 6.2.5 *Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson orientada de orden m, con $m \geq 3$, y ν una forma de volumen sobre M. Entonces*

$$\delta_\nu(\mathcal{V}_t^k(M,\Lambda)) \subseteq \mathcal{V}_t^{k-1}(M,\Lambda),$$

para todo $k \in \{1,\dots,m\}$.

Demostración. Sea α una 1-forma sobre M tal que $\alpha \in ker\#_\Lambda^1$. Si $P \in \mathcal{V}_t^k(M,\Lambda)$ entonces, por (6.12), tenemos

$$\begin{aligned} i(\alpha)\delta_\nu(P)(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-2}) &= div_\nu(i(\alpha\wedge\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2})(P)) \\ &\quad +(-1)^k i(d(\alpha\wedge\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2})(P)), \end{aligned} \tag{6.19}$$

para todo $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-2} \in \Omega^1(M)$.
Como $\alpha \in ker\#_\Lambda^1$ y $P \in \mathcal{V}_t^k(M,\Lambda)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} i(\alpha\wedge\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2})(P) &= i(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2})(i(\alpha)(P)) = 0, \\ i(d(\alpha\wedge\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2}))(P) &= i(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2})(i(d\alpha)(P)) \\ &\quad -i(d(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2}))(i(\alpha)(P)) \\ &= i(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_{k-2})(i(d\alpha)(P)). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Ahora, probaremos que $i(d\alpha)(P)=0$, lo que demuestra que $\delta_\nu(P)\in\mathcal{V}_t^{k-1}(M,\Lambda)$ (ver (6.19) y (6.20)).
Es claro que el k-vector P induce dos aplicaciones antisimétricas y $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales

$$\widetilde{P} : \frac{\Omega^1(M)}{ker\#_\Lambda^1} \times \dots^{(k}\dots \times \frac{\Omega^1(M)}{ker\#_\Lambda^1} \to C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

$$\overline{P} : \#_\Lambda^1(\Omega^1(M)) \times \dots^{(k}\dots \times \#_\Lambda^1(\Omega^1(M)) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

de tal forma que

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \widetilde{P}([\alpha_1], \dots, [\alpha_k]) = \overline{P}(\#_\Lambda^1(\alpha_1), \dots, \#_\Lambda^1(\alpha_k)), \tag{6.21}$$

para todo $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1(M)$. Además, es fácil probar que $\overline{P}$ es un operador local, es decir, que si U es un subconjunto abierto de M y $Q_1 \in \#_\Lambda^1(\Omega^1(M))$ es tal que $(Q_1)_{|U} \equiv 0$ entonces

$$\overline{P}(Q_1, Q_2, \dots, Q_k)_{|U} \equiv 0,$$

para todo $Q_2, \dots, Q_k \in \#_\Lambda^1(\Omega^1(M))$.
Ahora, denotamos por R el conjunto de los puntos regulares de Λ, esto es,

$$R = \{x \in M / \Lambda(x) \neq 0\}.$$

R y su exterior, $Ext(R)$, son subconjuntos abiertos de M. Además, es obvio que

$$\overline{P}(\#_\Lambda^1(\alpha_1), \dots, \#_\Lambda^1(\alpha_k))_{|Ext(R)} \equiv 0,$$

para todo $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1(M)$. Así, de (6.21), deducimos que

$$P(y) = 0, \quad \text{para todo} \quad y \in Ext(R).$$

Esto implica que

$$i(d\alpha)(P)_{|Ext(R)} \equiv 0. \tag{6.22}$$

Por otra parte, el m-vector Λ induce una estructura de Nambu-Poisson regular de orden m sobre R. Por tanto, por el Lema 6.2.3, obtenemos que existe una $(m-k)$-forma β sobre R tal que

$$\#_\Lambda^{m-k}(\beta(y)) = P(y), \quad \text{para todo} \quad y \in R.$$

Consecuentemente, si $y \in R$

$$i(d\alpha(y))(P(y)) = i(\beta(y))(\#_\Lambda^2(d\alpha(y))),$$

y, por la Proposición 6.1.4, se sigue que

$$i(d\alpha)(P)_{|R} \equiv 0. \tag{6.23}$$

Finalmente, de (6.22), (6.23), por continuidad, concluimos que $i(d\alpha)(P) = 0$.

■

Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson orientada de orden m, con $m \geq 3$, y sea ν una forma de volumen sobre M. Entonces, la Proposición 6.2.5 nos permite introducir el complejo de homología

$$\ldots \to \mathcal{V}_t^{k+1}(M, \Lambda) \xrightarrow{\delta_\nu} \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) \xrightarrow{\delta_\nu} \mathcal{V}_t^{k-1}(M, \Lambda) \to \ldots$$

A este complejo le denominaremos el *complejo canónico de Nambu-Poisson* de (M, Λ). La homología de este complejo se denota por $H_*^{canNP}(M)$ y es llamada la *homología canónica de Nambu-Poisson de* M.

Proposición 6.2.6 *Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson orientada de orden m, con $m \geq 3$. La homología canónica de Nambu-Poisson no depende de la forma de volumen elegida.*

Demostración. Si ν y ν' son dos formas de volumen sobre M, entonces existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, tal que $f \neq 0$ en todo punto y

$$\nu' = f\nu. \tag{6.24}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f > 0$.
Definimos los isomorfismos de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos

$$\Psi^k : \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) \to \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda) \qquad P \mapsto \frac{1}{f}P,$$

para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$. Un cálculo directo, usando (6.7), (6.8) y (6.24), demuestra que

$$\delta_{\nu'} \circ \Psi^k = \Psi^{k-1} \circ \delta_\nu.$$

Por tanto, las aplicaciones Ψ^k inducen un isomorfismo de complejos

$$\Psi^* : (\mathcal{V}_t^*(M, \Lambda), \delta_\nu) \to (\mathcal{V}_t^*(M, \Lambda), \delta_{\nu'}).$$

■

6.3 Dualidad y clase modular de una variedad de Nambu-Poisson

6.3.1 La clase modular de una variedad de Nambu-Poisson

En esta sección analizaremos bajo qué condiciones existe una dualidad entre la homología canónica de Nambu-Poisson y la cohomología de Nambu-Poisson de una variedad de Nambu-Poisson (M, Λ). Una herramienta fundamental en este estudio es la clase modular de (M, Λ) que fue introducida en [54]. Recordamos su definición.

Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson orientada, de dimensión n y de orden m, con $3 \leq m \leq n$, y sea ν una forma de volumen sobre M.

Consideramos la aplicación $\mathcal{M}_\Lambda^\nu : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \ldots^{(m-1} \ldots \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ definida por

$$\mathcal{M}_\Lambda^\nu(f_1, \ldots, f_{m-1}) = div_\nu(X_{f_1 \ldots f_{m-1}}), \tag{6.25}$$

para $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{M}_\Lambda^\nu$ es una aplicación $(m-1)$-lineal, antisimétrica y es una derivación en cada argumento con respecto al producto usual de funciones. Así, $\mathcal{M}_\Lambda^\nu$ induce un $(m-1)$-vector sobre M, *el tensor modular*, que también denotamos por $\mathcal{M}_\Lambda^\nu$ (ver [26, 54]).

Además, la aplicación

$$\mathcal{M}_\Lambda^\nu : \Omega^{m-1}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R}), \qquad \alpha \mapsto i(\alpha)\mathcal{M}_\Lambda^\nu \tag{6.26}$$

define un 1-cociclo en el complejo de la cohomología de Leibniz asociado con el algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#_\Lambda^{m-1})$ y su clase de cohomología $\mathcal{M}_\Lambda = [\mathcal{M}_\Lambda^\nu] \in H^1(\Omega^{m-1}(M); C^\infty(M, \mathbb{R}))$ no depende de la forma de volumen elegida. Esta clase de cohomología se denomina *clase modular* de (M, Λ) (ver [54]) .

El siguiente resultado prueba que el $(m-1)$-vector $\mathcal{M}_\Lambda^\nu$ define también un 1-cociclo en el complejo de cohomología de Nambu-Poisson.

Proposición 6.3.1 *Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson, de dimensión n, orientada y de orden m, con $3 \leq m \leq n$, y sea ν una forma de volumen sobre M. Entonces, la aplicación*

$$\widetilde{\mathcal{M}}^\nu_\Lambda : \frac{\Omega^{m-1}(M)}{ker\#^{m-1}_\Lambda} \to C^\infty(M, \mathbb{R}), \qquad [\alpha] \mapsto i(\alpha)\mathcal{M}^\nu_\Lambda, \tag{6.27}$$

define un 1-cociclo en el complejo de cohomología de Nambu-Poisson de (M, Λ). Además, su clase de cohomología $\widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda = [\widetilde{\mathcal{M}}^\nu_\Lambda] \in H^1_{NP}(M)$ no depende de la forma de volumen elegida.

Demostración. Sea α una $(m-1)$-forma sobre M. Entonces, usando la Proposición 6.2.2, tenemos

$$div_\nu(\#^{m-1}_\Lambda(\alpha)) = i(\alpha)\delta_\nu(\Lambda) + (-1)^{m-1}\#^m_\Lambda(d\alpha). \tag{6.28}$$

Así, de (6.25), (6.28) y la Proposición 6.2.2, se sigue que

$$\mathcal{M}^\nu_\Lambda = \delta_\nu(\Lambda). \tag{6.29}$$

Ahora, usando (6.28), (6.29) y la Proposición 6.1.4, deducimos que la aplicación $\widetilde{\mathcal{M}}^\nu_\Lambda$ está bien definida.
Por otra parte, como $\mathcal{M}^\nu_\Lambda$ define un 1-cociclo en el complejo de cohomología de Leibniz asociado al algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#^{m-1}_\Lambda)$ entonces

$$i([\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda)\mathcal{M}^\nu_\Lambda = \#^{m-1}_\Lambda(\alpha)(i(\beta)\mathcal{M}^\nu_\Lambda) - \#^{m-1}_\Lambda(\beta)(i(\alpha)\mathcal{M}^\nu_\Lambda),$$

para todo $\alpha, \beta \in \Omega^{m-1}(M)$. Por tanto, concluimos que (ver (6.3)),

$$\partial_{NP}\widetilde{\mathcal{M}}^\nu_\Lambda([\alpha], [\beta]) = \#^{m-1}_\Lambda(\alpha)(i(\beta)\mathcal{M}^\nu_\Lambda) - \#^{m-1}_\Lambda(\beta)(i(\alpha)\mathcal{M}^\nu_\Lambda) - i([\![\alpha, \beta]\!]_\Lambda)\mathcal{M}^\nu_\Lambda = 0.$$

Finalmente, como la clase modular de M no depende de la forma de volumen elegida, deducimos que lo mismo también es cierto para la clase de cohomología $\widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda \in H^1_{NP}(M)$.

$\blacksquare$

Observación 6.3.2 Sea (M,Λ) una variedad de Nambu-Poisson orientada de orden m, $m \geq 3$ y sea $p^* : H^*_{NP}(M) \to H^*(\Omega^{m-1}(M); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ el homomorfismo inducido entre la cohomología de Nambu-Poisson y la cohomología del algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_\Lambda, \#^{m-1}_\Lambda)$ (ver la Observación 6.1.3). Entonces, un cálculo directo, usando (6.26) y (6.27), prueba que

$$p^1(\widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda) = \mathcal{M}_\Lambda.$$

Así, como $p^1 : H^1_{NP}(M) \to H^1(\Omega^{m-1}(M); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ es un monomorfismo, se sigue que la clase modular de (M,Λ) es nula si y sólo si $\widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda = 0$.

Para una variedad de Nambu-Poisson regular, tenemos el siguiente resultado, el cual relaciona la anulación de la clase modular con la existencia de un volumen básico respecto a la foliación característica.

Teorema 6.3.3 *Sea (M,Λ) una variedad regular de Nambu-Poisson, orientada, de orden m y de dimensión n, con $3 \leq m \leq n$. Entonces la clase modular de (M,Λ) es nula si y sólo si, existe un volumen básico con respecto a la foliación característica $\mathcal{D}$, es decir, si existe $\mu \in \Omega^{n-m}(M)$ tal que $\mu \neq 0$ en cada punto de M y*

$$i(X^\Lambda_{f_1\cdots f_{m-1}})\mu = 0, \qquad \mathcal{L}_{X^\Lambda_{f_1\cdots f_{m-1}}}\mu = 0,$$

para $f_1,\dots,f_{m-1} \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

Demostración. Sea ν una forma de volumen sobre M y supongamos que la clase modular de M es nula. Entonces, existe $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{M}^\nu_\Lambda = (-1)^{m-1}\#^1_\Lambda(df).$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}^\nu_\Lambda(df_1,\dots,df_{m-1}) = X_{f_1\cdots f_{m-1}}(f). \tag{6.30}$$

Tomando la forma de volumen $\nu' = e^{-f}\nu$ y usando (6.10), (6.25) y (6.30), deducimos que

$$\mathcal{M}^{\nu'}_\Lambda = 0. \tag{6.31}$$

Ahora, consideramos la $(n-m)$-forma $\mu = i(\Lambda)(\nu') = \flat_{\nu'}(\Lambda)$. Entonces, $\mu \neq 0$ en todo punto de M y

$$i(X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}})\mu = \flat_{\nu'}(\Lambda \wedge X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}}) = 0.$$

Además, de (5.5), (6.25), (6.31) y el Lema 6.2.1 concluimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}}}\mu &= \mathcal{L}_{X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}}}\flat_{\nu'}(\Lambda)\\ &= \flat_{\nu'}(\mathcal{L}_{X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}}}\Lambda) + (div_{\nu'}X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}})\flat_{\nu'}(\Lambda) = 0.\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que existe un volumen básico μ con respecto a $\mathcal{D}$. Entonces,

$$i(X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}})\mu = 0, \qquad \mathcal{L}_{X^{\Lambda}_{f_1\cdots f_{m-1}}}\mu = 0, \tag{6.32}$$

para $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$.

Sea $\mathcal{D} = \bigcup_{x\in M}\mathcal{D}(x) \to M$ el subfibrado vectorial de $TM \to M$ asociado a $\mathcal{D}$ y $\widetilde{\alpha}$ la sección del fibrado vectorial $\wedge^m D^* \to M$ definida como sigue. Si $X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(D)$, $\widetilde{\alpha}(X_1,\ldots,X_m) \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ es la función caracterizada por

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_m = \widetilde{\alpha}(X_1,\ldots,X_m)\Lambda.$$

Ahora, extendemos $\widetilde{\alpha}$ a una m-forma α sobre M tal que

$$\alpha(X_1,\ldots,X_m) = \widetilde{\alpha}(X_1,\ldots,X_m),$$

para $X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(\mathcal{D})$. Es claro que

$$i(\Lambda)\alpha = 1. \tag{6.33}$$

Si ν es la forma de volumen sobre M dada por

$$\nu = \alpha \wedge \mu,$$

de (6.32) y (6.33), tenemos que

$$\flat_{\nu}(\Lambda) = \mu. \tag{6.34}$$

Así, usando (6.25), (6.32), (6.34), el Lema 6.2.1 y el hecho de que $\mu \neq 0$ en todo punto, concluimos que

$$\mathcal{M}^{\nu}_{\Lambda} = 0.$$

■

Ejemplos 6.3.4 *(i)* Supongamos que N y $\widetilde{N}$ son variedades orientadas y que ν (respectivamente, μ) es una forma de volumen sobre N (respectivamente, sobre $\widetilde{N}$). Denotamos por Λ_ν la estructura de Nambu-Poisson sobre N inducida por la forma de volumen ν (ver el Ejemplo 5.1.2). Λ_ν define una estructura de Nambu-Poisson regular sobre la variedad producto $M = N \times \widetilde{N}$ y, por el Teorema 6.3.3, se sigue que la clase modular de (M, Λ_ν) es cero. De hecho, un cálculo directo prueba que $\mathcal{M}^{\nu\wedge\mu}_{\Lambda_\nu} = \mathcal{M}^{\nu}_{\Lambda_\nu}$ y, por tanto, (ver [54]), $\mathcal{M}^{\nu\wedge\mu}_{\Lambda_\nu} = 0$. De la misma forma, para una función $f \in C^\infty(\widetilde{N}, \mathbb{R})$ con ceros, $f\Lambda_\nu$ define una estructura singular de Nambu-Poisson sobre la variedad producto M y

$$\mathcal{M}^{\nu\wedge\mu}_{f\Lambda_\nu} = f\mathcal{M}^{\nu\wedge\mu}_{\Lambda_\nu} + (-1)^{m-1} i(df)(\Lambda_\nu) = 0.$$

(ii) Sea $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ el álgebra de Lie simple de dimensión 3 con base $\{\xi, \eta, \sigma\}$ satisfaciendo

$$[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} = -2\eta, \qquad [\xi, \sigma]_{\mathfrak{g}} = 2\sigma, \qquad [\eta, \sigma]_{\mathfrak{g}} = \xi.$$

Consideramos un grupo de Lie G simple, no compacto, simplemente conexo tal que el álgebra de Lie de G sea $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$. De la base $\{\xi, \eta, \sigma\}$ se puede obtener una base de campos de vectores invariantes a izquierda $\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\}$ sobre G y si $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\}$ es la base dual de 1-formas, tenemos que

$$d\widetilde{\alpha} = \widetilde{\gamma} \wedge \widetilde{\beta}, \quad d\widetilde{\beta} = 2\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}, \quad d\widetilde{\gamma} = -2\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\gamma}.$$

Ahora, supongamos que S es un subgrupo discreto de G tal que el espacio $N = S \backslash G$ de las clases a derecha es una variedad compacta (ver la Sección 4 del Capítulo II de [4]). Entonces, los campos $\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\}$ (respectivamente, las 1-formas $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\}$) inducen una base global $\{X, Y, Z\}$ de campos de vectores sobre N (respectivamente, una base global $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de 1-formas sobre N) y

$$d\alpha = \gamma \wedge \beta, \quad d\beta = 2\alpha \wedge \beta, \quad d\gamma = -2\alpha \wedge \gamma.$$

Denotamos por Λ el 3-vector sobre la variedad producto $M = N \times S^1$ dado por

$$\Lambda = X \wedge Z \wedge E,$$

donde E es el campo dual del elemento de longitud de S^1. Es fácil probar que Λ define una estructura de Nambu-Poisson regular de orden 3 sobre M. La distribución característica $\mathcal{D}$ de (M, Λ) es la foliación sobre M dada por $\beta = 0$. Así, $\mathcal{D}$ es transversalmente orientable y la *clase de Godbillon-Vey* de $\mathcal{D}$ es la clase en la cohomología de De Rham $[\alpha \wedge \gamma \wedge \beta]$ (para la definición de la clase de Godbillon-Vey de una foliación transversalmente orientable, ver [110], pp. 29 y 30; ver también [41]). Es claro que $[\alpha \wedge \gamma \wedge \beta] \neq 0$ y, por tanto, concluimos que no es posible encontrar un volumen básico con respecto a $\mathcal{D}$ (ver [110], p. 50). Consecuentemente, del Teorema 6.3.3, deducimos que la clase modular de (M, Λ) no es nula.

Observación 6.3.5 Sea M una variedad orientada, de dimensión n y $\mathcal{D}$ una foliación orientada sobre M de dimensión m, $3 \leq m \leq n$. Supongamos que $D = \bigcup_{x \in M} \mathcal{D}(x) \to M$ es el subfibrado vectorial de $TM \to M$ asociado a $\mathcal{D}$ y que Λ es una sección global del fibrado vectorial $\wedge^m D \to M$, con $\Lambda \neq 0$ en todo punto. Entonces, Λ define una estructura de Nambu-Poisson regular de orden m sobre M y la foliación característica de (M, Λ) es exactamente $\mathcal{D}$. Como M es una variedad orientada, la foliación $\mathcal{D}$ es transversalmente orientable. Así, si la clase de Godbillon-Vey de $\mathcal{D}$ no es nula, se sigue que la clase modular de (M, Λ) tampoco es nula.

6.3.2 Dualidad entre la cohomología de Nambu-Poisson y la homología canónica de Nambu-Poisson

Si M es una variedad de Nambu-Poisson orientada de orden m, con $m \geq 3$, y ν es una forma de volumen sobre M, probaremos que, bajo ciertas condiciones, se puede definir un interesante subcomplejo del complejo de homología $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$. Además, si la clase modular de M es nula, demostraremos que existe una dualidad entre la homología de este subcomplejo y la cohomología foliada de $(M, \mathcal{D})$, donde $\mathcal{D}$ es la foliación característica de (M, Λ).

Teorema 6.3.6 *Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson orientada de orden m, con $m \geq 3$, y ν una forma de volumen sobre M. Entonces:*

(i) $\#^*_\Lambda(\Omega^*(M)) = \bigoplus_{k=0}^{m}(\#^{m-k}_\Lambda(\Omega^{m-k}(M)))$ *define un subcomplejo del complejo de homología $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$ si y sólo si $\mathcal{M}^\nu_\Lambda \in \#^1_\Lambda(\Omega^1(M))$.*

(ii) Si $\#^*_\Lambda(\Omega^*(M))$ es un subcomplejo de $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$, entonces la homología de este subcomplejo no depende de la forma de volumen elegida.

(iii) Si la clase modular de (M, Λ) es nula entonces $\#^*_\Lambda(\Omega^*(M))$ define un subcomplejo del complejo de homología $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$ y

$$\widetilde{H}^{canNP}_k(M) \cong H^{m-k}(\mathcal{D}),$$

para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$, donde $H^*(\mathcal{D})$ es la cohomología foliada de $(M, \mathcal{D})$ y $\widetilde{H}^{canNP}_*(M)$ denota la homología del complejo $(\#^*_\Lambda(\Omega^*(M)), \delta_\nu)$.

Demostración. (i) De (6.12), (6.28) y (6.29), tenemos que

$$\begin{aligned} i(\alpha)\delta_\nu(\#^k_\Lambda(\beta)) &= div_\nu(\#^{m-1}_\Lambda(\beta \wedge \alpha)) + (-1)^{m-k}\#^m_\Lambda(\beta \wedge d\alpha) \\ &= i(\alpha)(i(\beta)\mathcal{M}^\nu_\Lambda + (-1)^{m-1}\#^{k+1}_\Lambda(d\beta)), \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Omega^{m-k-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$. Así,

$$\delta_\nu(\#^k_\Lambda(\beta)) = (-1)^{m-1}\#^{k+1}_\Lambda(d\beta) + i(\beta)\mathcal{M}^\nu_\Lambda. \tag{6.35}$$

Por tanto, $\delta_\nu(\#^k_\Lambda(\Omega^k(M)) \subseteq \#^{k+1}_\Lambda(\Omega^{k+1}(M))$ para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$ si y sólo si $\mathcal{M}^\nu_\Lambda \in \#^1_\Lambda(\Omega^1(M))$.

(ii) Sea ν' otra forma de volumen sobre M. Entonces, existe una función $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, tal que $f \neq 0$ en todo punto y $\nu' = f\nu$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f > 0$. Así, consideramos los isomorfismos

$$\Psi^k : \#^k_\Lambda(\Omega^k(M)) \to \#^k_\Lambda(\Omega^k(M)), \quad P \mapsto \frac{1}{f}P.$$

Como $\delta_{\nu'} \circ \Psi^k = \Psi^{k-1} \circ \delta_\nu$, se sigue que los complejos $(\#_\Lambda^*(\Omega^*(M)), \delta_\nu)$ y $(\#_\Lambda^*(\Omega^*(M)), \delta_{\nu'})$ son isomorfos.
(iii) Si la clase modular de M es nula, existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que (ver (5.29))

$$\mathcal{M}_\Lambda^\nu = \#_\Lambda^1((-1)^{m-1} df). \tag{6.36}$$

Consecuentemente, por (i), se deduce que $\#_\Lambda^*(\Omega^*(M))$ define un subcomplejo de $(\mathcal{V}^*(M), \delta_\nu)$.
Por otra parte, usando la Proposición 6.1.4, podemos definir los isomorfismos de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos

$$h_k : \Omega^{m-k}(\mathcal{D}) = \frac{\Omega^{m-k}(M)}{ker \#_\Lambda^{m-k}} \to \#_\Lambda^{m-k}(\Omega^{m-k}(M)), \quad h_k([\alpha]) = e^{-f} \#_\Lambda^{m-k}(\alpha).$$

De (6.26), (6.35) y (6.36) se sigue que $h_k \circ d_\mathcal{D} = (-1)^{m-1} \delta_\nu \circ h_{k+1}$, donde $d_\mathcal{D}$ es la diferencial foliada de $(M, \mathcal{D})$. Así, las aplicaciones h_k inducen un isomorfismo entre el grupo de cohomología $H^{m-k}(\mathcal{D})$ y el grupo de homología $\widetilde{H}_k^{canNP}(M)$.

■

Usando los Teoremas 6.1.5, 6.3.3 y 6.3.6, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 6.3.7 *Sea (M, Λ) una variedad de Nambu-Poisson regular orientada de orden m, con $m \geq 3$. Si existe un volumen básico respecto a la foliación característica $\mathcal{D}$ de (M, Λ) entonces*

$$H_{NP}^k(M) \cong H^k(\mathcal{D}) \cong H_{m-k}^{canNP}(M),$$

para todo $k \in \{0, \ldots, m\}$.

6.4 Un ejemplo: Una estructura de Nambu-Poisson singular

Consideramos sobre $\mathbb{R}^3$ el 3-vector definido por

$$\Lambda = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{6.37}$$

donde (x_1, x_2, x_3) denotan las coordenadas usuales sobre $\mathbb{R}^3$. El 3-vector Λ define una estructura de Nambu-Poisson singular de orden 3 sobre $\mathbb{R}^3$. Sea ν la forma de volumen dada por

$$\nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Un cálculo directo prueba que

$$\begin{aligned} X_{x_1x_2} &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ X_{x_1x_3} &= -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_{x_2x_3} &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

y por tanto (ver (6.25)),

$$\mathcal{M}_\Lambda^\nu = 2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Ahora, si la clase modular de $(\mathbb{R}^3, \Lambda)$ fuera nula entonces existiría $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que

$$i(\alpha)\mathcal{M}_\Lambda^\nu = \#_\Lambda^2\alpha(f),$$

para todo $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Particularizando con las 2-formas $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_1 \wedge dx_3$, $dx_2 \wedge dx_3$ deduciríamos que

$$2x_j = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, 3. \tag{6.38}$$

Entonces,

$$f_{|\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}} = ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + c, \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, esto no es posible porque $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Así, la clase modular de $(\mathbb{R}^3, \Lambda)$ es no nula.

Ahora, probaremos que no existe dualidad entre la cohomología Nambu-Poisson y la homología canónica de Nambu-Poisson de $(\mathbb{R}^3, \Lambda)$. En realidad, demostraremos que

$$H^1_{NP}(\mathbb{R}^3) \ncong H_2^{canNP}(\mathbb{R}^3).$$

En primer lugar, calculamos $H^1_{NP}(\mathbb{R}^3)$. Para ello, procederemos como sigue. Puesto que $ker\#^2_\Lambda = \{0\}$, entonces

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) \cong \#^2_\Lambda(\Omega^2(\mathbb{R}^3)) = \{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)X/X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)\}.$$

Este hecho implica que se pueden identificar las co-cadenas $c^1 : \#^2_\Lambda(\Omega^2(\mathbb{R}^3)) \to C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ del complejo de cohomología de Nambu-Poisson con las 1-formas sobre $\mathbb{R}^3$ usando el isomorfismo

$$\Phi : C^1(\Omega^2(\mathbb{R}^3); C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3), \qquad (c^1 : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})) \mapsto \alpha$$

tal que $\alpha(X) = c^1(\beta)$, donde $\#^2_\Lambda(\beta) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)X$.
Bajo esta identificación el primer grupo de la cohomología de Nambu-Poisson $H^1_{NP}(\mathbb{R}^3)$ es el espacio cociente

$$\frac{\{\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)d\alpha - d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \wedge \alpha = 0\}}{\{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dg/g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})\}}. \tag{6.39}$$

Ahora, consideramos el conjunto

$$\mathcal{G} = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \forall i \in \{1,2,3\}\}$$

y la aplicación lineal

$$\mathcal{T} : \mathcal{G} \to H^1_{NP}(\mathbb{R}^3)$$

definida por $\mathcal{T}(g) = [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dg]$. Es claro que el núcleo de esta aplicación es el espacio $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Además, $\mathcal{T}$ es un epimorfismo. De hecho, si $[\alpha] \in H^1_{NP}(\mathbb{R}^3)$, de (6.39), deducimos que en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

$$d\left(\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) = 0.$$

Pero esto implica que existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \mathbb{R})$ tal que

$$\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = dg$$

y, por tanto,

$$\mathcal{T}(g) = [\alpha].$$

Así,

$$\frac{\mathcal{G}}{C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})} \cong H^1_{NP}(\mathbb{R}^3). \tag{6.40}$$

Ahora, probaremos que el espacio cociente $\dfrac{\mathcal{G}}{C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$. Para ello, usaremos los siguientes lemas (una demostración del primer lema puede ser encontrada en [99]).

Lema 6.4.1 *[99] Sean P, Q dos polinomios de grado m, ($m \geq 1$) en las indeterminadas x_1 y x_2 tal que satisfacen*

$$(x_1^2+x_2^2)(\frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1}) = 2(Px_2 - Qx_1).$$

Entonces existen dos polinomios $\widetilde{P}, \widetilde{Q}$ de grado $m-2$ tal que P y Q pueden expresarse de la siguiente forma:

$$P = ax_1 + bx_2 + (x_1^2+x_2^2)\widetilde{P}, \qquad Q = bx_1 + ax_2 + (x_1^2+x_2^2)\widetilde{Q},$$

donde a, b son constantes reales y $\dfrac{\partial \widetilde{P}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x_1}$.

Lema 6.4.2 *Sean A, B y C tres polinomios de grado m, ($m \geq 1$) en las indeterminadas x_1, x_2, x_3 tal que satisfacen*

$$\left.\begin{array}{rcl} (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(\dfrac{\partial A}{\partial x_2} - \dfrac{\partial B}{\partial x_1}) &=& 2(Ax_2 - Bx_1),\\ (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(\dfrac{\partial A}{\partial x_3} - \dfrac{\partial C}{\partial x_1}) &=& 2(Ax_3 - Cx_1),\\ (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(\dfrac{\partial B}{\partial x_3} - \dfrac{\partial C}{\partial x_2}) &=& 2(Ax_3 - Cx_2). \end{array}\right\} \tag{6.41}$$

Entonces existen tres polinomios $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ y $\widetilde{C}$ de grado $m-2$ tal que A, B y C pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} A &=& ax_1 + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\widetilde{A},\\ B &=& ax_2 + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\widetilde{B},\\ C &=& ax_3 + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\widetilde{C}. \end{array}\right\}$$

donde a es una constante real y $\dfrac{\partial \widetilde{A}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \widetilde{B}}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \widetilde{A}}{\partial x_3} = \dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial \widetilde{B}}{\partial x_3} = \dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial x_2}$.

Demostración. Basta probar que el resultado es cierto en el caso en que A, B y C son polinomios homogéneos. Si $m = 1$, es claro que $A = ax_1$, $B = ax_2$ y $C = ax_3$. Si $m \geq 2$ procederemos como sigue.
Los polinomios A y B pueden escribirse como

$$A(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{m} x_3^k A_k(x_1, x_2), \qquad B(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{m} x_3^k B_k(x_1, x_2),$$

donde $A_i(x_1, x_2)$ y $B_i(x_1, x_2)$ $(i = 0, \ldots, m)$ son polinomios homogéneos en las indeterminadas x_1, x_2.
De la primera igualdad de (6.41) deducimos que

$$(x_1^2 + x_2^2)(\frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \frac{\partial B_i}{\partial x_1}) = 2(A_i x_2 - B_i x_1), \quad i \in \{0, 1\}, \tag{6.42}$$

y para todo $r \in \{2, \ldots, m\}$,

$$(x_1^2 + x_2^2)(\frac{\partial A_r}{\partial x_2} - \frac{\partial B_r}{\partial x_1}) + (\frac{\partial A_{r-2}}{\partial x_2} - \frac{\partial B_{r-2}}{\partial x_1}) = 2(A_r x_2 - B_r x_1). \tag{6.43}$$

Usando (6.42) y el Lema 6.4.1 obtenemos que existen $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{B}_0$ y $\widetilde{B}_1$ polinomios en las indeterminadas x_1, x_2 tal que

$$A_i = (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{A}_i, \qquad B_i = (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{B}_i, \qquad \frac{\partial \widetilde{A}_i}{\partial x_2} = \frac{\partial \widetilde{B}_i}{\partial x_1},$$

para $i = 0, 1$.
Ahora, de estos hechos y de (6.43), tenemos que

$$(x_1^2 + x_2^2)(\frac{\partial (A_2 - \widetilde{A}_0)}{\partial x_2} - \frac{\partial (B_2 - \widetilde{B}_0)}{\partial x_1}) = 2x_2(A_2 - \widetilde{A}_0) - 2x_1(B_2 - \widetilde{B}_0).$$

Aplicando de nuevo el Lema 6.4.1 deducimos que existen $\widetilde{A}_2$ y $\widetilde{B}_2$ polinomios en las indeterminadas x_1 y x_2 tal que

$$A_2 = \widetilde{A}_0 + (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{A}_2, \qquad B_2 = \widetilde{B}_0 + (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{B}_2$$

con $\dfrac{\partial \widetilde{A}_2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \widetilde{B}_2}{\partial x_1}$.

Procediendo de forma similar, obtenemos una sucesión de polinomios $\widetilde{A}_0, \ldots, \widetilde{A}_m$, $\widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_m$ en las indeterminadas x_1 y x_2 tal que

$$A_i = (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{A}_i, \qquad B_i = (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{B}_i,$$

$$A_r = \widetilde{A}_{r-2} + (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{A}_r, \qquad B_r = \widetilde{B}_{r-2} + (x_1^2 + x_2^2)\widetilde{B}_r,$$

para $i = \{0, 1\}$ y para $r \in \{2, \ldots, m\}$. Así, los polinomios A y B tienen las siguientes expresiones

$$A = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sum_{k=0}^{m} x_3^k \widetilde{A}_k, \qquad B = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sum_{k=0}^{m} x_3^k \widetilde{B}_k.$$

Con el mismo procedimiento también deducimos que el polinomio C puede ser escrito como

$$C = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sum_{k=0}^{m} x_1^k \widetilde{C}_k,$$

donde $\widetilde{C}_k$ son polinomios en las indeterminadas x_2 y x_3.

■

Este último Lema nos permite obtener el resultado ya anunciado.

Proposición 6.4.3 *El espacio cociente* $\dfrac{\mathcal{G}}{C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})}$ *es isomorfo a* $\mathbb{R}$.

Demostración. Si $g \in \mathcal{G}$, tenemos que las funciones reales C^∞ diferenciables sobre $\mathbb{R}^3$

$$g_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad g_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial g}{\partial x_2}, \quad g_3 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial g}{\partial x_3},$$

satisfacen

$$\left.\begin{array}{rcl} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}) & = & 2(x_2 g_1 - x_1 g_2), \\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1}) & = & 2(x_3 g_1 - x_1 g_3), \\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\dfrac{\partial g_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2}) & = & 2(x_3 g_2 - x_2 g_3). \end{array}\right\} \tag{6.44}$$

Entonces, para cualquier $m \geq 2$ consideramos los desarrollos de Taylor de orden $m+1$ en el origen de las funciones g_1, g_2, g_3. Denotamos dichos desarrollos como $g_1 = A_m + R_{1,m}$, $g_2 = B_m + R_{2,m}$ y $g_3 = C_m + R_{3,m}$ donde A_m, B_m y C_m son polinomios de grado m que satisfacen las condiciones del Lema 6.4.2 y $R_{i,m}$ son los restos.
Sea $[k(x_1,x_2,x_3)]_{(0,0,0)}$ el desarrollo formal de Taylor en el origen de $k \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Entonces, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} (g_1(x_1,x_2,x_3) - ax_1)_{(0,0,0)} &=& (x_1^2+x_2^2+x_3^2)A(x_1,x_2,x_3), \\ (g_2(x_1,x_2,x_3) - ax_2)_{(0,0,0)} &=& (x_1^2+x_2^2+x_3^2)B(x_1,x_2,x_3), \\ (g_3(x_1,x_2,x_3) - ax_3)_{(0,0,0)} &=& (x_1^2+x_2^2+x_3^2)C(x_1,x_2,x_3), \end{array}\right\}$$

donde $A(x_1,x_2,x_3)$, $B(x_1,x_2,x_3)$ y $C(x_1,x_2,x_3)$ son adecuadas series de potencias. Usando el teorema de Borel tenemos que existen $\alpha,\beta,\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} (\alpha(x_1,x_2,x_3))_{(0,0,0)} &=& A(x_1,x_2,x_3), \\ (\beta(x_1,x_2,x_3))_{(0,0,0)} &=& B(x_1,x_2,x_3), \\ (\gamma(x_1,x_2,x_3))_{(0,0,0)} &=& C(x_1,x_2,x_3). \end{array}\right\}$$

Nótese que los desarrollos formales de Taylor en el origen de las funciones

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 &=& g_1 - ax_1 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\alpha, \\ \beta_1 &=& g_2 - ax_2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\beta, \\ \gamma_1 &=& g_3 - ax_3 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\gamma, \end{array}$$

son nulos. Por tanto, $\dfrac{\alpha_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$, $\dfrac{\beta_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$ y $\dfrac{\gamma_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$ son funciones C^∞-diferenciables sobre $\mathbb{R}^3$.
Consideraremos ahora $h_1,h_2,h_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ definidas por

$$\begin{array}{rcl} h_1 &=& \alpha + \dfrac{\alpha_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}, \\ h_2 &=& \beta + \dfrac{\beta_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}, \\ h_3 &=& \gamma + \dfrac{\gamma_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}. \end{array}$$

Entonces, usando (6.44) y el hecho de que

$$g_i = ax_i + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)h_i, \qquad i = 1,2,3,$$

obtenemos las igualdades siguientes

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_2} = 0. \tag{6.45}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} dg &= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{g_i}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} dx_i \right)_{|\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}} = \\ &= \left(d(\frac{a}{2} ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) + \sum_{i=1}^{3} h_i dx_i \right)_{|\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}} . \end{aligned} \tag{6.46}$$

Por otra parte, usando (6.45) deducimos que $h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3$ es una 1-forma cerrada sobre $\mathbb{R}^3$ y como $H^1_{dR}(\mathbb{R}^3) = \{0\}$, concluimos que existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, tal que $h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3 = d\psi$. Sustituyendo en (6.46), tenemos que

$$g - \frac{a}{2} ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \psi_{|\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente

$$[g] = [\frac{a}{2} ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)], \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Esto finaliza la demostración.

■

De (6.40) y la Proposición 6.4.3, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 6.4.4 *Sea Λ la estructura de Nambu-Poisson sobre $\mathbb{R}^3$ dada por (6.37). Entonces*

$$H^1_{NP}(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}.$$

Observación 6.4.5 En [98] el autor ha generalizado el resultado anterior para gérmenes en 0 de m-vectores $\Lambda = f \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}$ sobre $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$, donde f es un polinomio cuasihomogéneo de codimensión finita. De hecho, en este artículo son calculados todos los grupos de cohomología de Nambu-Poisson para este tipo de estructuras.

Por otra parte, como $ker \#_{\Lambda}^{1} = \{0\}$, se sigue que

$$\mathcal{V}_t^k(\mathbb{R}^3, \Lambda) = \mathcal{V}^k(\mathbb{R}^3),$$

para todo k. Así, la homología canónica de Nambu-Poisson de $(\mathbb{R}^3, \Lambda)$ es dual de la cohomología de De Rham. En particular , $H_2^{canNP}(\mathbb{R}^3) \cong H_{dR}^1(\mathbb{R}^3) = \{0\}$.

Esto implica que $H_{NP}^1(\mathbb{R}^3) \ncong H_2^{canNP}(\mathbb{R}^3)$, y por tanto, no se tiene dualidad entre la cohomología de Nambu-Poisson y la homología canónica de Nambu-Poisson.

Observación 6.4.6 (i) Si $\#_{\Lambda}^{r} : \Omega^r(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{V}^{3-r}(\mathbb{R}^3)$, $r = 1, 2, 3$, es el homomorfismo inducido por la estructura de Nambu-Poisson Λ sobre $\mathbb{R}^3$, entonces, es claro que $\#_{\Lambda}^{r}$ es un monomorfismo. Por tanto, si $\mathcal{D}$ es la foliación característica de $(\mathbb{R}^3, \Lambda)$, tenemos que la cohomología foliada de $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D})$ es isomorfa a la cohomología de De Rham. En particular $H_{NP}^1(\mathbb{R}^3) \ncong H^1(\mathcal{D}) = \{0\}$. Consecuentemente, la cohomología de Nambu-Poisson y la cohomología foliada no son isomorfas.

(ii) Un cálculo directo prueba que $\mathcal{M}_{\Lambda}^{\nu} \notin \#_{\Lambda}^{1}(\Omega^1(\mathbb{R}^3))$. Así, $\#_{\Lambda}^{*}(\Omega^*(\mathbb{R}^3)) = \bigoplus_{k=0,\ldots,3} \#_{\Lambda}^{k}(\Omega^k(\mathbb{R}^3))$ no es un subcomplejo del complejo de homología $(\mathcal{V}^*(\mathbb{R}^3), \delta_\nu)$ (ver el Teorema 6.3.6).

CAPÍTULO 7

Dualidad y clase modular de una estructura de Nambu-Jacobi

7.1 Cohomología de Nambu-Jacobi

La estructura de algebroide de Leibniz asociada a una variedad de Nambu-Jacobi descrita en el Capítulo 5 (ver (5.23)), nos permite definir un operador diferencial de cuadrado cero cuya cohomología, en general, tiene grados infinitos. Para solventar este problema, en el caso de una variedad de Nambu-Poisson, en el Capítulo 6 consideramos un álgebra de Lie inducida por la estructura del algebroide de Leibniz asociada a la variedad de Nambu-Poisson. Este álgebra de Lie nos permite construir una nueva cohomología de grados finitos, la cohomología de Nambu-Poisson.

Con el fin de obtener un análogo de esta cohomología para estructuras de Nambu-Jacobi, consideramos diversas álgebras de Lie inducidas por la estructura de algebroide de Leibniz asociada a la variedad de Nambu-Jacobi.

7.1.1 Algunas álgebras de Lie asociadas a una variedad de Nambu-Jacobi

Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$ y $(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ , \ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$ el algebroide de Leibniz asociado a la estructura $(\Lambda, \Box)$ (ver Teorema 5.3.9). De forma análoga al caso de una estructura de Nambu-Poisson, podemos considerar el centro del álgebra de Leibniz $(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M), [\![\ , \ ]\!]_{(\Lambda,\Box)})$, esto es,

$$
\begin{aligned}
Z(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)) = \{&(\alpha, \beta) \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M) / \\
&[\![(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} = (0, 0), \forall (\alpha', \beta') \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)\}.
\end{aligned}
$$

Con el fin de dar una definición explícita de esta álgebra de Lie consideramos el siguiente homomorfismo de fibrados vectoriales (sobre la identidad de M)

$$
\begin{aligned}
\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)} : \wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M) &\to TM \times \mathbb{R} \qquad (7.1)\\
(\alpha, \beta) &\to (\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta), (-1)^{m-1} \#^{m-1}_{\Box}(\alpha)).
\end{aligned}
$$

Denotaremos también por $\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)} : \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M) \to \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ al correspondiente homomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos.

Veremos a continuación que este homomorfismo de fibrados vectoriales induce un homomorfismo entre el algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ , \ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$ y el algebroide de Lie $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$ (ver Ejemplo 1.4.3 *iii*)).

Proposición 7.1.1 *Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, con $m \geq 3$. El homomorfismo de fibrados vectoriales definido en (7.1) induce un homomorfismo de algebroides de Leibniz entre el algebroide de Leibniz asociado a la estructura de Nambu-Jacobi y el algebroide de Lie $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$.*

Demostración. En primer lugar veamos que $\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}$ es un homomorfismo de álgebras de Leibniz, es decir,

$$
\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}([\![(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)}) = [\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta), \#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha', \beta')], \qquad (7.2)
$$

para $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')\in\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)$.
De (5.11) y (5.19) deducimos que

$$\#_{\Box}^{m-1}([\![\alpha,\alpha']\!]_\Lambda)=\#_\Lambda^{m-1}(\alpha')(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha))-\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha')). \tag{7.3}$$

Además, usando que $\Box$ es una estructura de Nambu-Poisson y que, por tanto, se satisface (5.6), obtenemos fácilmente

$$i(\mathcal{L}_{\#_{\Box}^{m-2}(\beta)}\alpha')\Box=\#_{\Box}^{m-2}(\beta)(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha'))+(-1)^m\#_{\Box}^{m-1}(\alpha')\#_{\Box}^{m-1}(d\beta). \tag{7.4}$$

Por otro lado, como $\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}$ es un homomorfismo de algebroides de Leibniz,

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}([\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)})=[\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta),\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha',\beta')]. \tag{7.5}$$

Entonces, (1.36), (5.23), (7.1), (7.3), (7.4) y (7.5) nos permiten probar que (7.2) se satisface.
Finalmente, de (7.1) deducimos que

$$\pi\circ\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}=\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}.$$

Así, $\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}$ es un homomorfismo de algebroides de Leibniz.

■

A continuación, como ya anunciamos anteriormente, damos una descripción explícita del centro del álgebra de Leibniz $(\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M),[\![\;,\;]\!]_{(\Lambda,\Box)})$.

Proposición 7.1.2 *Sea* $(M,\Lambda,\Box)$ *una variedad de Nambu-Jacobi de orden* m, $m\geq 3$. *Entonces, el centro del álgebra de Leibniz* $(\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M),[\![\;,\;]\!]_{(\Lambda,\Box)})$ *es el conjunto*

$$\begin{aligned}(\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1})^{-1}(\{0\}\times\mathbb{R}) &= \{(\alpha,\beta)\in\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)/\\ &\qquad \#_\Lambda^{m-1}(\alpha)=-\#_{\Box}^{m-2}(\beta),\ d(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha))=0\}.\end{aligned}$$

Demostración. Sean α y β una $(m-1)$-forma y una $(m-2)$-forma sobre M respectivamente, tales que $\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta)\in\{0\}\times\mathbb{R}$, esto es,

$$\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)+\#_{\Box}^{m-2}(\beta)=0 \quad \text{y} \quad d(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha))=0. \tag{7.6}$$

Entonces, de (5.11), (5.23) y (7.6) se sigue que

$$[\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} = (-1)^m(\#_\Lambda^m(d\alpha) - \#_\Box^{m-1}(d\beta))(\alpha',\beta'), \tag{7.7}$$

para todo $(\alpha',\beta') \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)$.
Por otro lado, usando (5.6), (5.19) y (7.6), tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& \mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)}\Lambda + \mathcal{L}_{\#_\Box^{m-2}(\beta)}\Lambda = (-1)^m(\#_\Lambda^m(d\alpha) - \#_\Box^{m-1}(d\beta))\Lambda, \\ 0 &=& \mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)}\Box + \mathcal{L}_{\#_\Box^{m-2}(\beta)}\Box = (-1)^m(\#_\Lambda^m(d\alpha) - \#_\Box^{m-1}(d\beta))\Box. \end{array}$$

Así, deducimos que $\#_\Lambda^m(d\alpha) - \#_\Box^{m-1}(d\beta) = 0$. Consecuentemente (ver (7.7)),

$$[\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} = 0,$$

para todo $(\alpha',\beta') \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)$.
Recíprocamente, supongamos que α y β son una $(m-1)$-forma y una $(m-2)$-forma sobre M, respectivamente, tales que

$$[\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} = (0,0), \quad \text{para todo } (\alpha',\beta') \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M).$$

Si $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ entonces (ver (5.9))

$$\begin{array}{rl} (0,0) = & [\![(\alpha,\beta), f(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} = f[\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} \\ & +\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta)(f)(\alpha',\beta') = \widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta)(f)(\alpha',\beta'), \end{array}$$

para cualquier $(\alpha',\beta') \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)$. Por tanto,

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta)(f) = 0,$$

para todo $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Así, concluimos que

$$\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta) = 0. \tag{7.8}$$

Por otro lado, de (5.23), tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (0,0) &=& [\![(\alpha,\beta),(0,\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)} = ((-1)^{m-1}d(\#_\Box^{m-1}(\alpha)) \wedge \beta', \\ && [\![\beta,\beta']\!]_\Box + \mathcal{L}_{\#_\Lambda^{m-1}(\alpha)}\beta' + (-1)^m\#_\Lambda^m(d\alpha)\beta'), \end{array}$$

para todo $\beta' \in \Omega^{m-2}(M)$. En consecuencia, $d(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha)) \wedge \beta' = 0$ para todo $\beta' \in \Omega^{m-2}(M)$, esto es,

$$d(\#_{\Box}^{m-1}(\alpha)) = 0. \tag{7.9}$$

Finalmente, (7.8), (7.9) y la conexidad de M implican que

$$\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta) = (\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta), (-1)^{m-1}\#_{\Box}^{m-1}(\alpha)) \in \{0\} \times \mathbb{R}.$$

■

Observación 7.1.3 El conjunto $Z(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)) = (\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1})^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R})$ no es, en general, un $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulo. En efecto, si lo fuese, para cada $(\alpha,\beta) \in (\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1})^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R})$ se tendría que

$$f(\alpha,\beta) \in (\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1})^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}),\ \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R}).$$

Esto es, $\#_{\Box}^{m-1}(\alpha)$ es constante y $f\#_{\Box}^{m-1}(\alpha)$ sería constante para cualquier $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Luego, $\#_{\Box}^{m-1}(\alpha) = 0$, es decir, $\alpha \in ker\#_{\Box}^{m-1}$.

Corolario 7.1.4 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, con $m \geq 3$. Entonces*

$$ker\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1} \subseteq Z(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)) \subseteq ker\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}. \tag{7.10}$$

Además, $ker\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}$ es la subálgebra de Leibniz maximal contenida en $Z(\Omega^{m-1}(M)$ $\oplus\Omega^{m-2}(M))$ que es un $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulo.

Demostración. (7.10) es una consecuencia inmediata de la Proposición 7.1.2. Supongamos que A es una subálgebra de Leibniz contenida en $Z(\Omega^{m-1}(M)$ $\oplus\Omega^{m-2}(M))$ que es un $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulo. Entonces $A \subseteq ker\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}$. En efecto, si $(\alpha,\beta) \in A$ y $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, entonces

$$f(\alpha,\beta) \in A \subseteq Z(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)) = (\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1})^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}),$$

para cualquier $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Así, $\widetilde{\#}_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}(\alpha,\beta) = 0$ y $\#_{\Box}^{m-1}(\alpha) = 0$ (ver (7.1) y Observación 7.1.3). Por tanto, $(\alpha,\beta) \in ker\#_{(\Lambda,\Box)}^{m-1}$. ■

Consecuentemente, si $(M, \Lambda, \Box)$ es una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$, el espacio cociente

$$\frac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}$$

es un $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulo dotado con un corchete antisimétrico $[\![\ ,\ ]\!]^{\sim}_{(\Lambda,\Box)}$ dado por

$$[\![[(\alpha, \beta)], [(\alpha', \beta')]]\!]^{\sim}_{(\Lambda,\Box)} = [[\![(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)}], \tag{7.11}$$

para todo $[(\alpha, \beta)], [(\alpha', \beta')] \in \dfrac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}$. Este corchete satisface la identidad de Jacobi y la siguiente propiedad

$$[\![[(\alpha, \beta)], f[(\alpha', \beta')]]\!]^{\sim}_{(\Lambda,\Box)} = f[\![[(\alpha, \beta)], [(\alpha', \beta')]]\!]^{\sim}_{(\Lambda,\Box)} + \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta)(f)[(\alpha', \beta')],$$

para cualesquiera $[(\alpha, \beta)], [(\alpha', \beta')] \in \dfrac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Nota que este corchete está bien definido ya que si $(\alpha, \beta) \in ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}$ entonces (ver Proposición 7.1.1)

$$\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}([\![(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)}) = \big[\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta), \#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha', \beta')\big] = (0, 0).$$

Además, la aplicación

$$\bar{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)} : \frac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}} \to \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$\bar{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}([(\alpha, \beta)]) = \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta),$$

está bien definida e induce un homomorfismo de álgebras de Lie entre $\left(\dfrac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}, [\![\ ,\ ]\!]^{\sim}_{(\Lambda,\Box)}\right)$ y $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$.

Observación 7.1.5 *i)* Si $(M, \Lambda, \Box)$ es una variedad regular de Nambu-Jacobi de orden m, $m \geq 3$, entonces usando el Teorema 5.2.2 podemos deducir fácilmente que

$$ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)} = Z(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)) = ker\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}.$$

Además,

$$(\frac{\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}},[\![\ ,\ ]\!]^{\sim}_{(\Lambda,\Box)},\bar{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}),$$

es un algebroide de Lie sobre M.
ii) Si (M,Λ) es una estructura de Nambu-Poisson de orden m, $m\geq 3$, entonces

$$ker\#^{m-1}_{(\Lambda,0)}=Z(\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M))=ker\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,0)}=ker\#^{m-1}_{\Lambda}\oplus\Omega^{m-2}(M)$$

y por tanto,

$$\frac{\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}\cong\frac{\wedge^{m-1}(T^*M)}{ker\#^{m-1}_{\Lambda}}.$$

Así, el álgebra de Lie $(\frac{\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,0)}},[\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,0)})$ es isomorfa al álgebra de Lie $(\frac{\wedge^{m-1}(T^*M)}{ker\#^{m-1}_{\Lambda}},[\![\ ,\ ]\!]^{\sim}_{\Lambda})$ descrita en la Sección 6.1.1.

7.1.2 La cohomología de Nambu-Jacobi de una variedad de Nambu-Jacobi

Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m\geq 3$. Como ya hemos visto en la sección precedente, el espacio cociente $\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}$, con el corchete inducido (ver (7.11)), es un álgebra de Lie. Además, usando el hecho que $\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, podemos comprobar fácilmente que $C^\infty(M,\mathbb{R})$ es un $(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}})$-módulo relativo a la representación

$$\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}\times C^\infty(M,\mathbb{R})\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$$([(\alpha,\beta)],f)\mapsto\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta)(f).$$

Por tanto, podemos considerar el complejo de cohomología definido por esta representación

$$(C^*(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}};C^\infty(M,\mathbb{R}))=\\ \bigoplus_k C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}};C^\infty\ (M,\mathbb{R})),\partial_{NJ}),$$

donde el espacio de las k-cocadenas $C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}};C^\infty\ (M,\mathbb{R}))$ consiste en las aplicaciones antisimétricas $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales

$$c^k:(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}})\times\dots^{(k}\dots\times(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}})\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

y el operador de cohomología ∂_{NJ} está dado por

$$\begin{aligned}\partial_{NJ}c^k([(\alpha_0,\beta_0)],\dots,[(\alpha_k,\beta_k)])&=\sum_{i=0}^k(-1)^i\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha_i,\beta_i)(c^k([(\alpha_0,\beta_0)],\\ &\dots,[\widehat{(\alpha_i,\beta_i)}],\dots,[(\alpha_k,\beta_k)])+\\ \sum_{0\le i<j\le k}&(-1)^{i-1}c^k([(\alpha_0,\beta_0)],\dots,[\widehat{(\alpha_i,\beta_i)}],\dots,[(\alpha_{j-1},\beta_{j-1})],\\ &[[\![(\alpha_i,\beta_i),(\alpha_j,\beta_j)]\!]_{(\Lambda,\Box)}],\dots,[(\alpha_k,\beta_k)]).\end{aligned}\tag{7.12}$$

A la cohomología de este complejo la llamaremos *cohomología de Nambu-Jacobi de M* y la denotamos por $H^*_{NJ}(M)$.

Observación 7.1.6 Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi de orden m, $m\ge 3$ y $(C^*(\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M);C^\infty(M,\mathbb{R})),\partial)$ el complejo de cohomología asociado al algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M),[\![,]\!]_{(\Lambda,\Box)},\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$. La proyección natural $p:\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)\to\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}$ nos permite definir los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$p^k:C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}};C^\infty(M,\mathbb{R}))\to C^k(\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M);C^\infty(M,\mathbb{R}))$$

$$c^k \mapsto p^k(c^k),$$

donde

$$p^k(c^k)((\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_k,\beta_k)) = c^k([(\alpha_1,\beta_1)],\ldots,[(\alpha_k,\beta_k)]).$$

Un cálculo directo, usando (5.29) y (7.12) demuestra que este homomorfismo induce un homomorfismo de cohomología

$$p^* : H^*_{NJ}(M) \to H^*(\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M); C^\infty(M,\mathbb{R})).$$

A continuación, relacionaremos la cohomología de Nambu-Jacobi de una variedad de Nambu-Jacobi $(M,\Lambda,\Box)$ de orden m, $m \geq 3$, con la cohomología foliada asociada a su foliación característica.
Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n y de orden m, con $3 \leq m \leq n$. Denotamos por $\widetilde{\#}^k_{(\Lambda,\Box)} : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^{m-k+1}(M)$ y $\#^k_{(\Lambda,\Box)} : \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^{m-k+1}(M) \oplus \mathcal{V}^{m-k}(M)$ los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos dados por

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{\#}^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta) = \#^k_\Lambda(\alpha) + \#^{k-1}_\Box(\beta), \\ \#^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta) = (\widetilde{\#}^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta), (-1)^{m-k}\#^k_\Box(\alpha)). \end{array}\right\} \tag{7.13}$$

Proposición 7.1.7 *Si* $(\alpha,\beta) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ *es tal que* $\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta) = (0,0)$*, entonces*

$$\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha,\beta)) = (0,0),$$

donde $\widetilde{d}$ *es la diferencial del algebroide de Lie* $(TM \times \mathbb{R}, [\ ,\ ], \pi)$.

Demostración. Definimos los siguientes subconjuntos abiertos de M

$$R_1 = \{x \in M / \Lambda(x) \neq 0\} \quad \text{y} \quad R_2 = \{x \in M / \Box(x) \neq 0\}.$$

Nota que

$$R = (R_1 \cap R_2) \cup (Int(M-R_1) \cap R_2) \cup (Int(M-R_2) \cap R_1) \cup (Int(M-(R_1 \cup R_2)))$$

es un subconjunto denso de M, por tanto, es suficiente probar que en $\mathbb{R}$

$$\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\tilde{d}(\alpha,\beta)) = (0,0).$$

Si $x \in R$, distinguimos los siguientes casos:
a) $x \in R_1 \cap R_2$. En tal caso, ya que $(\Lambda, \Box)$ es una estructura regular en el abierto $R_1 \cap R_2$, tenemos que (ver Teorema 5.2.2), existe un entorno U de x en $R_1 \cap R_2$ y $\theta \in \Omega^1(U)$ cerrada tal que $\Box_{|U} = i(\theta)\Lambda_{|U}$. Así, la relación $\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta) = (0, 0)$ implica que

$$\left.\begin{array}{rcl} \#^k_\Lambda(\alpha + \theta \wedge \beta) & = & 0 \\ \#^{k+1}_\Lambda(\theta \wedge \alpha) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{7.14}$$

en U. Usando (1.53), (7.14), la Proposición 6.1.4 para la estructura de Nambu-Poisson $\Lambda_{|R_1 \cap R_2}$, y el hecho de que θ es una 1-forma cerrada, concluimos fácilmente que $\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha, \beta))(x) = (0, 0)$.
b) $x \in R_1 \cap Int(M - R_2)$. La relación $\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta) = (0, 0)$ implica que $\#^k_\Lambda(\alpha) = 0$ en el abierto $R_1 \cap Int(M - R_2)$. En consecuencia, usando la Proposición 6.1.4 para la estructura de Nambu-Poisson $\Lambda_{|R_1 \cap Int(M-R_2)}$ deducimos que $\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha, \beta))(x) = (0, 0)$.
c) $x \in R_2 \cap Int(M - R_1)$. La relación $\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta) = (0, 0)$ implica que en el abierto $R_2 \cap Int(M - R_1)$

$$\#^{k-1}_\Box(\beta) = 0 \quad \text{y} \quad \#^k_\Box(\alpha) = 0. \tag{7.15}$$

Así, usando (1.53), (7.15) y la Proposición 6.1.4 para la estructura de Nambu-Poisson $\Lambda_{|R_2 \cap Int(M-R_1)}$, deducimos nuevamente que

$$\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha, \beta))(x) = (0, 0).$$

d) Por último, si $x \in Int(M - R_1 \cup R_2)$, obtenemos fácilmente que

$$\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha, \beta))(x) = (0, 0).$$

Por consiguiente, $\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha, \beta))(x) = (0, 0)$, para todo $x \in R$.
Finalmente, por continuidad, concluimos que

$$\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha, \beta)) = (0, 0).$$

■

Este resultado nos permite considerar el complejo de cohomología

$$(\frac{\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M)}{ker\#^*_{(\Lambda,\Box)}}, \bar{d}),$$

donde $\bar{d}([(\alpha,\beta)]) = [\widetilde{d}(\alpha,\beta)]$. Denotamos por $\overline{H}^*(M)$ la cohomología de este complejo.
En el caso regular tenemos que esta cohomología es la cohomología foliada asociada a la foliación característica de la estructura de Nambu-Jacobi.

Proposición 7.1.8 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una estructura de Nambu-Jacobi regular de orden m, $m \geq 3$. Entonces, si $H^*(\mathcal{F})$ denota la cohomología foliada asociada a la foliación característica $\mathcal{F}$ de M,*

$$H^k(\mathcal{F}) \cong \overline{H}^k(M),$$

para todo k.

Demostración. Nótese que $\Omega^k(M,\mathcal{F}) = ker\#^k_\Lambda$. En efecto, de la regularidad de $(\Lambda,\Box)$ deducimos que para cada punto x de M existe un abierto U, $x \in U$, y una 1-forma cerrada θ_U sobre U tal que

$$\Box_{|U} = i(\theta_U)\Lambda_{|U}. \tag{7.16}$$

Por otra parte, $\Omega^k(M,\mathcal{F}) = \Omega^k(M,\mathcal{D}_\Lambda) \cap \Omega^k(M,\mathcal{D}_\Box)$, donde $\mathcal{D}_\Lambda$ y $\mathcal{D}_\Box$ son las foliaciones características inducidas por las estructuras de Nambu-Poisson Λ y $\Box$, respectivamente. Así, usando (7.16) y la Proposición 6.1.4, concluimos que

$$\Omega^k(M,\mathcal{F}) = ker\#^k_\Lambda. \tag{7.17}$$

Consideramos los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$\phi_k : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M),$$

dados por

$$\phi_k(\alpha) = (\alpha, 0) \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \Omega^k(M). \tag{7.18}$$

Un cálculo directo prueba que

$$\phi_{k+1} \circ d = \widetilde{d} \circ \phi_k. \tag{7.19}$$

Además, (7.14) y (7.16) implican que ϕ_k induce un isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$\widetilde{\phi}_k : \Omega^k(\mathcal{F}) = \frac{\Omega^k(M)}{ker\#^k_\Lambda} \to \frac{\Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)}{ker\widetilde{\#}^k_{(\Lambda,\square)}}. \tag{7.20}$$

Usando este hecho, (7.17) y (7.19) deducimos que

$$H^k(\mathcal{F}) \cong \overline{H}^k(M),$$

para todo k.

■

Para relacionar esta cohomología con la cohomología de Nambu-Jacobi de M introducimos los siguientes homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos.

$$\widetilde{i}^k : \frac{\Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)}{ker\#^k_{(\Lambda,\square)}} \to C^k\Big(\frac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\square)}}; C^\infty(M,\mathbb{R})\Big), \tag{7.21}$$

dado por $\widetilde{i}^k([(\alpha,\beta)]) = \Psi_{[(\alpha,\beta)]}$, donde

$$\Psi_{[(\alpha,\beta)]} : \frac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\square)}} \times \stackrel{k)}{\ldots\ldots} \times \frac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\square)}} \to C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

es la aplicación definida por

$$\begin{aligned} &\Psi_{[(\alpha,\beta)]}([(\alpha_1,\beta_1)],\ldots,[(\alpha_k,\beta_k)]) = \\ &\qquad i(\#^{m-1}_{(\Lambda,\square)}(\alpha_k,\beta_k))\ldots i(\#^{m-1}_{(\Lambda,\square)}(\alpha_1,\beta_1))(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Un cálculo simple usando (1.53), (7.12), (7.13), (7.21) y (7.22), demuestra que

$$\widetilde{i}^{k+1} \circ \bar{d} = \partial_{NJ} \circ \widetilde{i}^k.$$

Por tanto, las aplicaciones $\widetilde{i}^k$ inducen un monomorfismo entre los complejos $\Big(\dfrac{\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M)}{ker\#^*_{(\Lambda,\square)}}, \bar{d}\Big)$ y $\Big(C^*\Big(\dfrac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\square)}}; C^\infty(M,\mathbb{R})\Big), \partial_{NJ}\Big)$. Denotaremos por $\widetilde{i}^k : \overline{H}^k(M) \to H^k_{NJ}(M)$ el correspondiente *homomorfismo en cohomología*.

A continuación, consideraremos el caso particular en que la estructura de Nambu-Jacobi es regular. Nótese que entonces $ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)} = ker\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}$ (ver la Observación 7.1.5) y que el triple $(\dfrac{\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}, [\![\ ,\ ]\!]_{\widetilde{(\Lambda,\Box)}}, \overline{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$ es un algebroide de Lie sobre M (ver la Observación 7.1.5) cuya cohomología es la cohomología de Nambu-Jacobi de M. Además, usando (1.35), (1.54), (7.20) y (7.22), deducimos que

$$\psi^k \circ i^k \circ \widetilde{\phi}_k = \Pi^k,$$

donde $\psi^k : C^k(\dfrac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}; C^\infty(M,\mathbb{R})) \to C^k(\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^{m-1}(M)\oplus \Omega^{m-2}(M)); C^\infty(M,\mathbb{R}))$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos inducido por el isomorfismo de fibrados vectoriales $\dfrac{\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M)}{ker\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}} \to \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M))$, $\widetilde{\phi}_k : \Omega^k(\mathcal{F}) \to \dfrac{\Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)}{ker\widetilde{\#}^{k}_{(\Lambda,\Box)}}$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos definido en (7.20) (ver (7.18)) y $\Pi^k : \Omega^k(\mathcal{F}) \to C^k(\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M); C^\infty(M,\mathbb{R})))$ es el isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos dado en (1.54).
Así, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 7.1.9 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad regular de Nambu-Jacobi de orden m, $m\geq 3$. Entonces, los homomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos*

$$\widetilde{i}^k : \frac{\Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)}{ker\#^k_{(\Lambda,\Box)}} \to C^k(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}; C^\infty(M,\mathbb{R})),$$

inducen un isomorfismo de complejos

$$\widetilde{i}^* : (\frac{\Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M)}{ker\#^*_{(\Lambda,\Box)}}, \bar{d}) \to (C^*(\frac{\Omega^{m-1}(M)\oplus\Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}}; C^\infty(M,\mathbb{R})), \partial_{NJ}).$$

Así, la cohomología de Nambu-Jacobi de M es isomorfa a la cohomología $\overline{H}^*(M)$ y a la cohomología foliada $H^*(\mathcal{F})$, esto es,

$$H^k(\mathcal{F}) \cong \overline{H}^k(M) \cong H^k_{NJ}(M), \ \ para\ todo\ \ k.$$

7.2 Una homología asociada a una variedad de Nambu-Jacobi

Sea M una variedad orientada de dimensión n y sea $\nu \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen sobre M. Denotamos por $\flat_{(0,\nu)} : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to \Omega^{n-k+1}(M) \oplus \Omega^{n-k}(M)$ el isomorfismo de $C^\infty(M, \mathbb{R})$-módulos dado por

$$\begin{aligned} \flat_{(0,\nu)}(P,Q) = i((P,Q))(0,\nu) &= (i(Q)\nu, (-1)^k i(P)\nu) \\ &= (\flat_\nu(Q), (-1)^k \flat_\nu(P)). \end{aligned} \tag{7.23}$$

Usando este isomorfismo y la diferencial $\widetilde{d}$ definida en (1.53), podemos considerar el siguiente operador de homología

$$\delta_{(0,\nu)} = \flat_{(0,\nu)}^{-1} \circ \widetilde{d} \circ \flat_{(0,\nu)} : \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M) \to \mathcal{V}^{k-1}(M) \oplus \mathcal{V}^{k-2}(M). \tag{7.24}$$

La homología asociada al complejo $(\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), \delta_{(0,\nu)})$ la denotaremos por $H_*^{(0,\nu)}(M)$.
Nota que, de (1.53), (7.23) y (7.24),

$$\delta_{(0,\nu)}(X, f) = div_\nu X, \tag{7.25}$$

para cualquier $(X, f) \in \mathfrak{X}(M) \oplus C^\infty(M, \mathbb{R})$ y que

$$\delta_{(0,\nu)}(P, Q) = (\delta_\nu(P), \delta_\nu(Q)), \tag{7.26}$$

para todo $(P,Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$, donde δ_ν es el operador de homología definido en (6.8).
Así, $H_*^{(0,\nu)}(M) \cong H_*^\nu(M) \oplus H_{*-1}^\nu(M)$ y por tanto, la homología $H_*^{(0,\nu)}(M)$ es dual a la cohomología $\overline{H}^*(M) \cong H_{dR}^*(M) \oplus H_{dR}^{*-1}(M)$, lo que implica que $H_*^{(0,\nu)}(M)$ no depende de la forma de volumen elegida. A continuación, daremos una expresión más explícita de $\delta_{(0,\nu)}$.

Proposición 7.2.1 *Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n, orientada y de orden m, $m \geq 3$. Para todo $(\alpha, \beta) \in \Omega^{k-1}(M) \oplus \Omega^{k-2}(M)$ y para todo $(P,Q) \in \mathcal{V}^k(M) \oplus \mathcal{V}^{k-1}(M)$ se tiene que*

$$i((\alpha,\beta))\delta_{(0,\nu)}(P,Q) = \delta_{(0,\nu)}(i((\alpha,\beta))(P,Q)) + (-1)^k i(\widetilde{d}(\alpha,\beta))(P,Q). \tag{7.27}$$

Demostración. (1.35) y (7.26) implican que

$$i((\alpha,\beta))\delta_{(0,\nu)}(P,Q) = i(\alpha)\delta_\nu(P) + i(\beta)\delta_\nu(Q). \tag{7.28}$$

Por otra parte,

$$\delta_{(0,\nu)}(i((\alpha,\beta))(P,Q)) = \delta_\nu(i(\alpha)P) + \delta_\nu(i(\beta)Q). \tag{7.29}$$

Restando (7.28) y (7.29) y usando la Proposición 6.2.2, deducimos (7.27).

■

Para todo $k \in \{1,\dots,m\}$ consideramos el subespacio de $\mathcal{V}^*(M)\oplus\mathcal{V}^{*-1}(M)$ dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_t^k(M,\Lambda,\Box) = \;& \{(P,Q)\in\mathcal{V}^k(M)\oplus\mathcal{V}^{k-1}(M)/\\ & i((\theta,f))(P,Q) = (0,0), \forall(\theta,f)\in ker\#^1_{(\Lambda,\Box)}\}.\end{aligned}$$

Supondremos que $\mathcal{V}_t^0(M,\Lambda,\Box) = C^\infty(M,\mathbb{R})$.
Si $\Box = 0$, entonces $ker\#^1_{(\Lambda,\Box)} = ker\#^1_\Lambda \oplus C^\infty(M,\mathbb{R})$ y, por tanto,

$$\mathcal{V}_t^k(M,\Lambda,0) = \mathcal{V}_t^k(M,\Lambda)\oplus\mathcal{V}_t^{k-1}(M,\Lambda), \tag{7.30}$$

donde $\mathcal{V}_t^k(M,\Lambda)$ es el espacio vectorial definido en (6.17) asociado a la estructura de Nambu-Poisson Λ.
Si $(\Lambda,\Box)$ es una estructura de Nambu-Jacobi de orden m, $m\geq 3$, deducimos fácilmente que

$$\#^{m-k}_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^{m-k}(M)\oplus\Omega^{m-k-1}(M)) \subseteq \mathcal{V}_t^k(M,\Lambda,\Box). \tag{7.31}$$

La igualdad, en general, no es cierta (ver Observación 6.2.4 y (7.30)).
Sin embargo, en el caso particular de una variedad de Nambu-Jacobi regular tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.2.2 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi regular, de orden m, $m\geq 3$, entonces*

$$(\#^{m-k}_{(\Lambda,\Box)})(\Omega^{m-k}(M)\oplus\Omega^{m-k-1}(M)) = \mathcal{V}_t^k(M,\Lambda,\Box).$$

Demostración. De la regularidad de M deducimos que, para todo punto de M, existe un entorno U, tal que la estructura $(\Lambda, \Box)$ está definida en ese entorno como $(\Lambda, i(\theta_0)\Lambda)$, donde θ_0 es una 1-forma cerrada en U (ver Teorema 5.2.2).

Veamos entonces que $\mathcal{V}_t^k(U, \Lambda, \Box) \subseteq \#_{(\Lambda,\Box)}^{m-k}(\Omega^{m-k}(U) \oplus \Omega^{m-k-1}(U))$.

Sea $(P, Q) \in \mathcal{V}_t^k(U, \Lambda, \Box)$. Nótese que

$$ker\#_{(\Lambda,\Box)}^1 = \{(\theta, f) \in \Omega^1(U) \oplus C^\infty(U, \mathbb{R}) / \theta + f\theta_0 \in ker\#_\Lambda^1 \text{ y } \theta \wedge \theta_0 \in ker\#_\Lambda^2\}.$$

Entonces, para todo $\theta \in ker\#_\Lambda^1$, se tiene que $(\theta, 0) \in ker\#_{(\Lambda,\Box)}^1$ y, por tanto,

$$i((\theta, 0))(P, Q) = (i(\theta)P, -i(\theta)Q) = (0, 0).$$

Así, $P \in \mathcal{V}_t^k(U, \Lambda)$. Usando que Λ es una estructura de Nambu-Poisson regular y el Lema 6.2.3, deducimos que existe $\alpha \in \Omega^{m-k}(U)$ tal que $P = \#_\Lambda^{m-k}(\alpha)$.

Por otra parte, es evidente que $(\theta_0, -1) \in ker\#_{(\Lambda,\Box)}^1$ y, por tanto,

$$i((\theta_0, -1))(P, Q) = (i(\theta_0)P - Q, -i(\theta_0)Q) = (0, 0),$$

esto es, $Q = i(\theta_0)P = i(\theta_0)\#_\Lambda^{m-k}(\alpha) = (-1)^{m-k}\#_\Box^{m-k}(\alpha)$.

Concluimos entonces que

$$(P, Q) = \#_{(\Lambda,\Box)}^{m-k}(\alpha, 0).$$

■

A continuación, mostraremos que si M es una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n, orientada y de orden m, $m \geq 3$, y si ν es una forma de volumen sobre M, entonces $(\mathcal{V}_t^*(M, \Lambda, \Box) = \bigoplus_{k=1,\ldots,m} \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda, \Box))$ es un subcomplejo del complejo $(\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), \delta_{(0,\nu)})$.

Para ello, previamente probaremos el siguiente resultado.

Proposición 7.2.3 *Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n, orientada y de orden m, con $m \geq 3$ y sea ν una forma de volumen sobre M. Entonces*

$$\delta_{(0,\nu)}(\mathcal{V}_t^k(M, \Lambda, \Box)) \subseteq \mathcal{V}_t^{k-1}(M, \Lambda, \Box), \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Demostración. Si $(\theta, f) \in ker\#^1_{(\Lambda,\Box)}$ y $(P,Q) \in \mathcal{V}^k_t(M,\Lambda,\Box)$ entonces, usando (7.27), tenemos que

$$\begin{aligned}&i((\theta, f)\wedge(\theta_1, f_1)\wedge\ldots\wedge(\theta_{k-2}, f_{k-2}))\delta_{(0,\nu)}(P,Q)\\&=(-1)^k i(\widetilde{d}((\theta,f)\wedge\ldots\wedge(\theta_{k-2}, f_{k-2})))(P,Q).\end{aligned} \tag{7.32}$$

Como

$$\widetilde{d}((\alpha,\beta)\wedge(\alpha',\beta')) = \widetilde{d}((\alpha,\beta))\wedge(\alpha',\beta') + (-1)^k(\alpha,\beta)\wedge\widetilde{d}(\alpha',\beta'), \tag{7.33}$$

para todo $(\alpha,\beta) \in \Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)$ y $(\alpha',\beta') \in \Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M)$, entonces se tiene

$$i(\theta, f)(\delta_{(0,\nu)}(P,Q)) = i(\widetilde{d}(\theta,f))(P,Q).$$

Finalmente, comprobamos que

$$i(\widetilde{d}(\theta,f))(P,Q) = (0,0). \tag{7.34}$$

Para ello consideramos las aplicaciones antisimétricas y $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineales

$$\widetilde{PQ} : \frac{\Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})}{ker\#^1_{(\Lambda,\Box)}} \times\ldots\times \frac{\Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})}{ker\#^1_{(\Lambda,\Box)}} \to C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

$$\overline{PQ} : \#^1_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R}))\times\ldots\times\#^1_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R}))\to C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

definidas por

$$\begin{aligned}i((\theta_1, f_1)\wedge\ldots\wedge(\theta_k, f_k))(P,Q) = \widetilde{PQ}([(\theta_1,f_1)],\ldots,[(\theta_k,f_k)]) =\\ \overline{PQ}(\#^1_{(\Lambda,\Box)}(\theta_1,f_1),\ldots,\#^1_{(\Lambda,\Box)}(\theta_k,f_k)),\end{aligned} \tag{7.35}$$

con $(\theta_i, f_i) \in \Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})$. Entonces $\overline{PQ}$ es un operador local.
Por otra parte, sean R_1 y R_2 los siguientes subconjuntos abiertos de M:

$$R_1 = \{x \in M/\Lambda(x) \neq 0\} \qquad \text{y} \qquad R_2 = \{x \in M/\Box(x) \neq 0\}.$$

Denotamos por R al subconjunto denso de M definido por

$$R = (R_1\cap R_2)\cup(Int(M-R_1)\cap R_2)\cup(Int(M-R_2)\cap R_1)\cup(Int(M-R_1\cup R_2)).$$

Para comprobar (7.34) es suficiente demostrar que

$$i(\widetilde{d}(\theta, f))(P, Q)(x) = (0, 0), \text{ para todo } x \in R.$$

Distinguimos los siguientes casos:
1) $x \in Int(M - R_1 \cup R_2)$. Ya que $(P, Q) \in \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda, \Box)$ se deduce que

$$(P, Q)_{|(Int(M - R_1 \cup R_2)} = (0, 0),$$

y por tanto, $i(\widetilde{d}(\theta, f))(P, Q)(x) = (0, 0)$.
2) $x \in R_1 \cap R_2$. Tenemos que $(\Lambda, \Box)$ en el abierto $R_1 \cap R_2$ es una estructura de Nambu-Jacobi regular. Por tanto, usando el Lema 7.2.2, deducimos que existe $(\alpha, \beta) \in \Omega^{m-k}(R_1 \cap R_2) \oplus \Omega^{m-k-1}(R_1 \cap R_2)$ tal que

$$\#^{m-k}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha, \beta) = (P, Q),$$

en $R_1 \cap R_2$. En consecuencia, de la Proposición 7.1.7 concluimos que

$$i(\widetilde{d}(\theta, f))(P, Q)(x) = i(\alpha, \beta)(\#^2_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\theta, f)))(x) = (0, 0).$$

3) $x \in R_1 \cap Int(M - R_2)$. Está claro que $(P, Q)_{|R_1 \cap Int(M - R_2)} \in \mathcal{V}_t^k(R_1 \cap Int(M - R_2), \Lambda) \oplus \mathcal{V}_t^{k-1}(R_1 \cap Int(M - R_2), \Lambda)$ y que $\Lambda_{|R_1 \cap Int(M - R_2)}$ es una estructura de Nambu-Poisson regular. Usando el Lema 6.2.3, tenemos que existe $\alpha \in \Omega^{m-k}(R_1 \cap Int(M - R_2))$ y $\beta \in \Omega^{m-k+1}(R_1 \cap Int(M - R_2))$ tal que

$$\#^{m-k}_{\Lambda}(\alpha) = P, \qquad \#^{m-k+1}_{\Lambda}(\beta) = Q$$

en $R_1 \cap Int(M - R_2)$. Por tanto, de la Proposición 7.1.7, obtenemos

$$i(\widetilde{d}(\theta, f))(P, Q)(x) = i(\widetilde{d}(\theta, f)) i(\alpha, \beta)(\Lambda, 0) = i(\alpha, 0)(\#^2_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\theta, f)))(x) = (0, 0).$$

4) $x \in R_2 \cap Int(M - R_1)$. Tenemos que en $R_2 \cap Int(M - R_1)$:

$$ker\#^1_{(\Lambda,\Box)} = ker\#^1_{\Box} \oplus \{0\}$$

y que

$$(P, Q)_{|R_2 \cap Int(M - R_1)} \in \mathcal{V}_t^k(R_2 \cap Int(M - R_1), \Box) \oplus \mathcal{V}_t^{k-1}(R_2 \cap Int(M - R_1), \Box).$$

Razonando de forma análoga a 3) con la estructura de Nambu-Poisson regular $\Box_{|R_2 \cap Int(M-R_1)}$ deducimos que

$$i(\widetilde{d}(\theta, f))(P, Q)(x) = (0, 0).$$

En definitiva, hemos demostrado que $i(\widetilde{d}(\theta, f))(P, Q) = (0, 0)$.

■

Consideramos

$$\delta_{(0,\nu)}^{(1-m)} : \mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M) \to \mathcal{V}^{*-1}(M) \oplus \mathcal{V}^{*-2}(M)$$

el operador definido por

$$\delta_{(0,\nu)}^{(1-m)}(P, Q) = \delta_{(0,\nu)}(P, Q) + (-1)^{k-1}(1-m)(Q, 0), \tag{7.36}$$

para todo $(P, Q) \in \mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M)$.
Fácilmente se prueba que $\delta_{(0,\nu)}^{(1-m)}$ es un operador de homología. Nótese que

$$\delta_{(0,\nu)}^{(1-m)}(P, Q) = \flat_{(0,\nu)}^{-1} \circ \widetilde{d}_{1-m} \circ \flat_{(0,\nu)},$$

donde $\widetilde{d}_{1-m} : \Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M) \to \Omega^{*+1}(M) \oplus \Omega^*(M)$ es el operador de cohomología definido por

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_{1-m}(\alpha, \beta) &= \widetilde{d}(\alpha, \beta) + (1-m)(0, \alpha) \\ &= \widetilde{d}(\alpha, \beta) + (1-m)(0, 1) \wedge (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

para todo $(\alpha, \beta) \in \Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M)$.
Como consecuencia de la Proposición 7.2.3 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.2.4 *Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi orientada de orden m, con $m \geq 3$ y ν una forma de volumen sobre M. Entonces*

$$\delta_{(0,\nu)}^{(1-m)}(\mathcal{V}_t^k(M, \Lambda, \Box)) \subseteq \mathcal{V}_t^{k-1}(M, \Lambda, \Box).$$

Demostración. Sea $(P, Q) \in \mathcal{V}_t^k(M, \Lambda, \Box)$. Entonces

$$\delta_{(0,\nu)}(P, Q) \in \mathcal{V}_t^{k-1}(M, \Lambda, \Box).$$

Veamos que $(Q,0) \in \mathcal{V}_t^{k-1}(M,\Lambda,\Box)$.
Nótese que para todo $(\theta,f) \in ker\#^1_{(\Lambda,\Box)}$ se tiene que $i(\theta,f)(P,Q) = (0,0)$. Por tanto, $i(\theta)Q = 0$ (ver (1.35)). Entonces $(Q,0) \in \mathcal{V}_t^{k-1}(M,\Lambda,\Box)$ ya que $i(\theta,f)(Q,0) = (i(\theta)Q,0) = (0,0)$. ■

Tenemos entonces el complejo de homología

$$\ldots \overset{\delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}}{\rightarrow} \mathcal{V}_t^{k+1}(M,\Lambda,\Box) \overset{\delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}}{\rightarrow} \mathcal{V}_t^{k}(M,\Lambda,\Box) \overset{\delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}}{\rightarrow} \mathcal{V}_t^{k-1}(M,\Lambda,\Box) \overset{\delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}}{\rightarrow} \ldots$$

al que llamamos *complejo canónico de Nambu-Jacobi* de $(M,\Lambda,\Box)$. Su homología la denotaremos por $H_*^{canNJ}(M)$.
Con razonamientos análogos a los de la Proposición 6.2.6 deducimos que esta homología no depende de la forma de volumen elegida.

7.3 Dualidad y clase modular de una variedad de Nambu-Jacobi

Como en el caso de las estructuras de Nambu-Poisson, una clase de cohomología en el complejo de Nambu-Jacobi de una variedad de Nambu-Jacobi M, (*la clase modular de Nambu-Jacobi*) juega un papel importante en el estudio de la dualidad entre la homología canónica de Nambu-Jacobi y la cohomología de Nambu-Jacobi de M.
A continuación, introducimos esta clase de cohomología y estudiaremos algunas de sus propiedades.

7.3.1 Clase modular de una variedad de Nambu-Jacobi

Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n, orientada y de orden m, con $3 \leq m \leq n$ y sea ν una forma de volumen sobre M. Consideramos la aplicación

$$\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times \ldots^{(m-1} \ldots \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

definida por

$$\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\nu = \mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}(f_1,\ldots,f_{m-1})\nu, \tag{7.37}$$

para todo $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. $\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)}$ actúa como un operador diferencial de primer orden en cada uno de sus argumentos. De hecho, de (5.7) se tiene que $\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)}$ define la sección del fibrado vectorial $\wedge^{m-1}(TM) \oplus \wedge^{m-2}(TM) \to M$

$$(\mathcal{M}^\nu_\Lambda, \mathcal{M}^\nu_\Box) + (-1)^m(m-1)(\Box, 0) \in \mathcal{V}^{m-1}(M) \oplus \mathcal{V}^{m-2}(M), \tag{7.38}$$

donde $\mathcal{M}^\nu_\Lambda$ (respectivamente, $\mathcal{M}^\nu_\Box$) es el tensor modular definido por la estructura de Nambu-Poisson Λ (respectivamente, $\Box$).

Proposición 7.3.1 *Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n, orientada y de orden m, con $3 \leq m \leq n$ y sea ν una forma de volumen sobre M. Entonces $\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)}$ define un 1-cociclo en el complejo de cohomología asociado con el algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M)$, $[\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$. Además, la clase de cohomología resultante no depende del volumen elegido.*

Demostración. En [54] se prueba que para una estructura de Nambu-Poisson Λ sobre M

$$\mathcal{L}_{\#_\Lambda(\alpha)}\nu = (i(\alpha)\mathcal{M}^\nu_\Lambda + (-1)^{m-1}\#^m_\Lambda(d\alpha))\nu$$

para cualquier $\alpha \in \Omega^{m-1}(M)$. Usando este hecho para las estructuras de Nambu-Poisson Λ y $\Box$ obtenemos que (ver (1.35))

$$\mathcal{L}_{\widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta)}\nu = (i(\alpha,\beta)(\mathcal{M}^\nu_\Lambda, \mathcal{M}^\nu_\Box) + (-1)^{m-1}\widetilde{\#}^m_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha,\beta)))\nu. \tag{7.39}$$

Por otra parte, (5.19) y (5.23) implican que

$$\begin{aligned}\widetilde{\#}^m_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}([\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)})) = \ & \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta)(\#^m_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha',\beta')) \\ & -\widetilde{\#}^m_{(\Lambda,\Box)}(\alpha',\beta')(\#^m_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha,\beta))),\end{aligned}$$

para todo $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in \Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)$. Así, el par $(\mathcal{M}^\nu_\Lambda, \mathcal{M}^\nu_\Box)$ define un 1-cociclo en el complejo de cohomología asociado al algebroide de Leibniz $(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$.

Además, usando (5.6), (5.11) y (5.19) deducimos que $(\Box, 0)$ es también un 1-cociclo. Por tanto, $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ define un 1-cociclo en la cohomología de Leibniz de $(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M), [\![\ ,\ ]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$.
Finalmente, veamos que la clase de cohomología de $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ no depende de la forma de volumen elegida.
Sea ν' otra forma de volumen sobre M. Entonces existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $f \neq 0$ en todo punto, tal que $\nu' = f\nu$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f > 0$. Así se tiene que (ver (7.39)),

$$i((\alpha,\beta))((\mathcal{M}^{\nu'}_{\Lambda}, \mathcal{M}^{\nu'}_{\Box})) = i((\alpha,\beta))((\mathcal{M}^{\nu}_{\Lambda}, \mathcal{M}^{\nu}_{\Box})) + \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta)(lnf).$$

lo cual implica que

$$(\mathcal{M}^{\nu'}_{\Lambda}, \mathcal{M}^{\nu'}_{\Box}) = (\mathcal{M}^{\nu}_{\Lambda}, \mathcal{M}^{\nu}_{\Box}) + \partial(lnf).$$

En consecuencia, $\mathcal{M}^{\nu'}_{(\Lambda,\Box)}$ y $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ definen la misma clase de cohomología.

■

Esta clase de cohomología se denomina *la clase modular de* $(M, \Lambda, \Box)$.

Observación 7.3.2 Si $\Box = 0$ entonces $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} = (\mathcal{M}^{\nu}_{\Lambda}, 0)$ y la clase modular de la variedad de Nambu-Jacobi $(M, \Lambda, 0)$ es la imagen de la clase modular de la variedad Nambu-Poisson (M, Λ) a través del monomorfismo

$$\Psi : H^1(\wedge^{m-1}(T^*M)) \to H^1(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M))$$

$$[P] \mapsto [(P, 0)],$$

donde $H^1(\wedge^{m-1}(T^*M))$ (respectivamente, $H^1(\wedge^{m-1}(T^*M) \oplus \wedge^{m-2}(T^*M))$) es el primer grupo de cohomología del algebroide de Leibniz asociado a la estructura de Nambu-Poisson Λ (respectivamente, la estructura de Nambu-Jacobi $(\Lambda, 0)$).

Veamos a continuación que $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ define también un 1-cociclo en la cohomología de Nambu-Jacobi. En efecto, sea

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} : \frac{\Omega^{m-1}(M) \oplus \Omega^{m-2}(M)}{ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}} \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$[(\alpha,\beta)] \mapsto i(\alpha,\beta)\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}.$$

Esta aplicación está bien definida. De hecho, si $(\alpha,\beta) \in ker\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}$ entonces, $i((\alpha,\beta))(\Box,0) = 0$ (ver (1.35)) y, de (7.27) y la Proposición 7.1.7, obtenemos

$$\begin{aligned} i((\alpha,\beta))\delta_{(0,\nu)}(\Lambda,\Box) = \; & \delta_{(0,\nu)}(\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta)) \\ & +(-1)^m \#^m_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\alpha,\beta)) = (0,0). \end{aligned}$$

Por otra parte, (6.29), (7.26) y (7.38) implican que

$$\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} = \delta_{(0,\nu)}(\Lambda,\Box) + (-1)^m(m-1)(\Box,0). \tag{7.40}$$

Así, $i((\alpha,\beta))\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} = 0$.

Proposición 7.3.3 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi, de dimensión n, orientada y de orden m, con $3 \leq m \leq n$ y sea ν una forma de volumen sobre M. Entonces la aplicación $\widetilde{\mathcal{M}}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ define un 1-cociclo en el complejo de cohomología de Nambu-Jacobi de $(M,\Lambda,\Box)$. Además, su clase de cohomología $\widetilde{\mathcal{M}}_{(\Lambda,\Box)} = [\widetilde{\mathcal{M}}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}] \in H^1_{NJ}(M)$ no depende de la forma de volumen elegida.*

Demostración. Como $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ define un 1-cociclo en el complejo de la cohomología de Leibniz asociado al algebroide $(\wedge^{m-1}(T^*M)\oplus\wedge^{m-2}(T^*M), [\![\;,\;]\!]_{(\Lambda,\Box)}, \widetilde{\#}^{m-1}_{(\Lambda,\Box)})$, entonces

$$\begin{aligned} i([\![(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\!]_{(\Lambda,\Box)})\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} = \; & \#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta)(i((\alpha',\beta'))\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}) \\ & -\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha',\beta')(i((\alpha,\beta))\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}), \end{aligned}$$

para todo $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in \Omega^{m-1}M) \oplus \Omega^{m-2}(M)$. Así, $\partial_{NJ}(\widetilde{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}) = 0$ (ver (7.12)).

Finalmente, como la clase de cohomología definida por $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}$ no depende de la forma de volumen elegida, deducimos que $\widetilde{\mathcal{M}}_{(\Lambda,\Box)}$ no depende tampoco de la forma de volumen.

■

Observación 7.3.4 Sea $(M, \Lambda, \Box)$ una variedad de Nambu-Jacobi. Razonando como en el caso de una variedad de Nambu-Poisson (ver Observaciones 6.3.2 y 7.1.6), deducimos fácilmente que la clase modular de $(M, \Lambda, \Box)$ es nula si y sólo si $\widetilde{\mathcal{M}}_{(\Lambda,\Box)} = 0$

Para una variedad de Nambu-Jacobi regular, la anulación de la clase modular es equivalente a la existencia de un volumen conforme respecto a la foliación característica.

Teorema 7.3.5 *Sea $(M, \Lambda, \Box)$ es una variedad de Nambu-Jacobi regular de orden $m \geq 3$. Entonces, la clase modular $\mathcal{M}_{(\Lambda,\Box)}$ es nula si y sólo si existe $\mu \in \Omega^{n-m}(M)$ tal que $\mu \neq 0$ en todo punto de M y*

$$i(X_{f_1 \cdots f_{m-1}})\mu = 0 \quad y \quad \mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{m-1}}}\mu = (1-m)\Box(df_1, \ldots, df_{m-1})\mu,$$

para todo $f_1, \ldots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos que la clase modular $\mathcal{M}_{(\Lambda,\Box)}$ es nula y sea ν una forma de volumen sobre M. Entonces, existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}(f_1, \cdots, f_{m-1}) = X_{f_1 \cdots f_{m-1}}(f), \tag{7.41}$$

para $f_1, \cdots, f_{m-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
Consideramos ahora la forma de volumen $\nu' = e^{-f}\nu$. De (7.37) y (7.41), tenemos que

$$\mathcal{M}^{\nu'}_{(\Lambda,\Box)} = 0. \tag{7.42}$$

Sea μ la $(n-m)$-forma definida por $\mu = i(\Lambda)\nu'$. Usando que $\Lambda \wedge X_{f_1 \cdots f_{m-1}} = 0$ deducimos fácilmente que

$$i(X_{f_1 \cdots f_{m-1}})\mu = 0.$$

Por otra parte, de (7.42), se sigue que

$$\mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{m-1}}}\mu = i(\mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{m-1}}}\Lambda)\nu'. \tag{7.43}$$

Además, de (5.5), (5.7) y (5.17) tenemos que

$$\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\Lambda = \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1+m}\#^1_\Lambda(df_i)\wedge X^{\square}_{f_1\cdots\hat{f}_i\cdots f_{m-1}}.$$

Esta relación y el hecho de que $\Lambda\wedge X^{\square}_{f_1\cdots\hat{f}_i\cdots f_{m-1}}=0$ implican que

$$\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\Lambda = -(m-1)\square(df_1,\ldots,df_{m-1})\Lambda. \tag{7.44}$$

Sustituyendo (7.44) en (7.43) deducimos que

$$\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\mu = (1-m)\square(df_1,\ldots,df_{m-1})\mu.$$

Recíprocamente, supongamos que existe un volumen conforme con respecto a la foliación característica $\mathcal{F}$, es decir, que existe $\mu\in\Omega^{n-m}(M)$ tal que $\mu(x)\neq 0$, para todo $x\in M$, y

$$i(X_{f_1\ldots f_{m-1}})\mu=0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\mu = (1-m)\square(df_1,\ldots,df_{m-1})\mu, \tag{7.45}$$

para todo $f_1,\ldots,f_{m-1}\in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Veamos entonces que $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\square)}=0$.
Sea $F=\bigcup_{x\in M}\mathcal{F}(x)\to M$ el subfibrado vectorial de $TM\to M$ asociado a $\mathcal{F}$ y sea $\widetilde{\alpha}$ la sección del fibrado vectorial $\wedge^m F^*\to M$ definida como sigue. Si $X_1,\ldots,X_m\in\Gamma(F)$, $\widetilde{\alpha}(X_1,\ldots,X_m)\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ está caracterizada por

$$X_1\wedge\ldots\wedge X_m=\widetilde{\alpha}(X_1,\ldots,X_m)\Lambda.$$

Extendemos $\widetilde{\alpha}$ a una m-forma α sobre M, tal que

$$\alpha(X_1,\ldots,X_m)=\widetilde{\alpha}(X_1,\ldots,X_m),$$

para $X_1,\ldots,X_m\in\Gamma(F)$. Se tiene entonces que

$$i(\Lambda)\alpha=1,$$

y como consecuencia, si tomamos la forma de volumen $\nu=\alpha\wedge\mu$, obtenemos que $\mu=i(\Lambda)\nu$ (ver (7.45)).

Finalmente, usando (7.45), tenemos que

$$\begin{aligned}(1-m)\Box(df_1,\ldots,df_{m-1})\mu &= \mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\mu \\ &= i(\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\Lambda)\nu + \mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)}(f_1,\ldots,f_{m-1})\mu.\end{aligned}$$

Además, ya que $\mathcal{L}_{X_{f_1\cdots f_{m-1}}}\Lambda = (1-m)\Box(df_1,\ldots,df_{m-1})\Lambda$ (ver (7.44)), concluimos que $\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} = 0$.

■

7.3.2 Dualidad entre la cohomología de Nambu-Jacobi y la homología canónica de Nambu-Jacobi

Sea M una variedad orientada de Nambu-Jacobi de orden m, con $m \geq 3$ y ν una forma de volumen sobre M. Como en el caso de una estructura Nambu-Poisson, probaremos que si la clase modular de la estructura de Nambu-Jacobi es cero, podemos definir un subcomplejo de $(\mathcal{V}^*(M)\oplus\mathcal{V}^{*-1}(M), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)})$ cuya homología en el caso regular, es dual de la cohomología foliada asociada a la foliación característica de la estructura Nambu-Jacobi.
A continuación, relacionaremos la cohomología $\overline{H}^*(M)$ (ver Sección 7.1.2) con la homología de un cierto subcomplejo de $(\mathcal{V}^*(M)\oplus\mathcal{V}^{*-1}(M), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)})$.

Teorema 7.3.6 *Sean $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad orientada de Nambu-Jacobi de orden m, con $m \geq 3$, y ν un volumen sobre M. Entonces:*

(i) $\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M))$ *define un subcomplejo del complejo de homología* $(\mathcal{V}^*(M)\oplus\mathcal{V}^{*-1}(M), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)})$ *si y sólo si*

$$\mathcal{M}^{\nu}_{(\Lambda,\Box)} \in \#^1_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R})).$$

(ii) *Si* $\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M))$ *es un subcomplejo de* $(\mathcal{V}^*(M)\oplus\mathcal{V}^{*-1}(M), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)})$, *entonces la homología de este subcomplejo no depende del volumen elegido.*

(iii) *Si la clase modular de* $(M,\Lambda,\Box)$ *es nula, entonces* $\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M))$ *define un subcomplejo del complejo de homología* $(\mathcal{V}^*(M)\oplus$

$\mathcal{V}^{*-1}(M), \delta_{(0,\nu)}^{(1-m)})$ *y la homología de este subcomplejo,* $\widetilde{H}_{*}^{canNJ}(M)$*, es dual de la cohomología del complejo* $(\dfrac{\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M)}{ker\#^*_{(\Lambda,\Box)}}, \bar{d})$.

Demostración. *(i)* Por (7.27) tenemos

$$\begin{aligned} i((\alpha,\beta))(\delta_{(0,\nu)}(\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\gamma,\rho))) &= \delta_{(0,\nu)}(\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}((\gamma,\rho)\wedge(\alpha,\beta)))+ \\ &\quad (-1)^{m-k}\#^m_{(\Lambda,\Box)}((\gamma,\rho)\wedge\widetilde{d}(\alpha,\beta)), \end{aligned} \tag{7.46}$$

para todo $(\gamma,\rho) \in \Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)$ y $(\alpha,\beta)\in\Omega^{m-k-1}(M)\oplus\Omega^{m-k-2}(M)$. Aplicando de nuevo (7.27) se deduce

$$\begin{aligned} i((\gamma,\rho)\wedge(\alpha,\beta))\delta_{(0,\nu)}(\Lambda,\Box) = &\ \delta_{(0,\nu)}(\#^{m-1}_{(\Lambda,\Box)}((\gamma,\rho)\wedge(\alpha,\beta))) \\ &+(-1)^m\#^m_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}((\gamma,\rho)\wedge(\alpha,\beta))). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (7.46) y usando (7.33) y (7.40) concluimos que

$$\begin{aligned} i((\alpha,\beta))(\delta_{(0,\nu)}(\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\gamma,\rho))) = &\ i((\alpha,\beta))[i((\gamma,\rho))(\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)}) \\ &+(-1)^m(1-m)i((\gamma,\rho))(\Box,0) \\ &-(-1)^m\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\gamma,\rho))]. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}(\#^k_{(\Lambda,\Box)}(\gamma,\rho)) = (-1)^{m-1}\#^{k+1}_{(\Lambda,\Box)}(\widetilde{d}(\gamma,\rho)) + i(\gamma,\rho)(\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)}). \tag{7.47}$$

De lo que resulta que $\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)} \in \#^1_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^1(M)\oplus C^\infty(M,\mathbb{R}))$ si y sólo si $\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M)\oplus\Omega^{*-1}(M))$ es un subcomplejo de $(\mathcal{V}^*(M)\oplus\mathcal{V}^{*-1}(M), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)})$.

(ii) Sea ν' otra forma de volumen sobre M. Entonces, existe una función $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, tal que $f \neq 0$ en todo punto y $\nu' = f\nu$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f > 0$. Consideramos los isomorfismos

$$\Psi^k : \#^k_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M)) \to \#^k_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^k(M)\oplus\Omega^{k-1}(M))$$

$$(P,Q) \;\mapsto\; \frac{1}{f}(P,Q).$$

Como $\delta^{(1-m)}_{(0,\nu')} \circ \Psi^k = \Psi^{k-1} \circ \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}$, se sigue que los complejos

$$((\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M)), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)}) \text{ y } ((\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M)), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu')})$$

son isomorfos.

(iii) Si la clase modular es cero, entonces existe $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{M}^\nu_{(\Lambda,\Box)} = (-1)^{m-1}\#^1_{(\Lambda,\Box)}(df,0). \tag{7.48}$$

Por tanto, usando (i), obtenemos que $\#^*_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^*(M) \oplus \Omega^{*-1}(M))$ define un subcomplejo del complejo de homología $(\mathcal{V}^*(M) \oplus \mathcal{V}^{*-1}(M), \delta^{(1-m)}_{(0,\nu)})$.
Por otra parte, consideramos los siguientes isomorfismos de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos

$$\varphi_k : \frac{\Omega^{m-k}(M) \oplus \Omega^{m-k+1}(M)}{ker\#^k_{(\Lambda,\Box)}} \to \#^{m-k}_{(\Lambda,\Box)}(\Omega^{m-k}(M) \oplus \Omega^{m-k-1}(M))$$

$$[(\alpha,\beta)] \mapsto e^{-f}\#^{m-k}_{(\Lambda,\Box)}(\alpha,\beta).$$

Usando (7.47) y (7.48), obtenemos que

$$\delta^{(1-m)}_{(0,\nu)} \circ \varphi_k = (-1)^{m-1}\varphi_{k-1} \circ \bar{d}.$$

Luego, efectivamente las aplicaciones φ_k definen un isomorfismo de complejos.

■

Entonces los Teoremas 7.1.9, 7.3.5, 7.3.6 y el Lema 7.2.2 nos permiten concluir lo siguiente.

Corolario 7.3.7 *Sea $(M,\Lambda,\Box)$ una variedad orientada de Nambu-Jacobi regular de orden m, $m \geq 3$. Si existe un volumen conforme respecto a la foliación característica $\mathcal{F}$ de $(M,\Lambda,\Box)$, entonces*

$$H^k_{NJ}(M) \cong H^k(\mathcal{F}) \cong H^{canNJ}_{m-k}(M).$$

Bibliografía

[1] C. Albert: Le théoréme de réduction de Marsden-Weinstein en géometrie cosymplectique et de contact, *J. Geom. Phys*, **6** (1989), 627-649.

[2] D. Alekseevsky, P. Guha: On decomposability of Nambu-Poisson tensor, *Acta Math. Univ. Commenianae*, **65** (1996), 1-9.

[3] V.I. Arnold: Small denominators III. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Russ. Math. Survey, 18(6) (1963), 85-191.

[4] L. Auslander, L. Green, F. Hahn: Flows on homogeneous spaces, *Annals of Math. Studies*, **53**, Princeton Univ. Press (1963).

[5] F. Bayen, M. Flato: Remarks concerning Nambu's generalized mechanics, *Phys. Rev.*, **11** (1975), 3049-3053.

[6] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer: Deformation theory and quantization, *Ann. of Phys.*, **111** (1978), 61-110 y 111-151.

[7] Ch. Benson, C. Gordon: Kähler and symplectic structures on nilmanifolds, *Topology*, **27** (1988), 513-518.

[8] F.A. Berezin: Some remarks about the associated envelope of a Lie algebra. *Funct. Anal. Appl.*, **1** (1967), 91-102.

[9] K.H. Bhaskara, K.Viswanath: Poisson algebras and Poisson manifolds, *Research Notes in Mathematics*, **174**, Pitman, London (1988).

[10] K.H. Bhaskara, K. Viswanath: Calculus on Poisson manifolds, *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988), 68-72.

[11] D.E. Blair: Contact manifolds in Riemannian geometry, *Lectures Notes in Math.*, **509**, Springer-Verlag, Berlin (1976).

[12] J.L. Brylinski: A differential complex for Poisson manifolds, *J. Differential Geometry*, **28** (1988), 93-114.

[13] J.L. Brylinski, G. Zuckerman: The outer derivation of a complex Poisson manifold, *J. Reine Angew. Math.*, **506** (1999), 181-189.

[14] F. Cantrijn, M. de León, E.A. Lacomba: Gradient vector fields on cosymplectic manifolds, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992), 175-188.

[15] J.F. Cariñena: Lie algebroids in Classical and Quantum Mechanics, *Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum optics,* Burgos, Septiembre 1998.

[16] H. Cartan, S. Eilenberg: *Homological Algebra*, (Seventh ed.) Princeton Univ.Press, Princeton, NJ (1999).

[17] A. Chatterjee: *Dynamical symmetries and Nambu mechanics*, *Lett. Math. Phys.*, **36** (1996), 117-126.

[18] L.A. Cordero, M. Fernández, M. de León, M. Saralegi: Compact symplectic four solv-manifolds without polarizations, *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **X 2** (1989), 193-198.

[19] A. Coste, P. Dazord, A. Weinstein: Groupoides symplectiques, *Pub. Dep. Math. Univ. Claude Bernard-Lyon*, **I2/A** (1987), 1-62.

[20] C. Cuvier: Algebres de Leibniz: définitions, propriétés, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **27** (1994), 1-45.

[21] D. Chinea, M. de León, J.C. Marrero: Prequantizable Poisson manifolds and Jacobi structures, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19** (1996), 6313-6324.

[22] D. Chinea, M. de León, J.C. Marrero: The canonical double complex for Jacobi manifolds, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **323** Série I (1996), 637-642.

[23] D. Chinea, M. de León, J.C. Marrero: A canonical differential complex for Jacobi manifolds, *Michigan Math. J.*, **45** (1998), 547-579.

[24] P. Dazord, A. Lichnerowicz, Ch.M. Marle: Structure locale des variétés de Jacobi, *J.Math. Pures et Appl.*, **70** (1991), 101-152.

[25] V.G. Drinfeld: Hamiltonian structures on Lie groups, Lie algebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equation, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* **268** (1983), 285-287.

[26] J.P. Dufour: Singularities of Poisson and Nambu Structures, *Banach Center Publications*, **51**, Institute of Math., Polish Academy of Sciences, Warszwa (2000), 61-68.

[27] A. El Kacimi-Alaoui: Sur la cohomologie feuilletée, *Compositio Math.*, **49** (1983), 195-215.

[28] W.T. van Est: Une applications d'une méthode de Cartan-Leary, *Ind. Math.*, **17** (1955), 542-544.

[29] S. Evens, J.H. Lu, A. Weinstein: Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **50** (1999), 417-436.

[30] M. Fernández, A. Gray: Compact symplectic four solvmanifolds not admiting complex structures, *Geometriae Dedicata*, **34** (1990), 295-299.

[31] M. Fernández, R. Ibáñez, M. de León: Harmonic cohomology classes and the first spectral sequence for compact Poisson manifolds, *C.R. Acad. Paris*, **322** Série I (1996), 673-678.

[32] M. Fernández, R. Ibáñez, M. de León: Poisson cohomology and canonical homology of Poisson manifolds, *Archivum Mathematicum (Brno)*, **32** (1996), 29-56.

[33] M. Fernández, R. Ibáñez, M. de León: The canonical Spectral Sequences for Poisson Manifolds, *Israel J. Math.*, **133** (1998), 133-155.

[34] M. Flato, G. Dito, D. Sternheimer: Nambu mechanics, n-ary operations and their quantization, *Math. Phys. Stud.*, **20** (1999).

[35] B. Fuchssteiner: The Lie algebra structure of degenerate Hamiltonian an bi-Hamiltonian systems, *Progr. Theoret. Phys.*, **68** (1982), 1082-1104.

[36] Ph. Gautheron: Some remarks concerning Nambu mechanics, *Lett. Math. Phys.*, **37** (1996), 103-116 .

[37] I.M. Gel'fand, L.A. Dikii: A family of Hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations, *Collected papers of Izrail M. Gel'fand,* Vol. **1**, Springer-Verlag, New York (1987), 625-646.

[38] H. Gerstenhaber, S.D. Schack: Algebras, bialgebras, quantum gropus and algebraic deformations, *Contemp. Math.* **134**, AMS, Providence (1992), 51-92.

[39] V.L. Ginzburg, A. Weinstein: Lie-Poisson cohomology of Morita-equivalent Poisson manifolds, *Duke Math. J.,* **68**, 2 (1992), 445-453.

[40] V.L. Ginzburg, A. Weinstein: Lie-Poisson structures on some Poisson Lie groups, *J. Amer. Math. Soc.*, **5**, 2 (1992), 445-453.

[41] C. Godbillon, J. Vey: Un invariant des feuilletages de codimension 1, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **273** (1971), 92-95.

[42] S.I. Goldberg: *Curvature and Homology*, Academic Press, New York (1962).

[43] J. Grabowski, G. Marmo: Remarks on Nambu-Poisson and Nambu-Jacobi brackets, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32** (1999), 4239-4247.

[44] J. Grabowski, G. Marmo: Jacobi structures revisited, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34** (2001), 10975-10990.

[45] F. Guedira, A. Lichnerowicz: Géométrie des algébres de Lie locales de Kirillov, *J. Math. Pures et Appl.*, **63** (1984), 407-484.

[46] Y. Hagiwara: Nambu-Dirac manifolds, *J. Phy. A: Math. Gen*, **35** (2002), 1263-1281.

[47] A. Hattori: Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **8** Sect. 1 (1960), 289-331.

[48] G. Hector, E. Macías, M. Saralegi: Lemme de Mosser feuilleté et classification des variétes de Poisson réguliéres, *Publ. Matemátiques*, **33** (1989), 423-430.

[49] R. Ibáñez: Cohomología Coefectiva de una variedad simpléctica. Homología canónica de una variedad de Poisson, *Tesis doctoral* (1995).

[50] R. Ibáñez: Harmonic cohomology classes of almost cosymplectic manifolds, *Michigan Math. J.*, **44**, 1 (1997), 183-199.

[51] R. Ibáñez, M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: Coisotropic and Legendre-Lagrangian submanifolds and conformal Jacobi morphisms, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** (1997), 5427-5444.

[52] R. Ibáñez, M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: Dynamics of generalized Poisson and Nambu-Poisson brackets, *J. Math. Phys.*, **38** (5) (1997), 2332-2344.

[53] R. Ibáñez, M. de León, J.C. Marrero, E. Padrón: Nambu-Jacobi and generalized Jacobi manifolds, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31** (1998), 1267-1286.

[54] R. Ibáñez, M. de León, J.C. Marrero, E. Padrón: Leibniz algebroid associated with a Nambu-Poisson structure, *J. of Phys. A: Math. Gen.*, **32** (1999), 8129-8144.

[55] R. Ibáñez, M. de León, B. López, J.C. Marrero, E. Padrón: Duality and modular class of a Nambu-Poisson structure, *J. of Phys. A: Math. Gen.*, **34** (2001), 3623-3650.

[56] R. Ibáñez, B. López, J.C. Marrero, E. Padrón: Matches pairs of Leibniz algebroids, Nambu-Jacobi structures and modular class, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **333** Série I (2001), 861-866.

[57] D. Iglesias, B. López, J.C. Marrero, E. Padrón: Triangular generalized Lie Bialgebroids: homology and cohomology theories, *Banach Center Publications*, **54** (2001), 111-133.

[58] D. Iglesias, J.C. Marrero: Some linear Jacobi structures on vector bundles, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **331** Sér. I (2000), 125-130.

[59] D. Iglesias, J.C. Marrero: Generalized Lie bialgebroids and Jacobi structures, *J. Geom. and Phys.*, **40** (2001), 176-199.

[60] Y. Kerbrat, Z. Souici-Benhammadi: Variétés de Jacobi et groupoides de contact, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **317** (1) (1993), 81-86.

[61] A. Kirillov: Local Lie algebras, *Russian Math. Surveys*, **31** (4) (1976), 57-76.

[62] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, Interscience Publishers, New York, (1969).

[63] K. Kodaira: On the structure of compact complex analytic surfaces I, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 751-798.

[64] Y. Kosmann-Schwarzbach: Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids. Geometric and algebraic structures in differential equations, *Acta Appl. Math.*, **41** (1-3) (1995), 153-165.

[65] Y. Kosmann-Schwarzbach: Modular vector fields and Batalin-Vilkovisky algebras, *Poisson Geometry (Warsaw, 2000)*, *Banach Center Publ.*, **51** (2000), 109-129.

[66] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri : Poisson-Lie groups and complete integrability. I. Drinfeld bialgebras, dual extensions and their canonical representations, *Ann. Inst. H. Poincaré.*, **49** (4) (1988), 433-460.

[67] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri : Poisson-Nijenhuis structures, *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor.*, **53** (1) (1990), 35-81.

[68] B. Kostant: The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, *Adv. in Math.*, **34** (3) (1979), 195-338.

[69] J.L. Koszul: Crochet de Schouten-Nijenjuis et cohomologie, *in Elie Cartan et les Math. D'Aujour d'Hui, Astérisque*, hors série (1985), 257-271.

[70] M. de León, B. López, J.C. Marrero, E. Padrón: On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology, a aparecer en *Journal of Geometry and Physics.*

[71] M. de León, J.C. Marrero, E. Padrón: A generalization for Jacobi manifolds of the Lichnerowicz-Poisson cohomology, *In: Proceedings of the V Fall Workshop: Differential Geometry and its Aplications*,

Jaca, September 23-25, (1996). J.F. Cariñena, E. Martínez y M.F. Rañada (Eds.), Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, **32** (1998), 131-150.

[72] M. de León, J.C. Marrero, E. Padrón: Lichnerowicz-Jacobi cohomology of Jacobi manifolds, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **324** Sér. I (1997), 71-76.

[73] M. de León, J.C. Marrero, E. Padrón: Lichnerowicz-Jacobi cohomology, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** (1997), 6029-6055.

[74] M. de León , J.C. Marrero, E. Padrón: H-Chevalley-Eilenberg cohomology of a Jacobi manifold and Jacobi-Chern class, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **325** Sér. I (1997), 405-410.

[75] M. de León, J.C. Marrero, E. Padrón: On the geometric quantization of Jacobi manifolds, *J. Math. Phys.*, **38** (12) (1997), 6185-6213.

[76] P. Libermann: Sur le problème d'equivalence de certaines structures infinitésimales, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **36** (1954), 27-120.

[77] P. Libermann: Lie algebroids and Mechanics, *Archivum Math. (Brno),* **32** (3) (1996), 147-162.

[78] P. Libermann, Ch.M. Marle: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht (1987).

[79] A. Lichnerowicz : Cohomologie 1-diferentiable des algébres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact, *J. Math. Pures et Appl.*, **53** (1974), 459-483.

[80] A. Lichnerowicz: Les variétés de Poisson et leurs algébres de Lie associées, *J. Differential Geometry*, **12** (1977), 253-300.

[81] A. Lichnerowicz: Les variétés de Jacobi et leurs algébres de Lie associées, *J. Math. Pures et Appl.*, **57** (1978), 453-488.

[82] A. Lichnerowicz: Repreésentation coadjointe quotient et espaces homogénes de contact ou localement conformément symplectiques, *J. Math. Pures et Appl.*, **65** (1986), 193-224.

[83] Z-J Liu, A. Weinstein, P. Xu: Manin triples for Lie bialgebroids, *J. Diff. Geom.*, **45** (3) (1997), 547-574.

[84] Z.J. Liu, P. Xu: On quadratic Poisson structures, *Letters in Math. Phys.*, **26** (1) (1992), 33-42.

[85] J.L. Loday: *Cyclic Homology*, Grund. Math. Wissen., **301**, Springer Verlag (1992).

[86] J.L. Loday: Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, *L'Enseignement Math.*, **39**, (3-4) (1993), 269-293.

[87] J.L. Loday and T. Pirashvili: Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)-homology, *Math. Ann.*, **296** (1) (1993), 139-158.

[88] K. Mackenzie: Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, *London Math. Soc. Lecture Nota Series*, **124**, Cambridge University Press (1987).

[89] K. Mackenzie, P. Xu: Lie bialgebroids and Poisson groupoids, *Duke Math. J.*, **73** (2) (1994), 415-452.

[90] S. Majid: Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations, *Pacific J. Math.*, **141** (2) (1990), 311-332.

[91] C.M. Marle: Quelques propiétés des variétés de Jacobi, *Géometrie symplectique et mécanique* (Seminaire sud-rhodanien de géométrie). J-P Dufour éd. Travaux en Cours, Hermann, Paris, (1985), 125-139.

[92] G. Marmo, G. Vilasi, A.M. Vinogradov: The local structure of n-Poisson and n-Jacobi manifolds, *J. Geom. Phys.*, **25** (1998), 141-182.

[93] J. Marsden, A. Weinstein: The Hamiltonian structure of Maxwell-Vlasov equations, Phys. D, **4** (1982), 394-406.

[94] E. Martínez: Lagrangian Mechanics on Lie algebroids, *Acta Appl. Math.*, **67** (3) (2001), 295-320.

[95] J.C. Marrero, J. Monterde, E. Padrón: Jacobi-Nijenhuis manifolds and compatible Jacobi structures, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, **329** (9) (1999), 797-802.

[96] O. Mathieu: Harmonic cohomology classes of symplectic manifolds, *Comm. Math. Helv.*, **70** (1) (1995), 1-9.

[97] T. Mokri: Matched pairs of Lie algebroids,, *Glasgow Math. J.*, **39** (2) (1997), 167-181.

[98] P. Monnier: Computations of Nambu-Poisson cohomologies, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **26** (2001), 65-81.

[99] N. Nakanishi: Poisson cohomology of plane quadratic Poisson structures, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **33** (1) (1997), 73-89.

[100] N. Nakanishi: On Nambu-Poisson manifolds, *Rev. Math. Phys.*, **10** (4) (1998), 499-510.

[101] Y. Nambu: Generalized Hamiltonian dynamics, *Phys. Rev.*, **7** (1973), 2405-2412.

[102] Ngo-van-Que: Sur l'espace de prolongement différentiable, *J. Differential Geometry*, **2** (1968), 33-40.

[103] K. Nomizu: On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Annals of Math.*, **59** (2) (1954), 531-538.

[104] R.S. Palais: A global formulation of the Lie theory of transformation groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **22** (1957).

[105] J. Pradines: Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux , *C.R. Acad. Sci. Paris*, **264** Sér. A (1967), 245-248.

[106] D. Roytenberg: Courant algebroids, derived bracket and even symplectic supermanifolds, *Tesis Doctoral*, (1999), Berkeley.

[107] H.J. Sussmann: Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **180** (1973), 171-188.

[108] L. Takhtajan: On foundations of the generalized Nambu mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **160** (2) (1994), 295-315.

[109] W.P. Thurston: Some simple examples of symplectic manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **55** (2) (1976), 467-468.

[110] Ph. Tondeur: *Foliations on Riemannian manifolds*, Springer-Verlag, New York (1988).

[111] I. Vaisman: Varietétés riemanniennes feuilletées, *Czechosl. Math. J.*, **21** (1971) 46-75.

[112] I. Vaisman: Cohomology and differential forms, *Pure and Applied Math.*, **21**, M. Dekker Inc., New York, (1973).

[113] I. Vaisman: Remarkable operators and commutation formulas on locally conformal Kähler manifolds, *Compositio Math.*, **40** (1980), 287-299.

[114] I. Vaisman: Locally conformal symplectic manifolds, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, **8** (3) (1985), 521-536.

[115] I. Vaisman: Remarks on the Lichnerowicz-Poisson cohomology, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **40** (4) (1990), 951-963.

[116] I. Vaisman: On the geometric quantization of Poisson manifolds, *J. Math. Phys.*, **32** (12) (1991), 3339-3345.

[117] I. Vaisman: Lectures on the geometry of Poisson manifolds, *Progress in Math.*, **118**, Birkhäuser, Basel, (1994).

[118] I. Vaisman: The BV-algebra of a Jacobi manifold, *Ann. Polon. Math.*, **73** (3) (2000), 275-290.

[119] A.N. Varchenko, A.B. Givental: The period mapping and the intersection form, *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1998), 83-93.

[120] A. Wade: On some properties of Leibniz algebroids, Preprint 2002.

[121] A. Weinstein: The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geometry*, **18** (1983), 523-557. Errata et addenda: *J. Differential Geometry*, **22** (1985), 255.

[122] A. Weinstein: Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **16** (1987), 101-104.

[123] A. Weinstein: Lagrangian Mechanics and groupoids, *Fields Inst. Comm.* **7** (1996), 207-231.

[124] A. Weinstein: The modular automorphism group of a Poisson manifold, *J. Geom. Phys.*, **23** (1997), 379-394.

[125] A. Weinstein: Poisson geometry. Symplectic geometry, *Diff. Geom. and its Appl.,* **9** (1998), 213-238.

[126] R.O. Wells: *Differential Analysis on complex manifolds*, GTM **65**, Springer-Verlag, New York (1980).

[127] P. Xu: Poisson cohomology of regular Poisson manifolds, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **42** (4) (1992), 967-988.

[128] P. Xu: Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry, *Commun. Math. Phys.*, **200** (3) (1999), 545-560.

[129] D. Yan: Hodge structures on symplectic manifolds, *Adv. Math.*, **120** (1) (1996), 143-154.