

Universidad Nacional de La Plata
Departamento de Matemática.

Control Óptimo de Sistemas Mecánicos Actuados : Una Aproximación Geométrica

Leonardo Colombo

Trabajo de iniciación a la investigación

Directora: Dra. Marcela Zuccalli (Departamento de Matemática-UNLP)

*Investigador Asesor: Dr. David Martín de Diego
(ICMAT-CSIC-UAM-UC3M-UCM)*



LA PLATA
19 de junio de 2009

*Noche dieque incubando
(Día y noche dándole vueltas)
Sir Isaac Newton*

A mis papas y a mi abuela.

Agradecimientos

Después de terminar este trabajo, que no ha sido fácil para mí, quiero agradecer a aquellas personas que me han apoyado de una manera especial durante todo este tiempo.

Le debo todas las gracias a Ramiro, por ser mi hermano, mi amigo, mi profesor, por ser la persona que a pesar de todo estuvo en todo momento a mi lado. Gracias por enseñarme tanto de la matemática como de la vida, ya que junto a vos aprendí que todo tiene solución y estos años no hubiesen sido tan simples sin tus palabras.

Quiero agradecer a Marcela Zuccalli por este año de intenso trabajo, por su paciencia, su calidez, por aguantarme las llamadas a cualquier hora, y el afecto que me brindó. Por estar siempre ahí como una madre para cualquier consejo personal que necesité y sostenerme en los malos días.

Gracias a David Martín de Diego, por su gran atención durante todo este tiempo de trabajo, por su amabilidad, su disponibilidad a pesar de los miles de kilómetros de distancia, enseñarme a crecer profesionalmente, tratar de mejorar en todo lo que haga y sobre todas las cosas...no devolverme a mi país antes de irme!.

A mis viejos y hermanos que supieron estar, ayudarme, escucharme, sostenerme en la distancia y enseñarme que las cosas se hacen por uno mismo (y despertarme todas las mañanas!). A mi abuela, por hacerme sacar fuerzas para seguir adelante.

A Dani por su paciencia, por hacerme sentir que puedo y por brindarme su amor y amistad durante estos años.

Le agradezco a Marila por ser mi “mamá platense”, malcriarme, escucharme, aconsejarme y estar ahí en todo momento que necesité.

Gracias Gabi y Lau por adoptarme como hermano, por sus picardías, sus sonrisas, sus comidas, retarme constantemente (con mucha razón!), pelearme y ser cómplices en mis locuras.

A mis compañeros por soportarme, por enseñarme todos los días cosas nuevas, por aguantar mis malas caras y mal humor a las mañanas, por horas de estudio, charlas y mates compartidos. Porque a pesar de separarnos en momentos distintos de la carrera siempre siguieron estando. Gracias Ceci, Neda, Jime, Euge, Pia, Pato, Josefina, Martín, Alan.

A Poi y el Solo, por hacerme amar lo que hago, por mostrarme la simpleza y belleza de la mecánica y la geometría. Gracias por todo lo que me enseñaron.

A mis profesores y JTP's, y compañeros de trabajo por todo lo que aprendí junto a ellos, por tenerme paciencia y explicarme miles de veces las cosas hasta que entienda, por

ayudarme a vencer mis temores ante la matemática y formarme profesionalmente. A todo el departamento de matemática por hacerme sentir como en mi propia casa.

Por ultimo quiero decirle gracias a mis amigos, por la alegría que me brindan día a día, por enseñarme todo el tiempo a ser mejor persona, por tantas noches y salidas compartidas, por cuidarme y estar siempre tanto en los buenos como en los malos momentos. Gracias Nahuel, Joaquin, Fidel, Pablo, Jony, Seba, Ceci, Caro, Juli, Eze.

Y a la Fundación YPF por sustentar mis estudios desde el comienzo.

*Leonardo J. Colombo
La Plata, 19 de junio de 2009*

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	7
2.1. Mecánica Hamiltoniana	7
2.1.1. Elementos de su formulación	7
2.1.2. Ecuaciones de Hamilton	8
2.2. Mecánica Lagrangiana	9
2.2.1. Elementos de su formulación	9
2.2.2. Principio de Acción Crítica	9
2.2.3. Ecuaciones de Euler Lagrange	10
2.2.4. Approach Simplético	11
3. Sistemas Mecánicos con Vínculos	13
4. Sistemas Vakónomos con Vínculos de Primer Orden	17
4.1. Su formulación	17
4.2. Su aproximación geométrica	20
5. Sistemas Vakónomos de orden superior	27
5.1. Sistemas Lagrangianos de orden superior	27
5.1.1. Fibrados tangentes de orden superior	27
5.1.2. El principio de Hamilton y las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior	28
5.2. Sistemas vakónomos con vínculos de orden superior	32
5.3. Su formulación geométrica	33
6. Elementos de la Teoría de Control Óptimo	39
6.1. Control Óptimo	40
6.1.1. Control Óptimo y Principio del Máximo	40
6.2. Sistemas variacionales noholónomos y control óptimo	42
7. Aproximación Geométrica del Problema de Control Óptimo	45
7.1. Sistemas de Control Infractuados	45
7.2. Ejemplo: El Pendulo Invertido	51
8. Versión Discreta del Problema de Control Óptimo	57
8.1. Mecánica lagrangiana discreta	57
8.2. Mecánica variacional discreta con vínculos	60

8.2.1. Aproximación geométrica de la mecánica vakónoma discreta	61
8.3. Mecánica discreta de orden superior	63
8.4. Mecánica vakónoma de orden superior	65
8.5. Sistemas de Control Infractuados Discretos	66
8.6. Ejemplo: EL Pendulo Invertido	68
9. Conclusiones y Futuros Trabajos	73

Capítulo 1

Introducción

La investigación en sistemas mecánicos y dinámicos ha tenido un profundo impacto en otras áreas de investigación y en el desarrollo de tecnologías. Gran parte de sus avances se ha basado en técnicas analíticas y numéricas. Es en los años 60 cuando se pone en marcha un ambicioso programa al introducir técnicas más sofisticadas y potentes provenientes de los campos de la Geometría y la Topología, que han conducido al nacimiento de una nueva área de la matemática, la *Mecánica Geométrica*. También se han aplicado técnicas geométricas a una variedad de problemas de control de sistemas de locomoción, robótica, etc.

El énfasis en la geometría supone un intento de entender cualitativamente la dinámica del sistema, lo que favorece el análisis y el diseño de métodos numéricos. La Mecánica

Geométrica se configura como un punto de encuentro de disciplinas diversas como la Mecánica, la Geometría, el Análisis, el Álgebra, el Análisis Numérico, las Ecuaciones en derivadas parciales... Actualmente, la Mecánica Geométrica es un área de investigación pujante con fructíferas conexiones con otras disciplinas como la Teoría de Control No-Lineal y el Análisis Numérico.

La descripción geométrica de la mecánica lagrangiana (y hamiltoniana) tiene la ventaja de dar ecuaciones globales intrínsecas, invariantes respecto a cualquier cambio de coordenadas en el espacio de configuraciones. Eso permite trabajar con sistemas de referencia inerciales o no-inerciales en pie de igualdad. Para un sistema de n grados de libertad en las configuraciones, la mecánica lagrangiana proporciona un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange, que nos determinan completamente la evolución del sistema, dadas condiciones iniciales y supuesta la regularidad de la función lagrangiana.

Una formulación alternativa es la llamada mecánica hamiltoniana (localmente equivalente a la mecánica lagrangiana cuando la función lagrangiana es regular) que describe la evolución temporal de un sistema mediante ecuaciones diferenciales de primer orden.

Durante la última mitad del siglo pasado, se ha extendido y desarrollado este marco geométrico de la mecánica a nuevos casos: sistemas con fricción, explícitamente dependientes del tiempo, con ligaduras (holónomas y noholónomas), teorías clásicas de campos... Pero una de las áreas de mayor éxito, motivado por las interesantes aplicaciones, es en la Teoría de Control. El objetivo de la Teoría de Control es estudiar sistemas en los que podemos influir externamente en la dinámica usando variables de control. Los sistemas que consideraremos están dados por ecuaciones del siguiente tipo

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x(t), u(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

donde $x^i(t)$ son las variables de estado y $u(t) = (u^a(t))$ es la variable de control. El objetivo típico es encontrar controles que hagan que el estado alcance un objetivo prefijado: llegar a un punto determinado fijado el inicial, llegar a una subvariedad de estados finales, etc. En este trabajo, por simplicidad, nos vamos a centrar en el caso en el que los dos estados extremos, el estado inicial y el final, son fijos, aunque otras situaciones más generales tienen un tratamiento similar. El estudio de sistemas de control es una rama muy activa de la matemática con temas de estudio como controlabilidad, accesibilidad, planificación de trayectorias, diseño de métodos numéricos y con aplicaciones a todas las áreas de la ciencia.

En la Teoría de Control Óptimo, además, queremos que el sistema verifique una condición adicional, que consiste habitualmente en minimizar (o maximizar) cierto funcional; es decir, se quiere encontrar trayectorias $\gamma(t) = (x(t), u(t))$ suficientemente regulares, por ejemplo C^1 a trozos, con extremos fijos en el espacio de estados, $x(0) = x_0$ y $x(T) = x_T$, que satisfagan la ecuación de control (1.1) y que además minimicen el siguiente funcional

$$S(\gamma) = \int_0^T L(x(t), u(t)) dt$$

llamado también funcional objetivo o de costo, sobre un cierto espacio de trayectorias admisibles.

Las trayectorias $\gamma(t)$ que verifican todas estas condiciones se dirán óptimas. El control óptimo es una técnica matemática usada para resolver problemas de optimización en sistemas que evolucionan en el tiempo (continua o discretamente) y que son susceptibles de ser influenciados externamente. Una vez que el problema ha sido resuelto el control óptimo nos da una senda de comportamiento para las variables de control, es decir, nos indica qué acciones se deben seguir para poder llevar a la totalidad del sistema de un estado inicial a uno final de forma óptima o a alcanzar el objetivo inicialmente prediseñado.

Para encontrar el nacimiento del cálculo de variaciones y de la teoría de control óptimo nos deberíamos remontar hasta el año 1696, cuando Johann Bernoulli publica en la célebre revista *Acta Eruditorum*, el reto de resolver la curva braquistocrona. Aquí nos centraremos en el genial aporte del matemático ruso, L.S. Pontryagin. En los años 50, Pontryagin organizó un seminario matemático en el Instituto Matemático Steklov sobre problemas de matemática aplicada invitando a ingenieros a dar conferencias. El seminario culminó, entre otros temas con el descubrimiento del principio del máximo (de Pontryagin). En concreto el problema que intentaban resolver era un sistema de cinco ecuaciones diferenciales con tres parámetros de control, modelando las maniobras de un avión de combate. Pronto se vió que este problema no podía resolverse con el clásico cálculo de variaciones desarrollado por L. Euler (1707-1783) y, por tanto, era necesario encontrar nuevas técnicas. Así fue como L.S. Pontryagin y sus colaboradores desarrollaron su principio del máximo. Pronto se comprobó que las aplicaciones se extendían a otros campos científicos: control de naves espaciales y satélites, biomecánica, economía, robótica, etc, convirtiéndose actualmente en un interesante tema de investigación matemática.

Este trabajo aborda uno de los problemas matemáticos en teoría de control que más interés ha despertado en la última década: los sistemas mecánicos de control, poniendo especial énfasis en los sistemas infractuados (o subactuados). Esta clase de sistemas mecánicos permite, como veremos, modelar de forma unificada gran variedad de robots y vehículos autónomos. Un sistema infractuado es aquél que posee menos entradas de control que grados de libertad. Es claro que en el caso completamente actuado podemos afectar directamente todos los grados de libertad del sistema, sin embargo en el caso infractuado

el control es mucho más complicado. Como ejemplo sencillo consideremos el problema de mantener en equilibrio una varilla cilíndrica sobre la palma de nuestra mano es un buen ejemplo de un sistema infraactuado. Este sistema, como se muestra en la figura tiene cinco grados de libertad (tres para la posición del punto de contacto de la mano con la varilla, y dos ángulos para la última). Sin embargo sólo podemos actuar en los tres grados de libertad de la mano. En la práctica, muchos de los sistema que necesiten acciones externas para mantenerse en equilibrio son sistemas infraactuados.

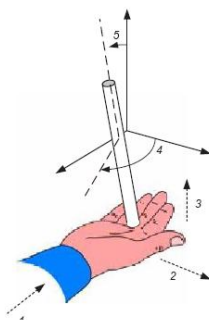


Figura 1.1: Grados de libertad de un sistema infraactuado

Existe una extensa literatura de investigación dedicada a este tipo de sistemas (véase [12] para una referencia moderna). Pese a los grandes avances teóricos y experimentales realizados hasta ahora, aún queda muchos problemas teóricos por resolver y el ámbito de las aplicaciones de la teoría se está haciendo cada día más amplio.

El problema del control de sistemas subactuados está motivado por numerosas aplicaciones prácticas. En primer lugar se esgrime el sólido argumento de la economía del diseño. Si un aeronave es un sistema subactuado en el que se aplica el empuje en la dirección del motor de reacción y se controla la trayectoria del cuerpo con la sola intervención del timón de cola y la potencia del motor, podríamos añadir actuadores, que apliquen la propulsión en las tres direcciones espaciales y que impriman cualquier momento de giro, hasta poder situar el avión en la posición que queramos, incluso detenido o invertido, garantizando estabilidad y trayectorias óptimas. Posiblemente será un sistema más fácil de pilotar, sobre todo en despegue y aterrizaje, pero se trataría de una máquina costosísima y el consumo de combustible resultará sumamente ineficiente.

Otras implicaciones surgen por la propia disposición física del sistema. Una lanzadera espacial es un sistema subactuado inestable por naturaleza al aplicar el empuje del motor por debajo de su centro de gravedad. Mantener la estabilidad de la lanzadera en la posición vertical superior es un reto para el control que se ha reproducido en un popular sistema instalado en gran parte de los laboratorios de las universidades del mundo: el péndulo invertido, que se analizará brevemente en este trabajo.

Otras aplicaciones de sistemas infraactuados aparecen en el diseño de vehículos submarinos, misiles, reorientación de satélites de comunicaciones, robots bípedos... La razón última es el diseño de mecanismos novedosos de locomoción, tanto físicos como de software, que permitan la fabricación de prototipos más ágiles, más eficientes, más económicos y más hábiles.

En este trabajo consideraremos sistemas mecánicos noholónomos derivados de una

energía cinética y de un potencial en los cuales las ligaduras noholónomas vendrán dadas por una distribución no integrable.

En primer lugar recordaremos la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de los sistemas mecánicos con vínculos, y también haremos una breve descripción de los dos *approachs* para tratar sistemas lagrangianos con vínculos; estos son el noholónimo y el vakonómico (ver por ejemplo [21]).

En el capítulo 4 siguiendo a [16] describiremos la formulación de la mecánica vakonómica para sistemas con vínculos de primer orden y su aproximación geométrica.

En el capítulo 5 completaremos el análisis de la mecánica vakonómica para sistemas mecánicos con Lagrangiano y vínculos de orden superior y su aproximación geométrica presentada en [7].

Para realizar la aproximación geométrica de un problema de control óptimo de un sistema infractuado, en el capítulo 6 recordaremos los conceptos básicos de la teoría de control óptimo que necesitaremos.

Finalmente, en el capítulo 7 realizamos dicha aproximación geométrica y la adaptamos al sistema de control infractuado que describe el péndulo invertido.

A lo largo de este trabajo, utilizaremos la llamada *notación de Einstein*: el símbolo de sumatoria sobre un índice será sobreentendido (y omitido) cada vez que ese índice aparezca repetido en una expresión.

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección recordaremos los elementos básicos de las formulaciones Hamiltoniana y Lagrangiana de los sistemas mecánicos.

Estas formulaciones de la mecánica proporcionan dos puntos de partida diferentes para el desarrollo de la mecánica. El approach lagrangiano de la mecánica se basa en la formulación de un principio variacional, mientras que el approach hamiltoniano utiliza estructuras geométricas tales como formas simplécticas o corchetes de Poisson. Ambos están relacionados, al menos en una gran cantidad de casos, a través de la Transformada de Legendre.

2.1. Mecánica Hamiltoniana

2.1.1. Elementos de su formulación

El objeto básico de la formulación hamiltoniana de la mecánica es una variedad simpléctica.

Una forma simpléctica sobre una variedad diferenciable Q es una 2-forma diferencial ω cerrada y no degenerada. Es decir, una 2-forma diferencial ω en Q tal que $d\omega = 0$ con la siguiente propiedad

$$\forall q \in Q \text{ y } \forall v \in T_q Q \quad v \neq 0 \Rightarrow \exists u \in T_q Q \text{ tal que } \omega(u, v) \neq 0.$$

Una **variedad simpléctica** es un par (Q, ω) donde Q es una variedad diferencial y ω una forma simpléctica sobre Q .

Un importante ejemplo de variedad simpléctica es el **fibrado cotangente** T^*Q de cualquier variedad Q . Recordemos que si $\dim Q = n$, su fibrado cotangente es la variedad de dimensión $2n$

$$T^*Q := \bigcup_{q \in Q} T_q^*Q,$$

donde T_q^*Q es el espacio dual del espacio tangente a Q en q , $T_q Q$. Los abiertos coordenados son de la forma

$$T_U^*Q := \bigcup_{q \in U} T_q^*Q,$$

con U entorno coordenado de Q . Se sabe que en T^*Q existe una estructura simpléctica intrínseca que puede describirse de varias maneras equivalentes.

Si (q^i) son las coordenadas locales de $q \in U \subset Q$ con U abierto consideremos la base de T_q^*Q dadas por las 1-formas dq^1, \dots, dq^n . Entonces $\forall p \in T_q^*Q$ p se puede escribir $p = p_i dq^i$. De esta manera se tiene que $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ es un sistema de coordenadas locales en T^*Q de (q, p) .

La **forma simpléctica canónica** ω_Q sobre T^*Q es la 2-forma diferencial que en este sistema coordenado (q^i, p_i) se escribe

$$\omega_Q(q^i, p_i) := dq^i \wedge dp_i = d(p_i dq^i).$$

El potencial $\theta_Q = p_i dq^i$ es la 1-forma canónica en T^*Q .

Denotamos por $\pi_Q^* : T^*Q \rightarrow Q$ la proyección canónica dada por $\pi_Q^*(q, p) = q$

Como en variedades riemannianas, en el caso de una variedad simpléctica Q , existe una identificación entre los campos diferenciales y las 1-formas sobre Q dada por

$$i : \mathfrak{X}(Q) \rightarrow \Omega^1(Q) \text{ donde } i(X) = i_X \omega$$

siendo $i_X \omega$ la 1-forma definida como la contracción de ω por X .

Definición 2.1.1. Dadas (Q, ω) una variedad simpléctica y $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, definimos el campo vectorial X_f como el campo identificado con la 1-forma df . Es decir,

$$i_{X_f} \omega = df$$

X_f es el **campo vectorial Hamiltoniano** de f .

2.1.2. Ecuaciones de Hamilton

Sea una variedad simpléctica (Q, ω) que representa el espacio de fases de un sistema mecánico.

Una función diferenciable $H : Q \rightarrow \mathbb{R}$ que describe la dinámica del sistema se llama función hamiltoniana o Hamiltoniano.

En este caso se dice que (Q, H, ω) es un **sistema hamiltoniano**.

Las ecuaciones de movimiento llamadas **ecuaciones de Hamilton** están definidas por la condición

$$\dot{q}(t) = X_H(q(t)) \in T_{q(t)}Q$$

Esto es, la curva solución de la dinámica es la curva integral del campo hamiltoniano de H .

En coordenadas las ecuaciones de Hamilton definen un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad i = 1, \dots, n$$

2.2. Mecánica Lagrangiana

2.2.1. Elementos de su formulación

Si Q es una variedad diferencial de dimensión n , un sistema de coordenadas (q^i) definido en un entorno coordenado U de Q induce una base en cada espacio tangente T_qQ para cada $q \in U$. Esta base está formada por los vectores $\frac{\partial}{\partial q^i}$ tangentes a las curvas coordenadas.

El fibrado tangente TQ es la variedad diferencial de dimensión $2n$

$$TQ := \bigcup_{q \in Q} T_qQ$$

con coordenadas (q^i, v^i) sobre entornos coordenados de la forma

$$T_UQ := \bigcup_{q \in U} T_qQ$$

con U entorno coordenado de Q que están definidas de la siguiente manera si (q^i) son las coordenadas de $q \in U$ y $v = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$, al elemento $(q, v) \in T_UQ$ se le asignan las coordenadas (q^i, v^i) .

Denotaremos $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ a la proyección canónica; es decir, para $(q, v) \in TQ$ se tiene $\pi_Q(q, v) = q$.

Ahora consideremos una variedad Q como el espacio de configuraciones de un sistema. Entonces, el espacio de estados asociado está dado por el fibrado tangente TQ y la dinámica del sistema está determinada por una función diferenciable $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ llamada **función lagrangiana o Lagrangiano**.

En la sección V de la *Mécanique Analytique* (1788)[20] de J. L. Lagrange aparece descrita la diferencia entre la energía cinética y potencial, $L = T - V$, que hoy día es conocida como la función Lagrangiana o el Lagrangiano. También aparecen las ecuaciones del movimiento en la forma que conocemos como ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

2.2.2. Principio de Acción Crítica

Para formular el Principio de Acción Crítica de Hamilton consideraremos el espacio de curvas

$$\mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}([0, T], Q) = \{q : [0, T] \rightarrow Q \mid q \text{ es una curva } \mathcal{C}^2\}$$

para un intervalo de tiempo dado $[0, T]$.

Se puede probar que $\mathcal{C}(Q)$ tiene estructura de variedad diferenciable (ver por ejemplo [1].)

El espacio tangente $T_q\mathcal{C}(Q)$ de $\mathcal{C}(Q)$ en q es el conjunto de funciones $\mathcal{C}^2 v_q : [0, T] \rightarrow TQ$ tal que $\pi_Q \circ v_q = q$.

Sea el funcional acción $\mathcal{A} : \mathcal{C}(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{A}(q) = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Consideremos las variaciones infinitesimales de las curvas $q \in \mathcal{C}(Q)$.

Una deformación de una curva $q(t)$ es una función suave $q(t, \lambda)$ tal que $q(t, 0) = q(t) \forall t$. La variación correspondiente está dada por

$$\delta q(t) = \left. \frac{\partial q(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

Principio de Acción Crítica establece que

Las curvas $q(t) \in \mathcal{C}(Q)$ que determinan la dinámica del sistema son puntos críticos de la acción \mathcal{A} .

Esto es,

$$d\mathcal{C}(Q)(q(t)) \cdot \delta q(t) = 0$$

$\forall \delta q(t)$ variación infinitesimal de la curva $q(t)$.

2.2.3. Ecuaciones de Euler Lagrange

Se puede ver que este Principio es equivalente a las ecuaciones de Euler Lagrange ya mencionadas en la subsección 2.2.1.

Para establecer esta relación consideramos la subvariedad de segundo orden de $T(TQ)$ definida como

$$\ddot{Q} = \{w \in T(TQ) \mid T\pi_Q(w) = \pi_{TQ}(w)\} \subset T(TQ)$$

donde $\pi_{TQ} : T(TQ) \rightarrow TQ$ es la proyección canónica sobre el fibrado tangente TQ y $T\pi_Q$ es el diferencial de la proyección canónica π_Q .

Observemos que \ddot{Q} es simplemente el conjunto de derivadas de segundo orden $\left. \frac{d^2 q}{dt^2} \right|_{t=0}$ de curvas $q : \mathbb{R} \rightarrow Q$ cuyos elementos son de la forma $((q, \dot{q}), (\dot{q}, \ddot{q})) \in T(TQ)$.

Se puede demostrar el siguiente resultado (ver por ejemplo CMR)

Teorema 2.2.1. *Dado el Lagrangiano L entonces existe una única función diferenciable $D_{EL}L : \ddot{Q} \rightarrow T^*Q$ y una única 1-forma diferencial Θ_L en TQ tal que, para toda variación $\delta q \in T_q\mathcal{C}(Q)$ de $q(t)$ se tiene que*

$$d\mathcal{A}(q) \cdot \delta q = \int_0^T D_{EL}L(\ddot{q}) \cdot \delta q dt + \Theta_L(\dot{q}) \cdot \widehat{\delta q}|_0^T, \quad (2.1)$$

donde

$$\widehat{\delta q}(t) = \left(\left(q(t), \frac{\partial q}{\partial t}(t) \right), \left(\delta q(t), \frac{\partial \delta q}{\partial t}(t) \right) \right). \quad (2.2)$$

La función $D_{EL}L$ es llamada *Operador de Euler-Lagrange* y en coordenadas tiene la forma

$$(D_{EL}L)_i = \frac{\partial L}{\delta q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

La 1-forma Θ_L es llamada *1-Forma Lagrangiana* y en coordenadas está dada por

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i.$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema, llamadas Ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben como $D_{EL}L \equiv 0$.

2.2.4. Approach Simplético

La existencia de la 1-forma Θ_L permite formular una versión simpléctica de la mecánica Lagrangiana.

Se define la 2-forma cerrada $\Omega_L = -d\Theta_L$ que es llamada la **2-forma Lagrangiana** y cuya expresión en coordenadas está dada por

$$\Omega_L(q, \dot{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} d\dot{q}^i \wedge d\dot{q}^j.$$

Su matriz asociada es de la forma :

$$\begin{pmatrix} A & -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

donde A es cierta matriz antisimétrica.

Vemos así que Ω_L es una forma simpléctica en TQ si y sólo si el determinante de la matriz (2.3) es no nulo y esto ocurre si y sólo si

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0.$$

Definición 2.2.2. Decimos que $L \in C^\infty(TQ)$ es un **Lagrangiano regular** si

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0$$

en todo punto; es decir, si Ω_L es simpléctica en TQ .

Si asumimos que L es regular está bien definido el campo vectorial lagrangiano $X_L : TQ \rightarrow T(TQ)$ que es un campo vectorial de segundo orden en TQ que satisface

$$D_{EL}L \circ X_L = 0.$$

En este caso se tiene el flujo del campo X_L llamado **flujo lagrangiano** $FL : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow TQ$.

Es claro entonces que una curva $q(t) \in \mathcal{C}(Q)$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange si $(q(t), \dot{q}(t))$ es curva integral del campo X_L . Es decir, $q(t)$ satisfaga las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}(q(t), \dot{q}(t)) \right) = 0$$

para todo $t \in [0, T]$.

Observación 2.2.3. *se puede ver fácilmente que el flujo F_T es simpléctico. Es decir*

$$F_T^* \Omega_L = \Omega_L$$

Como mencionamos antes, la relación entre la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana está dada por la **Transformada de Legendre**

$$\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$$

definida como

$$\langle \mathbb{F}L(q, v), (q, p) \rangle = \frac{d}{dt} L(q + tv) \Big|_{t=0}$$

En [25] se puede ver que $\Omega_L = \mathbb{F}L^* \omega_Q$. Más aún, $\Theta_L = \mathbb{F}L^* \theta_Q$.

Capítulo 3

Sistemas Mecánicos con Vínculos

Existen dos marcos diferentes para tratar los sistemas lagrangianos con vínculos que son la mecánica no holónoma y la mecánica vakonómica.

La mecánica no holónoma se basa en el Principio de Lagrange D'Alembert y busca trayectorias críticas de la acción lagrangiana que sean compatibles con los vínculos. Este approach ha demostrado ser el adecuado para resolver numerosos problemas de distintas áreas de la ingeniería como la robótica y la teoría de control.

Por otro lado, la mecánica vakonómica se aplica al estudio de problemas de control óptimo, teoría de crecimiento económico y movimiento de microorganismos entre otros. Más aún, cómo veremos más adelante, bajo ciertas condiciones de regularidad, un problema de control óptimo es equivalente a un problema vakonómico con vínculos de orden superior.

A diferencia del método no holónomo, este approach vakonómico es puramente variacional y consiste en buscar las trayectorias críticas de la acción lagrangiana determinada por el lagrangiano restringido a las curvas que satisfacen los vínculos.

Se sabe que un sistema vakonómico es equivalente al sistema descrito por el lagrangiano extendido con los vínculos que resulta ser singular. Este nuevo sistema puede estudiarse por ejemplo, usando la versión geométrica de la teoría de vínculos de Dirac dada por Gotay y Nester [17].

Para comparar las ecuaciones de movimiento obtenidas por estos dos enfoques, consideremos un sistema mecánico sobre una variedad Q de dimensión n sujeto a vínculos lineales en las velocidades que definen una distribución \mathcal{D} de TQ y cuya dinámica está dada por el lagrangiano L .

Asumimos que \mathcal{D} tiene rango constante y por lo tanto, al menos localmente, existen $n - k$ 1-formas $\{\omega^a\}$ linealmente independientes tales que

$$\mathcal{D}_q = Ker\{\omega^1(q), \dots, \omega^{n-k}(q)\}$$

Principio de Lagrange D'Alembert Recordemos el principio de Lagrange D'Alembert en el que se basa el método noholónomo.

Una curva $q(t) \subset Q$ es solución del sistema si

$$\delta \int L(q(t), \dot{q}(t)) dt = 0 \quad \forall \delta q(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}.$$

Este principio equivale a las ecuaciones llamadas ecuaciones de Lagrange D'Alembert.

Puede verse que una curva $q(t) \in Q$ es solución del sistema no holónimo si $(q(t), \dot{q}(t)) \subset TQ$ satisface las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_a \omega_i^a \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\omega_i^a \dot{q}^i = 0 \quad \forall a = 1, \dots, n - k$$

Consideremos un sistema local de coordenadas tales que $q = (r, s)$ y

$$\omega^a(q) = ds^a + A_\alpha^a(r, s) dr^\alpha$$

con $a = 1, \dots, n - k$

Entonces, las variaciones δq pueden escribirse como $\delta q = (\delta r, \delta s)$ y si $\delta q \in \mathcal{D}_{q(t)}$ se satisfacen que

$$\delta s^a + A_\alpha^a \delta r^\alpha = 0$$

En este sistema de coordenadas las ecuaciones de Lagrange D'Alembert se escriben como

Por otro lado, la mecánica vakonómica establece que la curva $(q(t)) \subset Q$ es solución del sistema si $q(t)$ es un punto crítico de la acción lagrangiana $\mathcal{A}(q) = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt$ restringida a

$$\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b], \mathcal{D}) = \{q : [a, b] \rightarrow Q \mid q(a) = q_0, q(b) = q_1 \text{ y } \dot{q}(t) \in \mathcal{D}_{q(t)} \forall t \in [a, b]\}.$$

Se puede escribir

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \mathcal{A}|_{\mathcal{C}^2(q_0, q_1, [a, b], \mathcal{D})}$$

Consideremos $L_{\mathcal{D}} = L|_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}$. En coordenadas puede escribirse

$$L_{\mathcal{D}}(r^\alpha, s^a, \dot{r}^\alpha) = L(r^\alpha, s^a, \dot{r}^\alpha, -A_\alpha^a(r) \dot{r}^\alpha).$$

Si aplicamos el principio variacional standar

$$\delta \int L_{\mathcal{D}}(r^\alpha, s^a, \dot{r}^\alpha) dt = 0$$

se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\mathcal{D}}}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L_{\mathcal{D}}}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial L_{\mathcal{D}}}{\partial s^a} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^a} d\omega^a \left(\dot{q}, \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \right).$$

En este approach es fundamental el resultado conocido como *Teorema de los Multiplicadores de Lagrange* (ver para mas detalles [21])

Teorema 3.0.4. (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange)

Sea N una variedad diferencial y sea F un espacio de Banach con $g : N \rightarrow F$ una submersión suave tal que $g^{-1}(0)$ es una subvariedad de N . Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces $n \in g^{-1}(0)$ es un punto crítico $f|_{g^{-1}(0)}$ si y sólo si existe $\lambda \in F$ tal que n es un punto crítico de $f - \lambda \circ g$.

Entonces $q(t)$ es solución del problema vakonómico si y sólo si $\exists \lambda(t)$ tal que $(q(t), \lambda(t))$ verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al lagrangiano extendido

$$\mathcal{L} : T(Q \times \mathbb{R}^{n-k}) \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(q, \dot{q}) = \lambda_a \omega_i^a q^i.$$

Estas son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\dot{\lambda}_a \omega_i^a - \lambda_a \frac{d}{dt} \omega_i^a - \frac{\partial \omega_i^a}{\partial q^i}$$

$$\omega_i^a \dot{q}^i = 0.$$

Observación 3.0.5. Como es bien sabido, si los vínculos son holónomos, las ecuaciones de movimiento de un sistema derivadas de aplicar los métodos noholónomos y vakonómico son equivalentes.

Observación 3.0.6. Puede verse que si \mathcal{D} es una distribución integrable, la conexión A en el fibrado tangente tiene curvatura nula. Por tal razón, en las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\mathcal{D}}}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L_{\mathcal{D}}}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^a \frac{\partial L_{\mathcal{D}}}{\partial s^a} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^a} d\omega^a \left(\dot{q}, \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \right)$$

no aparece el término $d\omega^a = 0$ y se convierte en

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} \right) = A_\alpha^a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial s^\alpha} \right) \quad \alpha = 1, \dots, p$$

Capítulo 4

Sistemas Vakónomos con Vínculos de Primer Orden

En este capítulo vamos a estudiar la llamada aproximación geométrica de los sistemas vakónomos con vínculos de primer orden. En primer lugar analizaremos con detalle el approach de la mecánica vakónoma de primer orden (para más detalles mirar [16]).

4.1. Su formulación

Sea Q el espacio de configuraciones de dimensión n de un sistema mecánico y sea $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano que describe su dinámica. Si denotamos (q^A) a las coordenadas en Q , entonces tendremos como coordenadas naturales en el fibrado tangente a (q^A, \dot{q}^A) . Como antes, consideraremos la proyección canónica de TQ sobre Q , $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ dada por $\pi_Q(q^A, \dot{q}^A) = (q^A)$.

Supongamos que el sistema está sujeto a vínculos que vienen dados por una subvariedad M de TQ de dimensión $2n - m$, localmente definida por las ecuaciones $\Phi^\alpha(q, \dot{q}) = 0$ con $1 \leq \alpha \leq m$ donde $\Phi^\alpha : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Vamos a suponer que el rango de la matriz

$$\left(\frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^m)}{\partial(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)} \right)_{m \times n}$$

es constante e igual a m . En consecuencia, por el teorema de la función implícita los vínculos pueden expresarse al menos localmente (reordenando las coordenadas si es necesario) como

$$\dot{q}^a = \Psi^a(q^A, \dot{q}^a), \quad (4.1)$$

donde $1 \leq \alpha \leq m$, $m+1 \leq a \leq n$ y $1 \leq A \leq n$. Entonces (q^A, \dot{q}^a) son coordenadas locales en $M \subset TQ$.

Para formular el principio variacional restringido que da lugar a las ecuaciones de movimiento vakonómicas consideremos el siguiente espacio.

Dados q_0 y $q_1 \in Q$, denotamos al conjunto de curvas diferenciables que conectan los puntos q_0 y q_1 , como

$$\mathcal{C}^2(q_0, q_1) = \{c : [0, 1] \rightarrow Q \mid c \text{ es } \mathcal{C}^2, c(0) = q_0, c(1) = q_1\}.$$

Como ya dijimos, dada c una curva en $\mathcal{C}^2(q_0, q_1)$ unaa variación de c , es otra curva diferenciable $c_s : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}^2(q_0, q_1)$ $s \mapsto c_s(t)$ tal que $c_0 = c$.

Una variación infinitesimal u de c es un vector tangente a la variación de c ; esto es,

$$\delta c(t) = u(t) = \left. \frac{dc_s(t)}{ds} \right|_{s=0} \in T_{c(t)}Q.$$

El espacio tangente a $\mathcal{C}^2(q_0, q_1)$ en c esta dado por

$$T_c\mathcal{C}^2(q_0, q_1) = \{u : [0, 1] \rightarrow TQ \mid u \text{ es de clase } \mathcal{C}^1, u(t) \in T_{c(t)}Q, u(0) = 0 \text{ y } u(1) = 0\}.$$

Ahora consideramos el subconjunto $\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1)$ de $\mathcal{C}^2(q_0, q_1)$, que consiste en las curvas cuyas velocidades están en la subvariedad de vínculos M

$$\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1) = \{c \in \mathcal{C}^2(q_0, q_1) \mid \dot{c}(t) \in M_{c(t)} = M \cap \pi_Q^{-1}(c(t)), \forall t \in [0, 1]\}.$$

Finalmente, consideramos el funcional acción \mathcal{A} definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{C}^2(q_0, q_1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\rightarrow \mathcal{A}(c) = \int_0^1 L(c(t), \dot{c}(t)) dt. \end{aligned}$$

Definición 4.1.1. *El problema vakónomo asociado a (Q, L, M, q_0, q_1) consiste en extremizar el funcional \mathcal{A} entre las curvas que satisfacen los vínculos definidos por M .*

$c \in \tilde{\mathcal{C}}^2(x, y)$ será una solución al problema vakónomo si c es un punto crítico de $\mathcal{A} \mid_{\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1)}$.

Ahora, daremos una caracterización de las soluciones del problema vakónomo.

Proposición 4.1.2. *Una curva $c \in \tilde{\mathcal{C}}^2(x, y)$ es una solución del el problema vakónomo si y sólo si existe $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} = \mu_\alpha \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^a} \right] + \dot{\mu}_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a}, \\ \dot{\mu}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - \mu_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^\alpha}, \\ \dot{q}^\alpha = \Psi^\alpha(q^A, \dot{q}^a), \end{cases} \quad (4.2)$$

donde $\tilde{L} : M \rightarrow \mathbb{R}$ es la restricción de L a M .

Demostración

La condición para que una curva sea solución del problema vakonómico es

$$0 = d\mathcal{A}(c) \cdot u = \frac{d}{ds} \mathcal{A}(c_s) \Big|_{s=0},$$

para toda variación c_s de c en $\tilde{\mathcal{C}}^2(q_0, q_1)$, donde $u = \frac{dc_s}{ds} \Big|_{s=0}$. Entonces tenemos que

$$0 = \frac{d}{ds} \mathcal{A}(c_s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\int_0^1 L(c_s(t), \dot{c}_s(t)) dt \right) \Big|_{s=0} = \int_0^1 \frac{d}{ds} L(c_s(t), \dot{c}_s(t)) \Big|_{s=0} dt.$$

En coordenadas locales,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial q^A} u^A + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{u}^a + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^A} u^A + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \dot{u}^a \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{\partial L}{\partial q^A} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^A} \right] u^A + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right] \dot{u}^a \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^A} u^A + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} \dot{u}^a \right) dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De (4.1), sabemos que las variaciones infinitesimales u^A , con $1 \leq A \leq n$ no son arbitrarias.

Consideremos las funciones μ_α defidas como las soluciones de los siguientes sistemas de primer orden de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mu}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} \Big|_c - \mu_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^\alpha} \Big|_c, \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

Entonces, usando el hecho de que $\dot{u}^\alpha = \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^A} u^A + \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \dot{u}^a$, obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\mu_\alpha u^\alpha) = \mu_\alpha \dot{u}^\alpha + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - \mu_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^\alpha} \right) u^\alpha = u^\alpha \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} + \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^a} u^a + \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \dot{u}^a,$$

o equivalentemente, $u^\alpha \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt} (\mu_\alpha u^\alpha) - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^a} u^a - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \dot{u}^a$. Sustituyendo la última expresión en (4.3) e integrando por partes, tenemos que

$$d\mathcal{A}(c) \cdot u = \int_0^1 \left(\left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^a} \right] u^a + \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right] \dot{u}^a \right) dt.$$

Ahora, de

$$\left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right] \dot{u}^a = \frac{d}{dt} \left(\left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right] u^a \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right) u^a,$$

utilizando de nuevo integración por partes, podemos escribir

$$0 = \int_0^1 \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - \mu_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] u^a dt .$$

Como las variaciones infinitesimales u^a son arbitrarias, podemos afirmar que $d\mathcal{A}(c) \cdot u = 0$ si y sólo si c y μ_α satisfacen (4.2). ■

Observación 4.1.3. *La manera habitual en que las ecuaciones de movimiento de la mecánica vakónomas son presentada es*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \dot{q}^A} + \lambda_\alpha \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^A} \right], \\ \Phi^\alpha(q, \dot{q}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $\Phi^\alpha = \Psi^\alpha - \dot{q}^\alpha$ y $\lambda_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \mu_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq m$.

Este sistema de ecuaciones puede pensarse como las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano extendido

$$\mathcal{L}_\phi : T(Q \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$L_\phi = L + \lambda_\alpha \Phi^\alpha$$

que claramente resulta singular.

4.2. Su aproximación geométrica

Ahora haremos una reseña de una caracterización geométrica de la mecánica vakónoma similar a la formulación dada por Skinner y Rusk [27] para Lagrangianos singulares presentada por D. Martín de Diego, M. de León, S. Martínez y J. Cortez en [16]. Esta caracterización es de gran interés, ya que nos permite estudiar vínculos lineales y no lineales de manera intrínseca. Además, como vamos a discutir más adelante, este formalismo permitirá utilizar las ideas geométricas de la mecánica en el tratamiento de problemas de control óptimo.

Consideremos la suma de Whitney de los fibrados T^*Q y TQ denotada por $T^*Q \oplus TQ$ y las proyecciones canónicas

$$pr_1 : T^*Q \oplus TQ \longrightarrow T^*Q,$$

$$pr_2 : T^*Q \oplus TQ \longrightarrow TQ.$$

Consideremos la subvariedad $W_0 = pr_2^{-1}(M)$, donde M es la subvariedad de vínculos, localmente determinada por la ecuación de ligaduras $\Phi^\alpha(q, \dot{q}) = 0$ con $1 \leq \alpha \leq m$.

Vamos a considerar el producto fibrado $W_0 = T^*Q \times_Q M$ sobre Q y las proyecciones canónicas

$$\pi_1 = pr_1|_{W_0}$$

$$\pi_2 = pr_2|_{W_0}$$

Ahora, definimos en $T^*Q \times_Q M$ la 2-forma presimpléctica $\omega = \pi_1^*\omega_Q$ donde ω_Q es la forma simpléctica canónica en T^*Q .

Definimos la función

$$H_{W_0} = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle - \pi_2^*\tilde{L},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno entre vectores y covectores de Q .

Dado (q^A) un sistema de coordenadas locales en un entorno U de Q , (q^A, \dot{q}^a) y (q^A, p_A) son las coordenadas inducidas en $TU \cap M$ y T^*Q respectivamente. También tenemos coordenadas inducidas (q^A, p_A, \dot{q}^a) en $T^*U \times_Q (TU \cap M)$.

Por lo tanto, el Hamiltoniano H_{W_0} se escribe como

$$H_{W_0}(q^A, p_A, \dot{q}^a) = p_a \dot{q}^a + p_\alpha \Psi^\alpha - \tilde{L}(q^A, \dot{q}^a),$$

y la 2-forma ω como

$$\omega = dq^A \wedge dp_A.$$

La aproximación geométrica de un sistema vakonómico consiste en expresar sus ecuaciones de movimiento como las ecuaciones de Hamilton de un sistema Hamiltoniano presimpléctico.

Ahora, veremos cómo la dinámica del sistema vakónomo (4.2) es determinado por las soluciones de la ecuación

$$i_X \omega = dH_{W_0}. \quad (4.5)$$

Supongamos que tenemos el sistema presimpléctico en $T^*Q \times_Q M$. Primero, consideremos el conjunto de puntos W_1 de $T^*Q \times_Q M$ donde (4.5) tiene solución. Ésta es la subvariedad de vínculos determinada por

$$W_1 = \{x \in T^*Q \times_Q M \mid dH_{W_0}(x)(V) = 0, \forall V \in \ker \omega\}.$$

Como $\omega = \pi_1^*\omega_Q$ localmente $\ker \omega = \text{span}\langle \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \rangle$. Por lo tanto, la subvariedad de vínculos W_1 esta localmente caracterizada por los vínculos

$$\varphi_a = p_a + p_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} = 0 \text{ con } m+1 \leq a \leq n$$

o, equivalentemente,

$$p_a = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - p_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \text{ con } m+1 \leq a \leq n. \quad (4.6)$$

Desarrollando la expresión en (4.5) encontramos que las ecuaciones de movimiento a lo largo de W_1 son

$$\dot{q}^A = \frac{\partial H_{W_0}}{\partial p_A}, \quad \dot{p}_A = -\frac{\partial H_{W_0}}{\partial q^A},$$

que son equivalentes a

$$\dot{q}^\alpha = \Psi^\alpha(q^A, \dot{q}^a), \quad (4.7)$$

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - p_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^\alpha}, \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - p_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - p_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^a}. \quad (4.9)$$

Se observa que estas ecuaciones son, precisamente, las ecuaciones de movimiento vakónomas (4.2), donde $p_\alpha = \mu_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq m$.

Es decir, las ecuaciones de movimiento de un sistema vakónomo pueden ser interpretadas como las ecuaciones de Hamilton de un sistema Hamiltoniano presimpléctico.

Observación 4.2.1. *El Momento p_α , $1 \leq \alpha \leq m$, juega el rol de multiplicador de Lagrange, pero no tiene ningun significado físico.*

Definición 4.2.2. *El sistema Hamiltoniano presimpléctico $(T^*Q \times_Q M, \omega, H_{W_0})$ es llamado Sistema Hamiltoniano Vakónomico.*

Como ya comentamos, las ecuaciones vakónomicas corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un lagrangiano singular y por lo tanto su solución no tienen porqué ser única. Obviamente tampoco se puede asegurar la unicidad de solución de un sistema mecánico presimpléctico.

Analizaremos ahora bajo qué condiciones se puede obtener única solución.

La solución en W_1 puede no ser tangente a W_1 . En tal caso, tenemos que restringir W_1 a la subvariedad W_2 donde los vectores tangentes están en TW_1 , pero acá puede volver a pasar lo mismo, y procediendo así tenemos una sucesión de subvariedades (asumiendo que los subconjuntos generados por el algoritmo son subvariedades)

$$\dots \hookrightarrow W_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_2 \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow W_0 = T^*Q \times_Q M.$$

Algebraicamente, estas subvariedades de vínculos pueden escribirse como

$$W_i = \{x \in T^*Q \times_Q M \mid dH_{W_0}(x)(v) = 0, \forall v \in T_x W_{i-1}^\perp\}, \quad i \geq 1, \quad (4.10)$$

donde $(T_x W_{i-1})^\perp = \{v \in T_x(T^*Q \times_Q M) \mid \omega(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x W_{i-1}\}$

En el caso en que el algoritmo de vínculos sea estable, es decir, existe un entero positivo k tal que $W_{k+1} = W_k$ y $\dim W_k \neq 0$, se tiene una solución bien definida X en la subvariedad final $W_f = W_k$ tal que

$$(i_X \omega = dH_{W_0})|_{W_f}.$$

Veremos más adelante, que un caso particular muy importante es cuando la subvariedad final de vínculos es W_1 ; es decir $W_f = W_1$.

Observar que la dimensión de W_1 es $2n$. En lo que sigue, vamos a analizar cuando esta subvariedad de vínculos cuenta con una 2-forma simpléctica; en tal caso se va a determinar una única solución X para las ecuaciones vakónomas.

Denotamos por ω_1 la restricción de la 2-forma presimpléctica ω en W_1 .

Proposición 4.2.3. (W_1, ω_1) es una variedad simpléctica si y sólo si para todo punto de W_1 ,

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} - p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right) \neq 0. \quad (4.11)$$

Demostración

Recordemos que ω_1 es simpléctica si y sólo si $T_x W_1 \cap (T_x W_1)^\perp = 0 \forall x \in W_1$.

Como vimos antes W_1 está localmente determinado por los vínculos $\varphi_a(q^A, p_A, \dot{q}^a) = 0$

Entonces, $T_x W_1^\perp$ está dado por el conjunto

$$\{v \in T_x(T^*Q \times_Q)M / w_1(x)(v, d\varphi_b) = 0\}$$

donde $d\varphi_b \in T_x W_0$.

Dado que $\varphi_b(q^A, p_A, \dot{q}^a) = p_a + p_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$ se tiene que

$$d\varphi_b \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \right) = p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$$

el espacio $T_x W_1^\perp$ se puede describir como

$$\{v \in T_x(T^*Q \times_Q)M / w_1(x)(v, p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}) = 0\}$$

Por otro lado, ω_1 es simpléctica si y sólo si se verifica la implicación

$$i_v \omega_1 = 0 \Rightarrow v = 0$$

Entonces, $T_x W_1^\perp$ puede describirse como el conjunto

$$\{v \in T_x(T^*Q \times_Q)M / \det(p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}) = 0\}$$

Por lo tanto, el espacio $T_x W_1$ está dado por el conjunto

$$\{v \in T_x(T^*Q \times_Q)M / \det(p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}) \neq 0\}$$

■

En este caso, desarrollando la ecuación (4.9) vemos que puede ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - p_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - p_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^a}$$

\Updownarrow

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^a} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} \ddot{q}^b - \dot{p}_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} - p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b - p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^a} \dot{q}^\alpha - p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} \ddot{q}^b =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - p_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^a} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \left(\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} - p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} \right) \dot{q}^b = \\
 & \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - p_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^a} \dot{q}^\alpha + \dot{p}_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} + p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b + p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^a} \dot{q}^\alpha \\
 & \quad \Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\dot{q}^b = \bar{C}^{ab} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} - p_\beta \frac{\partial \Psi^\beta}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b - \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^a} \dot{q}^\alpha + \dot{p}_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} + p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^b \partial \dot{q}^a} \dot{q}^b + p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^a} \dot{q}^\alpha \right], \quad (4.12)$$

donde,

$$\bar{C}_{ab} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} - p_\alpha \frac{\partial^2 \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}, \quad (4.13)$$

y (\bar{C}^{ab}) denota la matriz inversa de (\bar{C}_{ab}) .

Observación 4.2.4. *La caracterización de la proposición anterior para la variedad simpléctica (W_1, ω_1) implica, por el teorema de la función implícita, que la ecuación de vínculos*

$$\varphi_a = p_a + p_\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} = 0, \quad m+1 \leq a \leq n,$$

está localmente determinada por variables \dot{q}^a , $m+1 \leq a \leq n$; esto es, $\dot{q}^a = \chi^a(q^A, p_A)$, con $m+1 \leq a \leq n$. Por lo tanto, podemos considerar coordenadas locales (q^A, p_A) en W_1 . En este caso, la forma simpléctica ω_1 y el Hamiltoniano H_{W_0} restringido a W_1 tienen las siguientes expresiones

$$\omega_1 = dq^A \wedge dp_A$$

$$H_{W_1} = p_a \chi^a + p_\alpha \Psi^\alpha - \bar{L}(q^A, p_A),$$

donde $\bar{L}(q^A, p_A) = \tilde{L}(q^A, \chi^a(q^A, p_A))$.

Consecuentemente, (4.7-4.9) pueden reescribirse en forma Hamiltoniana como

$$\dot{q}^A = \frac{\partial H_{W_1}}{\partial p_A}, \quad \dot{p}_A = -\frac{\partial H_{W_1}}{\partial q^A}.$$

Esta elección de las coordenadas es común en la teoría de control óptimo.

Observación 4.2.5. *Observemos que, si las ligaduras son lineales en las velocidades, podemos escribir $\dot{q}^\alpha = \Psi_\alpha^\alpha(q) \dot{q}^\alpha$. Entonces, de la proposición (4.2.3), ω_1 es simpléctica si y sólo si*

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right) \neq 0.$$

Observación 4.2.6. *El cálculo variacional es una herramienta indispensable en muchos problemas de economía. De hecho, un típico problema de optimización en economía moderna se refiere a la extremizar el funcional*

$$\int_0^T D(t)U[f(t, k, \dot{k})] dt$$

*sujeto o no a vínculos. Aquí, $D(t)$ es un factor de tasa de descuento, U una función de utilidad, f una función de consumo, y k el capital. Es común encontrar modelos económicos dinámicos con vínculos no holónomos. En [16] se estudia el problema **Closed von Neumann System** utilizando las técnicas estudiadas anteriormente para sistemas vakónomos.*

Capítulo 5

Sistemas Vakónomos de orden superior

En este capítulo se describirán los elementos necesarios para la formulación de la mecánica vakonómica de orden superior. En primer lugar se considerarán sistemas mecánicos cuya dinámica está descrita por una función lagrangiana definida sobre un fibrado tangente de orden superior. Después analizaremos sistemas mecánicos con este tipo de lagrangianos y vínculos de orden superior desde un punto de vista vakonómico. Por último se completarán las demostraciones de la formulación geométrica de este tipo de sistemas presentadas en [7]. Así mismo se generalizará el resultado obtenido para vínculos lineales al caso de vínculos no necesariamente lineales.

5.1. Sistemas Lagrangianos de orden superior

5.1.1. Fibrados tangentes de orden superior

dada Q una variedad de dimension n vamos a definir sus fibrados tangentes de orden superior. Para hacerlo es necesario introducir una relación de equivalencia en el conjunto $C^\infty(\mathbb{R}, Q)$ de curvas suaves de \mathbb{R} a Q . Por definición, dadas dos curvas en Q , $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$, $t \in (-a, a)$, $a \in \mathbb{R}^+$, decimos que tienen un **contacto de orden k** en $q_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ si para cualquier carta local (φ, U) de Q tal que $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in U$ se tiene que

$$\left. \frac{d^s}{dt^s} (\varphi \circ \gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^s}{dt^s} (\varphi \circ \gamma_2(t)) \right|_{t=0} \quad s = 0, \dots, k$$

Denotamos por $[\gamma]_0^{(k)}$ la clase de equivalencia de γ . Se define $T^k Q$ como el conjunto de clases de equivalencias y puede verse que tiene estructura de variedad diferenciable. Además, la aplicación $\tau_Q^k : T^k Q \rightarrow Q$ donde $\tau_Q^k \left([\gamma]_0^{(k)} \right) = \gamma(0)$ define un fibrado tangente llamado **fibrado tangente de orden k** sobre Q .

Se definen las funciones suryectivas: $\tau_Q^{(l,k)} : T^k Q \rightarrow T^l Q$ para $l \leq k$, dadas por

$$\tau_Q^{(l,k)} \left([\gamma]_0^{(k)} \right) = [\gamma]_0^{(l)}.$$

Es claro que $T^{(1)} Q \equiv TQ$, es el fibrado tangente de Q , $T^{(0)} Q \equiv Q$ y $\tau_Q^{(0,k)} = \tau_Q^k$.

Dada $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, construimos las **funciones levantadas** $f^{(l,k)}$ en $T^{(k)}Q$, $0 \leq l \leq k$, de la siguiente manera

$$f^{(l,k)}([\gamma]_0^{(k)}) = \frac{d^l}{dt^l} (f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

Por supuesto, esta definición puede ser aplicada a funciones definidas sobre un abierto de Q .

Dado un sistema de cartas locales (q^i) en un entorno U de Q , se pueden considerar las coordenadas inducidas $(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k)i})$ en $T^{(k)}U = (\tau_Q^k)^{-1}(U)$, donde $q^{(s)i} = (q^i)^{(s,k)}$, $0 \leq s \leq k$. Es usual escribir $q^{(0)i} \equiv q^i$, $q^{(1)i} \equiv \dot{q}^i$ y $q^{(2)i} \equiv \ddot{q}^i$.

Observemos que si $\dim Q = n$ entonces cada $q^{(0)i}$ tiene n componentes con lo cual $\dim(T^k Q) = n(k+1)$. Sea X un campo vectorial en Q ; definimos su **k -levantamiento** por $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ $X^{(k)}$ en $T^{(k)}Q$ como el único campo vectorial que satisface

$$X^{(k)}(f^{(l,k)}) = (X(f))^{(l,k)}, \quad 0 \leq l \leq k.$$

En coordenadas, el k -levantamiento de un campo vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ es

$$X^{(k)} = (X^i)^{(s,k)} \frac{\partial}{\partial q^{(s)i}}$$

Denotamos por $j_k : T^{(k)}Q \rightarrow T(T^{(k-1)}Q)$ la inmersión canónica definida por

$$j_k([\gamma]_0^{(k)}) = [\gamma^{(k-1)}]_0^{(1)}$$

, donde $\gamma^{(k-1)}$ es el levantamiento en $T^{(k-1)}Q$ de la curva γ ; esto es, la curva $\gamma^{(k-1)} : \mathbb{R} \rightarrow T^{(k-1)}Q$ definida por $\gamma^{(k-1)}(t) = [\gamma_t]_0^{(k-1)}$ donde $\gamma_t(s) = \gamma(t+s)$. En coordenadas locales:

$$j_k(q^{(0)i}, q^{(1)i}, q^{(2)i}, \dots, q^{(k)i}) = (q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k-1)i}, q^{(1)i}, q^{(2)i}, \dots, q^{(k)i})$$

5.1.2. El principio de Hamilton y las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior

Consideraremos ahora un sistema mecánico cuya dinámica está descrita por un Lagrangiano que depende de derivadas de orden superior. En este caso se definen Sea $L : T^{(k)}Q \rightarrow \mathbb{R}$ el Lagrangiano de orden k . Dado dos puntos $x, y \in T^{(k-1)}Q$ definimos el espacio formado por las curvas que conectan x e y

$$\mathcal{C}^{2k}(x, y) = \{c : [0, 1] \rightarrow Q \mid c \text{ es } C^{2k}([0, 1], Q), c^{(k-1)}(0) = x, \text{ y } c^{(k-1)}(1) = y\}.$$

que tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión infinita. Dada una curva c en $\mathcal{C}^{2k}(x, y)$, el espacio tangente a $\mathcal{C}^{2k}(x, y)$ en c está dado por

$$T_c \mathcal{C}^{2k}(x, y) = \{X : [0, 1] \rightarrow TQ \mid X \text{ es } C^{2k-1}, X(t) \in T_{c(t)}Q, \\ X^{(k-1)}(0) = 0, \text{ y } X^{(k-1)}(1) = 0\}.$$

Consideremos el **funcional acción** \mathcal{J} de las C^{2k} -curvas en Q por la integración del Lagrangiano L a lo largo de curvas

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : C^{2k}(x, y) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto \int_0^1 L(c^{(k)}(t)) dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

El **Principio de Hamilton** busca curvas $c : [0, 1] \rightarrow Q$ tal que \mathcal{J} sea estacionario; esto es,

$$d\mathcal{J}(c) \cdot (X) = 0, \forall X \in T_c \mathcal{C}^{2k}(x, y).$$

Para analizar esta condición consideremos una familia de curvas $c_\epsilon \in \mathcal{C}^{2k}(x, y)$, con $c_0 = c$,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon) = 0$$

Entonces

$$d\mathcal{J}(c) \cdot (X) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\mathcal{J} \circ c_\epsilon) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon).$$

Tomando $c_0 = c$, $\gamma(\epsilon) = c_\epsilon$ y $x \in T_c \mathcal{C}^{2k}(x, y)$ tenemos que

$$d\mathcal{J}(c) \cdot (X) = 0 \iff \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon)$$

Es decir,

$$d\mathcal{J}(c) \cdot (X) = 0, \forall X \in T_c \mathcal{C}^{2k}(x, y) \iff \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon) = 0$$

Ahora analicemos la derivada $\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon)$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(\int_0^1 L(c_\epsilon^k) dt \right) = \int_0^1 \left. \frac{d}{d\epsilon} L(c_\epsilon^k) \right|_{\epsilon=0} dt = \int_0^1 \sum_{l=0}^k \frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \frac{\partial q^{(l)i}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} dt$$

Si denotamos por $\delta c^i = \left. \frac{d}{d\epsilon} c_\epsilon^i \right|_{\epsilon=0}$ y $\delta^l c^i = \frac{d^{(l)}}{dt^{(l)}} \delta c^i$.

se puede probar que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q^{(0)i}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= c^i(t) = \delta c^i, \\ \left. \frac{\partial q^{(1)i}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{dt} c^i(t) = \delta^1 c^i, \\ &\vdots \\ \left. \frac{\partial q^{(l)i}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \frac{d^l}{dt^l} c^i(t) = \delta^l c^i. \end{aligned}$$

Además, $\delta^{(l)} c^i = \frac{d}{dt} \delta^{(l-1)} c^i$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon) = \int_0^1 \sum_{l=0}^k \frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \frac{\partial q^{(l)i}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} dt = \int_0^1 \sum_{l=0}^k \frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \delta^{(l)} c^i dt.$$

Es decir,

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \mathcal{J}(c_\epsilon) = \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial q^{(0)i}} \delta c^i dt + \int_0^1 \sum_{l=1}^k \frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \delta^{(l)} c^i dt$$

Luego, haciendo integración por partes

$$\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}} \delta c^{(1)i} dt = \frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}} \delta c^{(0)i} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}} \delta c^{(0)i} dt,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}} \delta c^{(2)i} dt = \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}} \delta c^{(1)i} dt - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}} \delta c^{(2)i} \right) \Big|_0^1 + (-1)^2 \int_0^1 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}} \delta c^i dt$$

Haciendo un proceso de inducción sobre l se prueba que para un l fijo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{J}(c_\epsilon(t)) \Big|_{\epsilon=0} &= \int_0^1 \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \right) \cdot \delta c^i dt \\ &+ \left[\sum_{l=0}^{k-1} \left[\sum_{s=0}^{k-l-1} (-1)^l \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l+s+1)i}} \right) \right] \cdot \delta^{(l)} c^i \right]_0^1 \end{aligned}$$

Observemos que el último término del miembro derecho de la igualdad anterior se anula, pues $\delta^{(l)} c^i(0) = \delta^{(l)} c^i(1) = 0$ $0 \leq l \leq k-1$, y $1 \leq i \leq n$.

Observar que el término de borde es la 1-forma de **Poincaré-Cartan** L .

Teorema 5.1.1. *Sea $L : T^{(k)}Q \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano de orden k y sea*

$$\mathcal{J}(c) = \int_0^1 L(c^{(k)}(t)) dt$$

la acción de L definida sobre \mathcal{C}^{2k} .

Entonces, existe un único operador

$$\mathcal{E}L : T^{(2k)}Q \longrightarrow T^*Q$$

tal que para todas las variaciones $\delta c_\epsilon \in T_c \mathcal{C}^{2k}(x, y)$ con sus puntos iniciales y finales fijos, se tiene que

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{J}(c_\epsilon(t)) \Big|_{\epsilon=0} = \int_0^1 \mathcal{E}L(c^{(2k)}(t)) \cdot \delta c(t) dt + [\Theta_L(c^{(2k-1)}(t)) \cdot \delta^{(2k-1)} c(t)]_0^1$$

En coordenadas locales $\mathcal{E}L$ tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}L = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \right).$$

Las Ecuaciones de movimiento del sistema, llamadas **Ecuaciones de Euler-Lagrange de Orden Superior**, se escriben como

$$\sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \right) = 0.$$

Por lo tanto, es posible definir la 2-forma $\Omega_L = -d\Theta_L$. En coordenadas locales, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}L &= \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \right), \\ \Theta_L &= \sum_{l=0}^{k-1} \hat{p}_{(l)i} dq^{(l)i}, \\ \Omega_L &= \sum_{l=0}^{k-1} dq^{(l)i} \wedge d\hat{p}_{(l)i}, \end{aligned}$$

donde las funciones $\hat{p}_{(l)i}$, $0 \leq l \leq k-1$, son los **momentos generalizados de Jacobi-Ostrogradski** definidos por

$$\hat{p}_{(l)i} = \sum_{s=0}^{k-l-1} (-1)^l \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l+s+1)i}} \right)$$

La expresion de la 2-forma se deduce del hecho de que

$$\begin{aligned} \Omega_L = -d\Theta_L &= -d \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial L}{\partial q^{(l-1)i}} dq^{(l-1)i} \right) = - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^k \frac{\partial}{\partial q^{(l-1)j}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l-1)i}} \right) dq^{(l-1)j} \wedge dq^{(l-1)i} = \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^k \frac{\partial^2 L}{\partial q^{(l-1)j} \partial q^{(l-1)i}} dq^{(l-1)j} \wedge dq^{(l-1)i} \end{aligned}$$

y luego observando la forma que tienen los momentos se obtiene la expresion expuesta, la cual es mucho sencilla de manejar en los cálculos.

Es sencillo probar que Ω_L es simpléctica si y sólo si,

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^{(l-1)j} \partial q^{(l-1)i}} \right) \neq 0.$$

Se dice que el Lagrangiano de orden superior L es regular si Ω_L es simpléctica.

En lo que sigue, asumiremos que el Lagrangiano L es regular. Temeos ahora, la restricción \mathcal{J}_L del funcional acción \mathcal{J} en el subespacio \mathcal{C}_L de soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este espacio puede ser identificado con el espacio de condiciones iniciales en $T^{(2k-1)}Q$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Esto es claro, pues cuando tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales ya sabemos que existe una única solución. Además las pedimos en $T^{(2k-1)}Q$ pues las ecuaciones de Euler-Lagrange viven en $T^{2k}Q$.

5.2. Sistemas vakónomos con vínculos de orden superior

Como dijimos antes, en esta sección vamos a considerar sistemas mecánicos con Lagrangiano y vínculos de orden superior desde el punto de vista de la mecánica vakonómica.

Sean los vínculos

$$\Phi = (\phi^{(j)}), \phi : T^{(k)}Q \rightarrow \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, m$$

tal que 0 es un valor regular. Estos vínculos, $\phi^{(j)}$ que son linealmente independientes, definen una subvariedad $M = \Phi^{-1}(0)$ llamada **Subvariedad de Vínculos**.

Consideremos el conjunto (que en lo que sigue asumiremos no vacío):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{2k}(x, y, M) = \{ & c : [0, 1] \rightarrow Q \mid q \text{ es } C^{2k}, c^{(k-1)}(0) = x, \\ & \text{y } c^{(k-1)}(1) = y \text{ y } c^{(k)}(t) \in T^{(k-1)}Q \text{ para todo } t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Definición 5.2.1. Una curva $c \in \mathcal{C}^{2k}(x, y, M)$ será llamada **solución del problema variacional vakonómico de orden superior con vínculos** si $\mathcal{J} \Big|_{\mathcal{C}^{2k}}(x, y, M)$ es estacionario en c .

Por el teorema de los Multiplicadores de Lagrange, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.2.2. (Problema Variacional Vakónomo con Vínculos de Orden Superior)

Sea $c \in \mathcal{C}^{2k}(x, y, M)$, c es una curva crítica del problema variacional vakónomo de orden superior con vínculos si y sólo si c es un punto crítico del funcional

$$\mathcal{J}_M(c) = \int_0^1 L(q^{(k)}(t)) dt - \lambda_\alpha g^\alpha(c)$$

donde $\lambda_\alpha \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})^*$ y $g^\alpha : \mathcal{C}^{2k}(x, y) \rightarrow \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ dada por $g^\alpha(c) = \{t \rightarrow \Phi^\alpha(c^{(k)}(t))\}$.

La condición de estacionamiento puede ser escrita como $\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \mathcal{J}_M(q_\epsilon(t)) = 0$,

para toda variación c_ϵ de c .

Pero nos preguntamos ahora que es $\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \mathcal{J}_M(q_\epsilon(t))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \mathcal{J}_M(q_\epsilon(t)) &= \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_0^1 L(c_\epsilon^k) dt - \lambda_\alpha g^\alpha(c_\epsilon^k) \right) \Big|_{\epsilon=0} = \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} L(c_\epsilon^k) - \lambda_\alpha g^\alpha(c_\epsilon^k) \Big|_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{l=0}^k \frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \frac{\partial q^{(l)i}}{\partial \epsilon} - \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l)i}} \frac{\partial q^{(l)i}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} dt = \int_0^1 \sum_{l=0}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} - \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l)i}} \right) \frac{\partial q^{(l)i}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{l=0}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} - \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l)i}} \right) \delta^{(l)} c^i dt. \end{aligned}$$

Entonces, integrando l veces por partes como antes se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{l=0}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} - \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l)i}} \right) \delta^{(l)} c^i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \right) - \frac{d^l}{dt^l} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l)i}} \right) \cdot \delta c^i dt \\ &+ \left[\sum_{l=0}^{k-1} \left[\sum_{s=0}^{k-l-1} (-1)^l \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l+s+1)i}} - \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l+s+1)i}} \right) \right] \cdot \delta^{(l)} c^i \right]_0^1 \end{aligned}$$

para toda variación c_ϵ de c .

Observación 5.2.3. *Las ecuaciones*

$$\sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(l)i}} \right) = \frac{d^l}{dt^l} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(l)i}} \right) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\phi^{(j)}(q^{(l)i}) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

son llamadas *Ecuaciones de Euler-Lagrange de Orden Superior con Vínculos*

5.3. Su formulación geométrica

Ahora, vamos a desarrollar la caracterización de la mecánica vakónoma de manera similar a la formulación dada por Skinner y Rusk para sistemas de orden uno [27].

Consideremos la suma de Whitney $T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q$, y las proyecciones canónicas

$$pr_1 : T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q \longrightarrow T^*(T^{(k-1)}Q),$$

$$pr_2 : T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q \longrightarrow T^{(k)}Q.$$

Sean la subvariedad $W_0 = pr_2^{-1}(M)$, donde $M \subset T^{(k)}Q$ es la subvariedad de vínculos y también las restricciones a W_0 de las proyecciones canónicas:

$$\pi_1 = pr_1|_{W_0} : W_0 \subset T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q \rightarrow T^*(T^{(k-1)}Q)$$

$$\pi_2 = pr_2|_{W_0} : W_0 \subset T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q \rightarrow T(T^{(k-1)}Q).$$

$T^*(T^{(k-1)}Q)$ es, claramente, el fibrado cotangente con base $T^{(k-1)}Q$ y M es un subfibrado de $T^{(k)}Q \subset T(T^{(k-1)}Q)$. Entonces, M se puede pensar como un fibrado sobre $T^{(k-1)}Q$ y se puede considerar el producto fibrado $T^*(T^{(k-1)}Q) \times M$ con base $T^{(k-1)}Q$.

Definimos en W_0 la 2-forma presimpléctica

$$\Omega_{W_0} = \pi_1^*(\omega_{T^{(k-1)}Q}),$$

donde $\omega_{T^{(k-1)}Q}$ es la forma simpléctica canónica en $T^*(T^{(k-1)}Q)$

Definimos también la función $H_{W_0} : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_{W_0}(\alpha, \beta) = \langle \pi_1(\alpha, \beta), \pi_2(\alpha, \beta) \rangle - \pi_2^*L|_M$$

donde, $\pi_1(\alpha, \beta) \in T^*(T^{(k-1)}Q)$, $\pi_2(\alpha, \beta) \in M \subset T(T^{(k-1)}Q)$, $\pi_2^*L|_M = (L \circ \pi_2)|_M$

y con $(\alpha, \beta) \in T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T(T^{(k-1)}Q)$,

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno entre vectores y covectores en $T^{(k-1)}Q$ (observar que los elementos de $T^{(k)}Q$ son considerados vectores en $T(T^{(k-1)}Q)$ usando la j_k).

Ahora vamos a ver cómo la dinámica del problema variacional vakonómico de orden superior con vínculos es determinado por las soluciones de la ecuación

$$i_X \Omega_{W_0} = dH_{W_0}. \quad (5.2)$$

Consideramos $\Omega = pr_1^*(\omega_{T^{(k-1)}Q})$ y $H : T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T(T^{(k-1)}Q) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $H = \langle pr_1, pr_2 \rangle - pr_2^*L = \langle pr_1, pr_2 \rangle - L \circ \pi_2$. Entonces veamos que la ecuación (5.2) es equivalente a:

$$\begin{cases} i_X \Omega = dH + \lambda_\alpha d\Phi^\alpha \\ X \in TW_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Tomamos coordenadas $(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k)i}, p_i^{(0)}, \dots, p_i^{(k-1)})$ en $T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q$ entonces

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{r=0}^{k-1} dq^{(r)i} \wedge dp_i^{(r)} \\ H &= \sum_{r=0}^{k-1} q^{(r+1)i} p_i^{(r)} - L(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k)i}) \end{aligned}$$

Consideramos un campo en $T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T(T^{(k-1)}Q)$ que se escribe como

$$X = \sum_{r=0}^k X^{(r)i} \frac{\partial}{\partial q^{(r)i}} + \sum_{r=0}^{k-1} Y_i^{(r)} \frac{\partial}{\partial p_i^{(r)}}.$$

Ahora $i_X \Omega = \Omega(X, \cdot) = dH(\cdot) + \lambda_\alpha d\Phi^\alpha(\cdot)$. Dado $v \in T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q$, que se escribe como

$$v = \sum_{r=0}^k v^{(r)i} \frac{\partial}{\partial q^{(r)i}} + \sum_{r=0}^{k-1} \tilde{v}_i^{(r)} \frac{\partial}{\partial p_i^{(r)}},$$

se tiene

$$\begin{aligned} \Omega(X, v) &= \sum_{r=0}^{k-1} dq^{(r)i} \wedge dp_i^{(r)}(X, v) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \left[dq^{(r)i}(X) dp_i^{(r)}(v) - dq^{(r)i}(v) dp_i^{(r)}(X) \right] = \sum_{r=0}^{k-1} \left[X^{(r)i} \tilde{v}_i^{(r)} - v^{(r)i} Y_i^{(r)} \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$dH(v) = \sum_{r=0}^k \frac{\partial H}{\partial q^{(r)i} v^{(r)i}} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(r)}} \tilde{v}_i^{(r)}$$

$$y \quad \lambda_\alpha d\Phi^\alpha(v) = \sum_{r=0}^k \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(r)i}} v^{(r)i}.$$

Entonces, de la ecuación (5.3) se obtiene que

$$\sum_{r=0}^{k-1} \left[X^{(r)i} \tilde{v}_i^{(r)} - v^{(r)i} Y_i^{(r)} \right] = \sum_{r=0}^k \frac{\partial H}{\partial q^{(r)i}} v^{(r)i} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(r)}} \tilde{v}_i^{(r)} + \sum_{r=0}^k \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(r)i}} v^{(r)i}. \quad (5.4)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^{(0)}} = q^{(r+1)0},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^{(1)}} = q^{(r+1)1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^{(r)}} = q^{(r+1)i}; \quad r = 0, \dots, k-1$$

Y también se obtiene que

$$\frac{\partial H}{\partial q^{(0)i}} = -\frac{\partial L}{\partial q^{(0)i}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^{(1)i}} = p_i^{(0)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(1)i}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^{(2)i}} = p_i^{(1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(2)i}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^{(r)i}} = p_i^{(r-1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(r)i}}; \quad r = 1, \dots, k-1$$

Luego, como (5.4) es para todo vector v en $T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q$, igualando las coordenadas de v se llega a que

$$v^{(r)i} : -Y_i^{(r)} = \frac{\partial H}{\partial q^{(r)i}} - \frac{\partial L}{\partial q^{(r)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(r)i}} \quad r = 0, \dots, k-1.$$

Entonces,

$$v^{(0)i} : -Y_i^{(0)} = -\frac{\partial L}{\partial q^{(0)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(0)i}}$$

$$\vdots$$

(5.5)

$$-Y_i^{(r)} = p_i^{(r-1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(r)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(r)i}};$$

$$\tilde{v}^{(0)i} : X_i^{(r)} = \frac{\partial H}{\partial p_i^{(r)}} = q^{(r+1)i}; r = 0, \dots, k-1$$

y además $v^{(k)i}$: no aparece en el lado izquierdo de (5.4), entonces sus coeficientes son cero e igualando con el coeficiente correspondiente en lado derecho nos queda que

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q^{(k)i}} - \frac{\partial L}{\partial q^{(k)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)i}} = p_i^{(k-1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(k)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)i}}.$$

Consideramos también los vínculos

$$\varphi_i^1 = p_i^{(k-1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(k)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)i}} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

pues las soluciones vienen determinadas por esos vínculos.

Observación 5.3.1. *Los vínculos $\varphi_i^1 = 0$ para una nueva subvariedad donde la ecuación tenga solución.*

Entonces, tenemos los vínculos

$$\Phi^\alpha = 0$$

$$\varphi_i^1 = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Luego, las ecuaciones de movimiento de una curva integral solución de X son

$$\dot{q}^{(r)i} = q^{(r+1)i}, \quad r = 0, \dots, k-1,$$

$$-\dot{p}_i^{(0)} = -\frac{\partial L}{\partial q^{(0)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(0)i}}$$

$$\vdots$$

$$-\dot{p}_i^{(r)} = p_i^{(r-1)} - \frac{\partial L}{\partial q^{(r)i}} + \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(r)i}}, \quad r = 1, \dots, k-1$$

$$(\dot{q}^{(r)i} = X^{(r)i}, -Y_i^r = -\dot{p}_i^{(r)})$$
(5.6)

Derivando los vínculos con respecto al tiempo, y substituyendo en (5.7), encontramos las ecuaciones de movimiento del problema variacional de orden superior con vínculos analizado en la sección anterior, i.e.

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(r)i}} - \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(r)i}} \right) = 0 \quad (5.7)$$

Los nuevos vínculos $\varphi_i^1 = 0$ determinan el subconjunto W_1 de W_0 donde (5.3) tiene solución.

Como en el caso de vínculos de primer orden, la primer subvariedad de vínculos para el sistema Hamiltoniano presimpléctico $(W_0, \Omega_{W_0}, H_{W_0})$. La solución de la ecuación (5.2) en W_1 puede no ser tangente a W_1 pues la solución para (5.2) en W_0 es un campo vectorial

que por definición es tangente a W_0 , pero no necesariamente va a ser tangente a W_1 . En tal caso, tenemos que restringir W_1 a la subvariedad W_2 donde los vectores tangentes están en TW_1 , pero acá vuelve a pasar lo mismo y procediendo así, obtenemos una sucesión de subvariedades (asumiendo que los subconjuntos generados por el algoritmo son subvariedades).

$$\dots \hookrightarrow W_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_2 \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow W_0 .$$

Algebraicamente, estas subvariedades de vínculos pueden escribirse como:

$$W_i = \{x \in T^*(T^{(k-1)}Q) \times_{T^{(k-1)}Q} M \mid dH_{W_0}(x)(v) = 0, \forall v \in T_x W_{i-1}^\perp\}, \quad i \geq 1, \quad (5.8)$$

donde $T_x W_{i-1}^\perp = \{v \in T_x W_0 \mid \Omega_{W_0}(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x W_{i-1}\}$. En el caso en que el algoritmo sea estable, i.e., si existe un natural $k \in \mathcal{N}$ tal que $W_{k+1} = W_k$ y $\dim W_k \neq 0$, entonces tendremos una solución bien definida X en $W_f = W_k$ tal que

$$(i_X \Omega_{W_0} = dH_{W_0})|_{W_f} .$$

Definimos ahora, $\bar{L} = L - \lambda_\alpha \Phi^\alpha$.¹

En lo que sigue asumiremos que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q^{(k)i} \partial q^{(k)j}} & -\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial q^{(k)i}} \\ \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)j}} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (5.9)$$

Si la matriz $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q^{(k)i} \partial q^{(k)j}} \end{pmatrix}$ es no singular, podemos expresar de nuevo la última condición del determinante de la forma $\det(\mathcal{C} \cdot W^{-1} \cdot \mathcal{C}^T)$ donde \mathcal{C} es una matriz de $m \times n$ con entradas $\mathcal{C}_{i\alpha} = \left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)i}}\right)$. En este caso, la dimensión de W_1 es par, $\dim W_1 = 2kn$.

Observemos que, aplicando el teorema de la función implícita a la ecuación de vínculos (5.6), podemos expresar localmente los multiplicadores de Lagrange λ_α y las velocidades de orden superior $q^{(k)i}$ en términos de las coordenadas $(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k-1)i}, p_i^{(0)}, \dots, p_i^{(k-1)})$, es decir,

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \lambda_\alpha(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k-1)i}, p_i^0, \dots, p_i^{(k-1)}) \\ q^{(k)i} &= q^{(k)i}(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k-1)i}, p_i^0, \dots, p_i^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos considerar también que $(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, -q^{(k-1)i}, p_i^{(0)}, \dots, p_i^{(k-1)})$ son coordenadas en W_1 . En este caso, la restricción Ω_{W_1} de la forma presimpléctica Ω_{W_0} es

$$\Omega_{W_1} = \sum_{r=0}^{k-1} dq^{(r)i} \wedge dp_i^{(r)}$$

De los comentarios anteriores es fácil deducir que:

¹ Observemos que con este nuevo Lagrangiano, las ecuaciones (5.8) se convierten en las ecuaciones de Euler-Lagrange de orden superior típicas.

Proposición 5.3.2. *Para toda elección de coordenadas $(q^{(0)i}, q^{(1)i}, \dots, q^{(k)i}, p_i^{(0)}, \dots, p_i^{(k-1)})$ en $T^*(T^{(k-1)}Q) \oplus T^{(k)}Q$ y para todo punto en W_1 ,*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q^{(k)i} \partial q^{(k)j}} & -\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial q^{(k)i}} \\ \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)j}} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (5.10)$$

si y sólo si (W_1, Ω_{W_1}) es una variedad simpléctica.

Demostración (W_1, Ω_{W_1}) es una variedad simpléctica si y sólo si, $T_x W_1 \cap (T_x W_1)^\perp = 0$, $\forall x \in W_1$, pues (W_1, Ω_{W_1}) es una variedad simpléctica si y sólo si $W_1 = T_x W_1 \oplus (T_x W_1)^\perp = 0$, entonces, como es suma directa, $T_x W_1 \cap (T_x W_1)^\perp = 0$. Esta condición se satisface, si y sólo si, la matriz $\left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)j}} \right)_{m \times n}$ es regular, pues si (W_1, Ω_{W_1}) es simpléctica entonces $W_1 = T_x W_1 \oplus (T_x W_1)^\perp$, y por lo tanto $\Omega_{W_1} |_{(T_x W_1)^\perp}$ es no degenerada. Luego

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q^{(k)i} \partial q^{(k)j}} & -\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial q^{(k)i}} \\ \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q^{(k)j}} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (5.11)$$

$\forall x \in W_1$. ■

Observación 5.3.3. *Solamente hay simplecticidad en un caso particular (bajo cierta condición de regularidad), en el resto de los casos solamente se obtiene un sistema presimpléctico. En W_f se garantiza la existencia de una solución (suponiendo que todas los pasos dan subvariedad), pero no tiene por que ser única al ser presimpléctico. Con lo cual, nuestro anterior resultado no puede ser generalizado a (W_f, Ω_f) de manera natural, sino que, dependerá de casa caso particular en el que estemos trabajando.*

Capítulo 6

Elementos de la Teoría de Control Óptimo

Como se comentó en la introducción, el objetivo de la **Teoría de Control** es determinar el comportamiento de un sistema dinámico por medio de acciones externas de forma que se cumplan ciertas condiciones prefijadas. Recordemos también que en este trabajo, por simplicidad, nos vamos a centrar en el caso en el que los dos estados extremos, el estado inicial y el final, son fijos, aunque otras situaciones más generales tienen un tratamiento similar.

Nos centraremos en Control Óptimo, es decir, además de lo dicho anteriormente queremos que se verifique una condición adicional, que consiste habitualmente en minimizar (o maximizar) el funcional de objetivo, es decir, querríamos encontrar trayectorias $\gamma(t) = (q(t), u(t))$ con extremos fijos en el espacio de estados, $q(0) = q_0$, $q(T) = q_T$ sobre un cierto espacio de trayectorias admisibles.

Estas trayectorias se dirán **optimales**.

Para resolver este problema y otros asociados naturalmente a él, tales como la estabilidad de las soluciones obtenidas, se han desarrollado un amplio abanico de ideas, técnicas y resultados matemáticos. Además de herramientas analíticas y numéricas, que han gozado de un gran predicamento, cada vez resulta más importante el punto de vista geométrico en la Teoría de Control. La introducción de un punto de vista geométrico en la Teoría de Control fue iniciada seguramente por el propio L. Pontryagin y sus seguidores y definitivamente por R. Brockett en el estudio de problemas de control en esferas y grupos de Lie. Así, la Teoría de Control se puede formular en términos geométricos y obtener resultados intrínsecos.

La solución del problema de control óptimo enunciado antes fue obtenida de manera muy general por L. Pontryagin y sus colaboradores y está dada por el conocido como principio del máximo de Pontryagin, el cual trataremos en esta sección

Tal como se comentó también en la introducción, el diseño de leyes de control para sistemas infractuados es un área de una intensa labor investigadora. En esta trabajo se presentan contribuciones para la resolución de este tipo de problemas.

Definición 6.0.4. *Un sistema definido en una variedad Q de dimensión n (o de n grados de libertad) se dice **infractuados** si las variables de control son $r < n$. En este caso, las ecuaciones de Lagrange toman la forma*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = u^i, i = 1, \dots, r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, i = r + 1, \dots, n.$$

Cabe destacar que no todos los sistemas de mecánicos de control infractuados son de este tipo, pero en este trabajo, por simplicidad, sólo trabajaremos con este tipo de sistemas que incluyen numerosos ejemplos de gran interés en las aplicaciones.

Se podría hacer una versión más general trabajando con bases móviles, modificándose en consecuencia las ecuaciones del movimiento (aparecerían en las ecuaciones las funciones de estructura). Esto se hará en futuros trabajos también para sistemas reducidos. Pero en este trabajo nos limitaremos con trabajar con las bases adaptadas a un entorno coordinado.

6.1. Control Óptimo

Dado un conjunto de vínculos no holónomos, existen dos problemas asociados interesantes. Uno es el no variacional (el principio de Lagrange - d'Alambert,) también muy apropiado para estudiar la dinámica de sistemas mecánicos, y el otro es el variacional, apropiado para resolver problemas de control óptimo. En este capítulo nos concentraremos en los problemas de control óptimo.

Recordemos que los problemas variacionales no holónomos son equivalentes al clásico problema de minimizar la acción del Lagrangiano sobre el conjunto de curvas que satisfacen la condición de extremos fijos.

Más precisamente, sea Q una variedad configuración, y TQ su fibrado tangente con coordenadas (q^i, \dot{q}^i) . Sea $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\Phi : TQ \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ una función suave dada,

Definición 6.1.1. *El Problema Lagrangiano está dado por*

$$\min_{q(\cdot)} \int_0^T L(q^i, \dot{q}^i) dt$$

sujeito a la condición de extremos fijos, $q(0) = 0, q(T) = q_T$, y sujeto a los vínculos

$$\Phi(q^i, \dot{q}^i) = 0$$

6.1.1. Control Óptimo y Principio del Máximo

En esta sección vamos a discutir el principio de máximo, que da condiciones necesarias para la existencia de la solución de los problemas de control óptimo. En la literatura, los problemas de control óptimo incluyen problemas tales como el de tiempo mínimo de Bernoulli, que son presentados en forma distinta al principio variacional clásico, asociados de forma más cercana a la mecánica.

La diferencia básica entre los problemas de control óptimo y los problemas variacionales con vínculos son la condición de extremos en problemas de control óptimo, estas son, típicamente, expresadas usando la notación Hamiltoniana y el Principio del Máximo de Pontryagin, en lugar de la formulación Lagrangiana.

Formulación General para el Problema de Control Óptimo

Supongamos que tenemos un problema clásico de control óptimo,

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^T g(q, u) dt, \quad (6.1)$$

sujeto a las siguientes condiciones:

- una ecuación diferencial $\dot{q} = f(q, u)$, el espacio de estados contiene a $q \in Q$ y los controles están en $\Omega \in \mathbb{R}^k$;
- $q(0) = q_0, q(T) = q_T$

donde f y $g \geq 0$ son funciones suaves, Ω es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^k , y Q es una variedad diferencial de dimensión n , llamada **espacio de estados** del sistema. La función g es llamada comunmente **función costo o objetivo**.

Principio del Máximo de Pontryagin

Consideremos el Hamiltoniano parametrizado en T^*Q dado por

$$\widehat{H}(q, p, u) = \langle p, f(q, u) \rangle - p_0 g(q, u),$$

donde $p_0 \geq 0$ es una constante positiva fija y $p \in T^*Q$. Observemos que p_0 es un múltiplo del funcional costo y \widehat{H} es lineal en p . Denotaremos por $t \mapsto u^*(t)$ la curva que satisface la siguiente relación a lo largo de trayectorias $t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*Q$:

$$H(q(t), p(t), u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} \widehat{H}(q(t), p(t), u). \quad (6.2)$$

Entonces, si u^* define implícitamente una función de q y p por la ecuación (6.2) podemos definir H^* por

$$H^*(q(t), p(t), t) = H(q(t), p(t), u^*(t)).$$

La función H^* define un campo Hamiltoniano X_{H^*} en T^*Q con respecto a la estructura simpléctica canónica en T^*Q .

El principio del máximo de Pontryagin da condiciones necesarias para los extremos del problema de control óptimo general: Una **trayectoria extremal** $t \mapsto q(t)$ para el problema de control óptimo es una proyección en Q de la trayectoria del flujo del campo vectorial X_{H^*} que satisface $q(0) = q_0, q(T) = q_T$ y que la aplicación $t \mapsto (p(t), p_0) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Las trayectorias extremales se llaman **normales** cuando $p_0 \neq 0$. Cuando $p_0 = 0$ decimos que es **anormal**.

Además u^* es determinada de manera única bajo la condición

$$0 = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(q(t), p(t), u^*(t)), t \in [0, T].$$

Es decir, u^* maximiza la función \widehat{H} .

Por el teorema la función implícita, sabemos que existe una función k tal que $u^*(t) = k(q(t), p(t))$. Estableceremos que

$$H(q, p) = \widehat{H}(q, p, k(q, p)),$$

entonces a lo largo de curvas extremales,

$$H(q(t), p(t)) = H^*(q(t), p(t), t).$$

6.2. Sistemas variacionales noholónomos y control óptimo

Los problemas variacionales noholónomos (i.e; problemas variacionales con vínculos) son equivalentes a los problemas de control óptimo bajo ciertas condiciones de regularidad. Estos fueron estudiados por Bloch y Crouch [1994], empleando resultados clásicos (Rund [1966], Bliss [1930]).

Consideremos el Lagrangiano modificado,

$$\Lambda(q, \dot{q}, \lambda) = L(q, \dot{q}) + \lambda \Phi(q, \dot{q}) \quad (6.3)$$

Sus ecuaciones de Euler Lagrange estan dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Lambda(q, \dot{q}, \lambda) - \frac{\partial}{\partial q} \Lambda(q, \dot{q}, \lambda) = 0 \quad (6.4)$$

$$\Phi(q, \dot{q}) = 0$$

Escribiremos estas ecuaciones en forma Hamiltoniana y probaremos que son equivalentes a las ecuaciones de movimiento dadas por el principio del máximo para el problema de control óptimo.

Sea

$$p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Lambda(q, \dot{q}, \lambda) \quad (6.5)$$

y consideremos esta ecuación junto con los vínculos

$$\Phi(q, \dot{q}) = 0 \quad (6.6)$$

Entonces, buscamos resolver (6.4) y (6.5) para (\dot{q}, λ) .

Asumimos que en un abierto $U \subset Q$, la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}^2} \Lambda(q, \dot{q}, \lambda) & \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Phi(q, \dot{q})^T \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Phi(q, \dot{q}) & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo. Entonces, por el teorema de la función implícita podemos despejar \dot{q} y λ en función de q y p

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \phi(q, p) \\ \lambda &= \psi(q, p) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Se puede probar entonces la equivalencia de la ecuación (6.4) con su versión Hamiltoniana.

Teorema 6.2.1. *Bajo la transformación (6.7), el sistema de Euler-Lagrange (6.4) es transformado en el sistema Hamiltoniano*

$$\dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} H(q, p) \tag{6.8}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q} H(q, p),$$

donde

$$H(q, p) = p \cdot \phi(q, p) - L(q, \phi(q, p)). \tag{6.9}$$

Demostración: El hecho de que $\Phi(q, \phi(q, p)) = 0$ implica que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \phi}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \phi}{\partial p} = 0.$$

Entonces, usando (6.5), obtenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \phi + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial p} = \dot{q} + \lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = \dot{q}.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \right) = -\frac{\partial \Lambda}{\partial q} = -\dot{p}.$$

■

Definición 6.2.2. Sean $q \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ el **Problema de Control Óptimo** viene dado por

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^T g(q, u) dt, \tag{6.10}$$

sujeto a

$$\dot{q} = f(q, u),$$

con condiciones de borde $q(0) = 0$, $q(T) = q_T$

Con esta definición tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.2.3. *El problema Lagrangiano (6.4) y el problema de Control Óptimo definido arriba generan las mismas trayectorias extremales, si y sólo si:*

1. $\Phi(q, \dot{q}) = 0$ si y sólo si existe u tal que $\dot{q} = f(q, u)$.
2. $L(q, f(q, u)) = g(q, u)$.

3. El control óptimo u^* está determinado de manera única por la condición

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(q, p, u^*) = 0$$

dónde

$$\frac{\partial^2 \widehat{H}}{\partial u^2}(q, p, u^*)$$

tiene rango máximo y

$$\widehat{H}(q, p, u) = \langle p, f(q, u) \rangle - g(q, u) \quad (6.11)$$

es el Hamiltoniano dado por el principio del máximo.

Demostración:

Por (3), podemos usar la ecuación

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(q, p, u^*) = p \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(q, u^*) - \frac{\partial g}{\partial u}(q, u^*) = 0$$

para deducir que existe una función r tal que $u^* = r(q, p)$.

Las trayectorias extremales, ahora son generadas por el Hamiltoniano

$$\overline{H}(q, p) = \widehat{H}(q, p, r(q, p)) = p \cdot f(q, r(q, p)) - g(q, r(q, p)). \quad (6.12)$$

Entonces, se obtiene lo querido, y

$$\overline{H}(q, p) = H(q, p).$$

$$f(q, r(q, p)) = \phi(q, p).$$

$$g(q, r(q, p)) = L(q, \phi(q, p)).$$

■

Capítulo 7

Aproximación Geométrica del Problema de Control Óptimo

En esta sección vamos a considerar una clase especial de sistemas mecánicos de control llamados infractuados que comprenden muchos ejemplos de interés. Lo haremos mediante una sencilla generalización de lo tratado en el capítulo 5. También trataremos el ejemplo del péndulo invertido.

7.1. Sistemas de Control Infractuados

Estos sistemas estarán modelados sobre una variedad $Q = Q_1 \times Q_2$ producto de dos variedades diferenciables. Por lo tanto, $TQ = TQ_1 \times TQ_2$ donde $T_{(q_1, q_2)}(Q_1 \times Q_2)$ se identifica naturalmente con $T_{q_1}Q_1 \times T_{q_2}Q_2$. Consideraremos coordenadas $(q^A) = (q^a, q^\alpha)$, $1 \leq A \leq n$ en Q donde (q^a) con $1 \leq a \leq r$ y (q^α) con $r + 1 \leq \alpha \leq n = \dim Q$, son coordenadas en Q_1 y Q_2 respectivamente.

Dado un Lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, supongamos que las fuerzas externas de control son aplicadas solamente a las primeras coordenadas (q^a) de Q_1 quedando libres las coordenadas (q^α) de Q_2 .

Las ecuaciones de movimiento, es decir, las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas de control están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} &= u^a, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde $A = 1, \dots, n$, $a = 1, \dots, r$ y $\alpha = r + 1, \dots, n$.

Observación 7.1.1. Como hemos comentado, no todos los sistemas de control mecánicos infractuados son de este tipo, pero en este trabajo sólo trabajaremos con este tipo de sistemas que tienen gran interés en las aplicaciones.

Se podría hacer una versión más general trabajando con bases móviles, modificándose en consecuencia las ecuaciones del movimiento (aparecerían en las ecuaciones las funciones de estructura). Esto se hará en futuros trabajos también para sistemas reducidos. Pero en este

trabajo nos limitaremos con trabajar con con las bases adaptadas a un entorno coordinado.

El problema de control óptimo que se va a estudiar consiste en encontrar una trayectoria $(q^a(t), q^\alpha(t), u^a(t))$ de las variables de estado y los controles con datos iniciales y finales $(q^a(t_0), q^\alpha(t_0), \dot{q}^a(t_0), \dot{q}^\alpha(t_0))$, $(q^a(t_f), q^\alpha(t_f), \dot{q}^a(t_f), \dot{q}^\alpha(t_f))$ respectivamente, minimizando el funcional costo

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} C(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, u^a) dt$$

Como las variables de control están dadas explícitamente, según vimos en el teorema (6.2.3) podemos convertir el problema anterior de control en el siguiente problema variacional con vínculos de orden dos que consiste en extremizar el funcional

$$\tilde{\mathcal{J}} = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{L}(q^a(t), q^\alpha(t), \dot{q}^a(t), \dot{q}^\alpha(t), \ddot{q}^a(t), \ddot{q}^\alpha(t)) dt$$

sujeto a las ligaduras de segundo orden dadas por

$$\Phi^\alpha(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, \ddot{q}^a, \ddot{q}^\alpha) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0,$$

donde $\tilde{L} : T^2Q \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por:

$$\tilde{L}(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, \ddot{q}^a, \ddot{q}^\alpha) = C \left(q^a, q^\alpha, \dot{q}^a, \dot{q}^\alpha, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right).$$

Ahora vamos a tratar este problema en el marco propuesto en el capítulo 5. Consideremos la subvariedad $M \subset T^{(2)}Q$ que viene dada por la anulación de las funciones Φ^α y busquemos coordenadas en M . Observemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \\ & \quad \Downarrow \\ & \frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^a + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^a + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\beta - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \\ & \quad \Downarrow \\ & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\beta = F_\alpha(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a) \end{aligned}$$

siendo

$$F_\alpha(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a) = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^a - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^a - \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\beta.$$

Denotamos por $(W_{\alpha\beta})$ a la matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right)$ que suponemos que es regular, y a su inversa como $(W^{\alpha\beta})$. Entonces,

$$\ddot{q}^\alpha = W^{\alpha\beta} F_\beta(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a) = G^\alpha(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a)$$

Esto significa que podemos escoger coordenadas $(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a)$ en M . De esta manera, la inclusion canónica, $i_M : M \hookrightarrow TTQ$ se puede escribir como

$$i_M : \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & TTQ \\ (q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a) & \mapsto & (q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a, G(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a)) \end{array}$$

Definimos tambien, \tilde{L}_M dado por $\tilde{L}_M = \tilde{L} |_M : M \rightarrow \mathbb{R}$. Con la subvariedad M y el lagrangiano restringido \tilde{L}_M . Luego ya tenemos los elementos necesarios para la formulación vakónoma de nuestro problema.

A continuación describiremos geoméricamente el problema basándose en el formalismo de Skinner y Rusk [27].

$$\begin{array}{ccccc} & & W_0 = M \times_{TQ} T^*(TQ) & & \\ & \swarrow pr_1 & \downarrow \pi_{W_0, TM} & \searrow pr_2 & \\ M & & & & T^*TQ \\ & \searrow (\tau_{TQ})|_M & & \swarrow \pi_{T^*Q} & \\ & & TQ & & \end{array}$$

Figura 7.1: Formalismo de Skinner y Rusk

Sea la variedad W_0 dada por el producto fibrado sobre TQ , $W_0 = M \times_{TQ} T^*(TQ)$, y considerando las coordenadas $(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a, p_A^0, p_A^1)$, definimos la 2-forma en W_0 , $\Omega = pr_2^*(\omega_{TQ})$ y $H(v_x, \alpha_x) = \langle \alpha_x, i_M(v_x) \rangle - \tilde{L}_M(v_x)$ donde $x \in TM$, $v_x \in M_x = ((\tau_{TQ})|_M)^{-1}(x)$ y $\alpha_x \in T_x^*TQ$. En coordenadas,

$$\begin{aligned} \Omega &= dq^A \wedge dp_A^0 + d\dot{q}^A \wedge dp_A^1, \\ \tilde{H} &= p_A^0 \dot{q}^A + p_a^1 \ddot{q}^a + p_\alpha^1 G^\alpha(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a) - \tilde{L}_M(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a). \end{aligned}$$

La dinámica del problema variacional con vinculos está determinada por las soluciones de la ecuación

$$i_X \Omega = d\tilde{H} \tag{7.2}$$

Obsérvese que Ω es una forma presimpléctica en W_0 cuyo núcleo está dado por

$$\ker \Omega = \text{span} \left\langle \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^a} \right\rangle$$

Por tanto, se debe implementar un algoritmo de ligaduras tipo Gotay-Nester-Hinds. Los vínculos primarios serán

$$d\tilde{H} \left(\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^a} \right) = 0.$$

Es decir,

$$\varphi_a = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \ddot{q}^a} = p_a^1 + p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} - \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a} = 0,$$

o equivalentemente,

$$p_a^1 = -p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a}$$

Entonces, debido a la presencia de estos nuevos vínculos $\varphi_a = 0$, debemos restringirnos a una nueva subvariedad W_1 de dimensión $4n$ con coordenadas $(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a, p_A^0, p_\alpha^1)$.

Sea $(q^A(t), \dot{q}^A(t), \ddot{q}^a(t), p_A^0(t), p_\alpha^1(t))$ una curva solución de la ecuación (7.2). Entonces, esta curva satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} = G^\alpha(q^A, \frac{dq^A}{dt}, \frac{d^2 q^A}{dt^2}) \quad (7.3)$$

$$\frac{dp_A^0}{dt} = -p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial q^A} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial q^A} \quad (7.4)$$

$$\frac{dp_A^1}{dt} = -p_A^0 - p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}^A} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \dot{q}^A} \quad (7.5)$$

$$p_a^1 = -p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a} \quad (7.6)$$

De las ecuaciones (7.4) y (7.5) se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a} - p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} \right) = -p_A^0 - p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}^A} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \dot{q}^A}$$

Derivando con respecto al tiempo la igualdad anterior y utilizando (7.6) llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a} - p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \dot{q}^A} - p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}^A} \right) + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial q^A} - p_\alpha^1 \frac{\partial G^\alpha}{\partial q^A} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{dp_\alpha^1}{dt} = -p_\alpha^0 - p_\beta^1 \frac{\partial G^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (7.8)$$

Consideremos la inclusión $i_{W_1} : W_1 \hookrightarrow W_0$ y la forma restringida $\Omega_{W_1} = i_{W_1}^* \Omega$.

Proposición 7.1.2. (W_1, Ω_{W_1}) es simpléctica si y sólo si para cualquier elección de coordenadas $(q^A, \dot{q}^A, \ddot{q}^a, p_A^0, p_\alpha^1)$ en W_0

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} - p_\alpha^1 \frac{\partial^2 G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} \right)_{(n-r) \times (n-r)} \neq 0 \text{ en } W_1. \quad (7.9)$$

Demostración

Recordemos que Ω_{W_1} es simpléctica si y sólo si $T_x W_1 \cap (T_x W_1)^\perp = 0 \quad \forall x \in W_1$, donde

$$(T_x W_1)^\perp = \{v \in T_x(T^*Q \times_Q \mathcal{M}) / \Omega_{W_0}(x)(v, w) = 0, \text{ para todo } w \in T_x W_1\}.$$

Supongamos que (W_1, Ω_{W_1}) es simpléctica y que

$$\lambda^a \mathcal{R}_{ab}(x) = 0 \text{ para algún } \lambda^a \in \mathbb{R} \text{ y } x \in W_1.$$

Dado que

$$\lambda^b \mathcal{R}_{ab}(x) = \lambda^b d\varphi_a(x) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x \right) = 0.$$

Por lo tanto, $\lambda^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x \in T_x W_1$ pero también en $T_x W_1^\perp$. Esto implica que $\lambda_b = 0$ para todo b y que la matriz (\mathcal{R}_{ab}) es regular.

Ahora, supongamos que la matriz (\mathcal{R}_{ab}) es regular. Dado que

$$d\varphi_a(x) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x \right) = \mathcal{R}_{ab}(x)$$

se tiene que, $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x \notin T_x W_1$ y, como consecuencia,

$$T_x W_1 \oplus \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x \right\} = T_x W_0.$$

Ahora, sea $Z \in T_x W_1 \cap (T_x W_1)^\perp$ con $x \in W_1$. Se tiene que,

$$0 = i_Z \Omega_{W_0}(x) \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \Big|_x \right), \text{ para todo } a \text{ y } i_Z \Omega_{W_0}(x)(\bar{Z}) = 0, \text{ para todo } \bar{Z} \in T_x W_1.$$

Entonces, $Z \in \ker \Omega_{W_0}(x)$. Esto implica que

$$Z = \lambda_b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x$$

Dado que $Z \in T_x W_1$ tenemos que

$$0 = d\varphi_a(x)(Z) = d\varphi_a(x) \left(\lambda_b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \Big|_x \right) = \lambda_b \mathcal{R}_{ab}$$

y, por lo tanto, $\lambda_b = 0$, para todo b , y $Z = 0$. ■

En el caso en el que la matriz (7.9) sea regular entonces las ecuaciones (7.7) y (7.8) se podrán escribir como un sistema explícito del siguiente tipo

$$\frac{d^4 q^a}{dt^4} = F^a(q^A, \frac{dq^A}{dt}, \frac{d^2 q^a}{dt^2}, \frac{d^3 q^a}{dt^3}) \quad (7.10)$$

$$\frac{d^2 q^\alpha}{dt^2} = G(q^A, \frac{dq^A}{dt}, \frac{d^2 q^a}{dt^2}) \quad (7.11)$$

$$\frac{dp_\alpha^1}{dt} = -p_\alpha^0 - p_\beta^1 \frac{\partial G^\beta}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (7.12)$$

$$(7.13)$$

Observación 7.1.3. Con la solución de este sistema de ecuaciones y reconsiderando el problema de control óptimo dado se pueden determinar los controles.

Observación 7.1.4. *A continuación vamos a analizar una caracterización alternativa de la condición (7.9). Para ello, observemos que utilizando la regla de la cadena*

$$\frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^a} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^\alpha} \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}_M}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^\beta} \frac{\partial G^\beta}{\partial \ddot{q}^b} + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^\alpha \partial \ddot{q}^\beta} \frac{\partial G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} \frac{\partial G^\beta}{\partial \ddot{q}^b} + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^\alpha} \frac{\partial^2 G^\alpha}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b}.$$

Sea $W_{AB} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^A \partial \ddot{q}^B} \right)$ y además sabemos que $\Phi^\alpha = \ddot{q}^\alpha - G^\alpha$.

Entonces escribimos (7.9) como

$$W_{ab} - W_{a\beta} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \ddot{q}^b} - W_{\alpha b} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \ddot{q}^b} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^\alpha} \frac{\partial^2 \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} + p_A^1 \frac{\partial^2 \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b}.$$

Sea $\mu_\alpha = p_A^1 - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^\alpha}$ y considero el lagrangiano extendido $\bar{L} = \tilde{L} + \mu_\alpha \Phi^\alpha$

Entonces, la matriz $(\bar{W}_{AB}) = \left(\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \ddot{q}^A \partial \ddot{q}^B} \right)$ es igual a

$$\bar{W}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{W}_{ab} & W_{a\beta} \\ W_{\alpha b} & W_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

donde $\bar{W}_{ab} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b} + \mu_\alpha \frac{\partial^2 \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^a \partial \ddot{q}^b}$.

Luego reescribimos los elementos de la matriz (7.9) cuyos elementos son:

$$\left(\bar{W}_{ab} - \bar{W}_{a\beta} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \ddot{q}^b} - \bar{W}_{\alpha b} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} + \bar{W}_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^a} \frac{\partial \Phi^\beta}{\partial \ddot{q}^b} \right) \quad (7.15)$$

Entonces vemos que pedir que la matriz (7.15) sea regular, es equivalente a pedir que la matriz de elementos (7.14) lo sea.

Finalmente es fácil probar, utilizando álgebra matricial, que la regularidad de (7.14) es equivalente a la regularidad de la matriz

$$\begin{pmatrix} \bar{W}_{AB} & \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial \ddot{q}^A} \\ \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \ddot{q}^B} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{W}_{ab} & W_{a\beta} & -\frac{\partial G^\gamma}{\partial \ddot{q}^a} \\ W_{\alpha b} & W_{\alpha\beta} & I \\ -\frac{\partial G^\delta}{\partial \ddot{q}^b} & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, las soluciones de (7.2) en W_1 pueden no ser tangentes a W_1 . En tal caso, tenemos que restringir W_1 a la subvariedad W_2 donde estas soluciones son tangentes a W_1 . Siguiendo con este procedimiento, obtenemos una secuencia de subvariedades (suponiendo que estos conjuntos lo sean):

$$\dots \hookrightarrow W_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_2 \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow W_0 = M \times_{TQ} T^*TQ.$$

Algebraicamente, estas subvariedades de vínculos pueden ser descritas como

$$W_i = \{x \in W_0 / d\tilde{H}(x)(v) = 0, \forall v \in T_x W_{i-1}^\perp\}, \quad i \geq 1,$$

donde

$$T_x W_{i-1}^\perp = \{v \in T_x W_0 / \Omega(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x W_{i-1}\}.$$

Si este algoritmo se estabiliza, es decir, si existe un entero positivo $k \in \mathbb{N}$ tal que $W_{k+1} = W_k$ y $\dim W_k \neq 0$, entonces obtenemos la variedad final de vínculos $W_f = W_k$ en la que existe al menos un campo de vectores X tal que

$$\left(i_X \Omega = d\tilde{H} \right)_{|W_f} .$$

7.2. Ejemplo: El Pendulo Invertido

El sistema que vamos a considerar consiste en un péndulo rígido o varilla de masa m que se mueve en un plano vertical y solo puede moverse a lo largo de una recta horizontal contenida en dicho plano. En la práctica se logra considerando el péndulo a un carro, como se muestra en la figura de abajo.

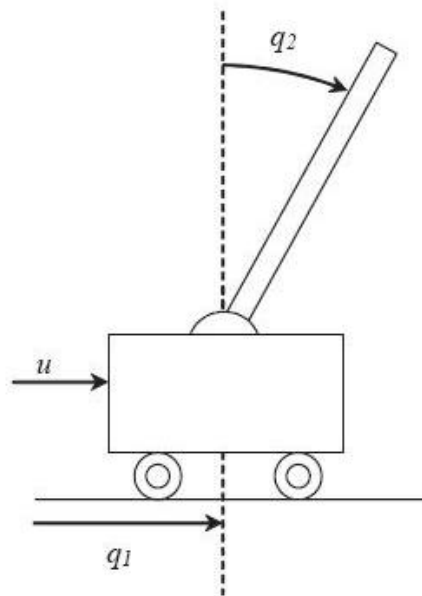


Figura 7.2: Péndulo invertido

El espacio de configuración del sistema es $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Las coordenadas generalizadas son la posición del móvil x y el ángulo θ ya que pensamos a $\mathbb{S}^1 \sim \mathbb{R}/2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Llamaremos a las coordenadas del bloque (x, y) y (x^*, y^*) a las de la pelota del péndulo, m a la masa de la pelota, m_c a la del bloque, R a la longitud de la varilla del péndulo, h la altura del bloque y θ al ángulo de rotación del péndulo respecto al eje vertical medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Un problema clásico de control óptimo es, aplicando una fuerza horizontal sobre el bloque¹. La pelotita lo que va a provocar es caerse para alguno de los dos costados, quizás exista alguna velocidad del móvil tal que la pelotita se puede quedar quieta en alguna posición, pero ese punto va a ser muy inestable, así que no lo tendremos en cuenta en nuestro estudio.

¹Esto puede provocar que el péndulo vaya hacia su posición vertical a partir de cualquier condición inicial, lo cual implicaría convertir el punto $\theta = 0$ en un punto de equilibrio estable. Este es un problema interesante de estudiar en la teoría de sistemas no-lineales

Buscamos ahora el lagrangiano del sistema, Escribimos las coordenadas del bloque y de la pelotita en términos de las coordenadas generalizadas

$$x^* = x + R \operatorname{sen} \theta$$

$$y^* = R \operatorname{cos} \theta$$

Para escribir el Lagrangiano del sistema necesitamos hallar la energía cinética $T(\dot{q})$ y la energía potencial $U(q)$, ya que $L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q)$ donde, $q = (x, \theta)$ y $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{\theta})$

Primero buscamos la energía portencial $U(q)$. Esta es mg por la altura al centro de la pelota desde el eje horizontal; es decir, $U(q) = mg(y^* + h) = mg(R \operatorname{cos} \theta + h)$

Ahora buscamos la energía cinética $T(\dot{q})$: $T(\dot{q}) = T_{\text{bloque}}(\dot{q}) + T_{\text{pelota}}(\dot{q})$.

La expresión general para $T(\dot{q})$ es $T(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$. Entonces tenemos que

$$T_{\text{bloque}}(\dot{q}) = \frac{1}{2}m_c\dot{x}^2$$

$$T_{\text{pelota}}(\dot{q}) = \frac{1}{2}m(v^*)^2$$

como $v^* = ((x^*)', (y^*)')$, $T_{\text{pelota}}(\dot{q}) = \frac{1}{2}m((\dot{x}^*)^2 + (\dot{y}^*)^2)$, pero

$$\dot{x}^* = \dot{x} + R \operatorname{cos} \theta \dot{\theta},$$

$$\dot{y}^* = -R \operatorname{sen} \theta \dot{\theta};$$

entonces $(v^*)^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}R \operatorname{cos} \theta \dot{\theta} + R^2\dot{\theta}^2$. Con lo cual $T_{\text{pelota}}(\dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R \operatorname{cos} \theta \dot{\theta} + R^2\dot{\theta}^2)$.

Luego, $T(\dot{q}) = \frac{1}{2}m_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R \operatorname{cos} \theta \dot{\theta} + R^2\dot{\theta}^2)$.

Entonces el Lagrangiano del sistema está dado por

$$L(q, \dot{q}) = L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R \operatorname{cos} \theta \dot{\theta} + R^2\dot{\theta}^2) - mg(R \operatorname{cos} \theta + h).$$

Ahora buscaremos las ecuaciones de movimiento que son de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= u, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0; \end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_c\dot{x} + m\dot{x} + mR \operatorname{cos} \theta \dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m_c\ddot{x} + m\ddot{x} - mR \operatorname{sen} \theta \dot{\theta}^2 + mR \operatorname{cos} \theta \ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = (m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mR \cos \theta \ddot{\theta}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}R \cos \theta + mR^2\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mR(\ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta \dot{\theta}) + mR^2\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mR\dot{x} \sin \theta + mgR \sin \theta,$$

con lo cual,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR\ddot{x} \cos \theta + mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del sistema están dadas por

$$(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mR \cos \theta \ddot{\theta} = u$$

$$mR\ddot{x} \cos \theta + mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta = 0$$

Ahora debemos encontrar una trayectoria $(x(t), \theta(t), u(t))$ de las variables de estado y los controles con datos iniciales y finales $(x(0), \theta(0), \dot{x}(0), \dot{\theta}(0))$, $(x(T), \theta(T), \dot{x}(T), \dot{\theta}(T))$ respectivamente, y minimizar el funcional costo

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt.$$

El problema previo de control óptimo es equivalente al problema variacional con vínculos dado por

$$\tilde{\mathcal{J}} = \int_0^T \tilde{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, \ddot{\theta})$$

sujeto a los vínculos de segundo orden

$$\Phi(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, \ddot{\theta}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR\ddot{x} \cos \theta + mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta,$$

dónde

$$\tilde{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, \ddot{\theta}) = \mathcal{C} \left(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left[(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mR \cos \theta \ddot{\theta} \right]^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\
\Downarrow \\
mR\ddot{x} \cos \theta + mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta &= 0 \\
\Downarrow \\
mR^2\ddot{\theta} &= mgR \sin \theta - mRc\ddot{\theta} \\
\Downarrow \\
\ddot{\theta} &= \frac{g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta}{R}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la subvariedad M dada por los vínculos

$$M = \{mR\ddot{x} \cos \theta + mR^2\ddot{\theta} - mgR \sin \theta = 0\}$$

Sea $W_0 = M \times T^*(T(\mathbb{R} \times \mathbf{S}^1))$ con coordenadas $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, p_x^0, p_\theta^0, p_x^1, p_\theta^1)$.

Luego, consideramos la restricción de \tilde{L} a M :

$$\begin{aligned}
\tilde{L}|_M &= \frac{1}{2} \left[(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mR \cos \theta \left(\frac{g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta}{R} \right) \right]^2 = \\
&\frac{1}{2} \left[(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \sin \theta - m\ddot{x} \cos^2 \theta \right]^2
\end{aligned}$$

Notaremos

$$G^\theta = \frac{g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta}{R}.$$

Ahora busquemos, Ω , \tilde{H} y los nuevos vínculos φ_x . Sabemos que estos son de la forma:

$$\begin{aligned}
\Omega &= dx \wedge dp_x^0 + d\theta \wedge dp_\theta^0 + \dot{x} \wedge dp_x^1 + d\dot{\theta} \wedge dp_\theta^1, \\
\tilde{H} &= p_x^0 \dot{x} + p_\theta^0 \dot{\theta} + p_x^1 \ddot{x} + p_\theta^1 \left[\frac{g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta}{R} \right] - \frac{1}{2} \left[(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \sin \theta - m\ddot{x} \cos^2 \theta \right]^2 \\
\varphi_x &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \ddot{x}} = p_x^1 + p_\theta^1 \frac{\partial G^\theta}{\partial \ddot{x}} - \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{x}} = 0,
\end{aligned}$$

es decir,

$$p_x^1 = -p_\theta^1 \frac{\partial G^\theta}{\partial \ddot{x}} + \frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{x}}.$$

Pero,

$$\frac{\partial G^\theta}{\partial \ddot{x}} = \frac{-\cos \theta}{R},$$

$$\frac{\partial \tilde{L}_M}{\partial \ddot{x}} = \left[(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \sin \theta - m\ddot{x} \cos^2 \theta \right] \left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta \right].$$

Entonces,

$$p_x^1 = -p_\theta^1 \frac{-\cos \theta}{R} + \left[(m_c + m)\ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \sin \theta - m\ddot{x} \cos^2 \theta \right] \left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta \right].$$

Sea ahora W_1 la subvariedad que viene dada por $\{\varphi_x = 0\}$ con coordenadas $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, p_x^0, p_\theta^0, p_\theta^1)$. Sea, $(x(t), \theta(t), \dot{x}(t), \dot{\theta}(t), \ddot{x}(t), p_x^0(t), p_\theta^0(t), p_\theta^1(t))$ una curva solución de $i_X \Omega = d\tilde{H}$, entonces, de esta ecuación obtenemos que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \sin \theta(t) - \ddot{x}(t) \cos \theta(t)}{R};$$

$$\frac{dp_x^0}{dt} = 0;$$

$$\frac{dp_\theta^0}{dt} = -p_\theta^1(t) \frac{g \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) + \ddot{x}(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t)}{R} +$$

$$\left[(m_c + m) \ddot{x}(t) - mR \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + mg \cos \theta(t) \sin \theta(t) - m \ddot{x}(t) \cos^2 \theta(t) \right]$$

$$\left[-mR \cos \theta(t) \dot{\theta}^3(t) - mg \sin^2 \theta(t) \dot{\theta}(t) + mg \cos^2 \theta(t) \dot{\theta}(t) + 2m \ddot{x}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \right]$$

$$\frac{dp_x^1}{dt} = -p_x^0(t);$$

$$\frac{dp_\theta^1}{dt} = -p_\theta^0(t) -$$

$$\left[(m_c + m) \ddot{x}(t) - mR \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + mg \cos \theta(t) \sin \theta(t) - m \ddot{x}(t) \cos^2 \theta(t) \right] \left[-2mR \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) \right] =$$

$$\left[-2mg \sin^2 \theta(t) \dot{\theta}(t) + 2m \ddot{x}(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) \right];$$

$$p_x^1(t) = -p_\theta^1(t) \frac{-\cos \theta(t)}{R} +$$

$$\left[(m_c + m) \ddot{x}(t) - mR \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + mg \cos \theta(t) \sin \theta(t) - m \ddot{x} \cos^2 \theta(t) \right] \left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta(t) \right].$$

Luego, por la proposición (7.1.2), (W_1, Ω) es simpléctica si y sólo si

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}_M}{\partial \ddot{x} \partial \ddot{x}} - p_\theta^1 \frac{\partial^2 G^\theta}{\partial \ddot{x} \partial \ddot{x}} \neq 0.$$

Entonces, dado que

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}_M}{\partial \ddot{x} \partial \ddot{x}} = \left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta \right] \left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta \right] = \left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 G^\theta}{\partial \ddot{x} \partial \ddot{x}} = 0;$$

se tiene que, (W_1, Ω) es simpléctica si y sólo si

$$\left[(m_c + m) - m \cos^2 \theta \right]^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$(m_c + m) - m \cos^2 \theta \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos^2\theta \neq 1 + \frac{m_c}{m};$$

es obvio que esta condición siempre se cumple, con lo cual, el algoritmo se estabiliza en la primer subvariedad de vínculos, W_1 .

Luego, siempre podremos escribir al sistema como

$$\begin{aligned} \frac{d^4x}{dt} &= F(x(t), \theta(t), \dot{x}(t), \dot{\theta}(t), \ddot{x}(t), \ddot{\theta}(t)) \\ \frac{d^2\theta}{dt} &= \frac{g \sin(t) - \ddot{x}(t) \cos \theta(t)}{R} \\ \frac{dp_\alpha^1}{dt} &= -p_\alpha^0(t) - p_\beta^1(t) \frac{\partial G^\beta}{\partial \dot{\theta}} + \\ &\left[(m_c + m)\ddot{x}(t) - mR \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + mg \cos \theta(t) \sin \theta(t) - m\ddot{x}(t) \cos^2 \theta(t) \right] \\ &\left[-2mg \sin^2 \theta(t) + 2m\ddot{x}(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \right]. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales podemos encontrar de manera explícita el control que hará que la fuerza ejercida al carro sea la mínima posible.

Ademas, podemos concluir, que existe un único campo vectorial X que satisface

$$i_X \Omega_{W_1} = d\tilde{H}_{W_1}$$

con lo cual, podemos definir un flujo

$$\mathfrak{G}_t : W_1 \rightarrow W_1$$

tal que preserva la forma simpléctica, es decir,

$$\mathfrak{G}_t^* \Omega_{W_1} = \Omega_{W_1}$$

Veremos en la siguiente sección, que con métodos numéricos es más simple responder a estos problemas, y encontrar un flujo que preserve la simplecticidad.

Capítulo 8

Versión Discreta del Problema de Control Óptimo

8.1. Mecánica lagrangiana discreta

Generalidades

Sea Q la variedad configuración, pero ahora definimos el **espacio de estados discreto** $Q \times Q$. Este contiene la misma cantidad de información que (es localmente isomorfo a) TQ . El **Lagrangiano discreto** es la función

$$L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para relacionar la mecánica continua y la discreta hace falta introducir un **paso en el tiempo** $h \in \mathbb{R}$ y tomar L_d que dependa del paso en el tiempo. Vamos a Considerar entonces,

$$L_d : Q \times Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

En este trabajo no usaremos el paso en el tiempo, solo nos remitiremos a la primer definición de lagrangiano discreto, pero cabe destacar la existencia de este ya que para pasar del caso continuo al discreto y ver como se relacionan entre si necesitamos de la existencia de este.

Construimos la suceción creciente de tiempos $\{t_k = kh | k = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}$ y definimos el **camino discreto** como :

$$\mathcal{C}_d(Q) = \mathcal{C}_d(\{t_k\}_{k=0}^N, Q) = \{\{q_d : \{t_{kk=0}^N\} \rightarrow Q\}.$$

Vamos a identificar la trayectoria discreta $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$ con la imágen $q_d = \{q_k\}_{k=0}^N$, dónde $q_k = q_d(t_k)$. Definimos la **acción discreta** $\mathcal{J}_d : \mathcal{C}_d(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{J}_d(q_d) = \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}).$$

Como el espacio discreto de caminos \mathcal{C}_d es isomorfo a $Q \times \dots \times Q$ ($(N+1)$ copias) esto es una variedad, con la estructura de la variedad producto. La acción discreta \mathcal{J}_d claramente hereda la suavidad del lagrangiano discreto L_d .

El **espacio tangente** $T_{q_d}\mathcal{C}_d(Q)$ de $\mathcal{C}_d(Q)$ en q_d es el conjunto de funciones $v_{q_d} : \{t_k\}_{k=0}^N \rightarrow TQ$ tal que $\pi_Q \circ v_{q_d} = q_d$, que vamos a denotar $v_{q_d} = \{(q_k, v_k)\}_{k=0}^N$.

El objeto discreto correspondiente a $T(TQ)$ es, como es de esperarse, $(Q \times Q) \times (Q \times Q)$. Definimos el **operados proyección** π y el **operador traslación** σ como

$$\pi : ((q_0, q_1), (q'_0, q'_1)) \rightarrow (q_0, q_1)$$

$$\sigma : ((q_0, q_1), (q'_0, q'_1)) \rightarrow (q'_0, q'_1).$$

La **subvariedad discreta de segundo orden** de $(Q \times Q) \times (Q \times Q)$ está definida como

$$\ddot{Q}_d = \{w_d \in (Q \times Q) \times (Q \times Q) \mid \pi_1 \circ \sigma(w_d) = \pi_2 \circ \pi(w_d)\},$$

que contiene toda la información que tiene (es localmente isomorfo a) \ddot{Q} .

Concretamente, la subvariedad discreta de segundo orden es el conjunto de pares de la forma $((q_0, q_1), (q_1, q_2))$.

Teorema 8.1.1. *Dado el lagrangiano discreto L_d en \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ entonces existe una única función de clase \mathcal{C}^{k-1} $D_{DEL}L_d : \ddot{Q}_d \rightarrow T^*Q$ y dos únicas 1-formas de clase \mathcal{C}^{k-1} , $\Theta_{L_d}^+$ y $\Theta_{L_d}^-$ en $Q \times Q$, tal que para toda variación $\delta q_d \in T_{q_d}\mathcal{C}_d(Q)$, se tiene*

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}_q(q_d) \cdot \delta q_d &= \sum_{k=0}^{N-1} D_{DEL}L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})) \cdot \delta q_k \\ &+ \Theta_{L_d}^+(q_{N-1}, q_N)(\delta q_{N-1}, \delta q_N) - \Theta_{L_d}^-(q_0, q_1) \cdot (\delta q_0, \delta q_1). \end{aligned}$$

La función $D_{DEL}L_d$ es llamada, **operador de Euler-Lagrange discreto** y en coordenadas tiene la forma

$$D_{DEL}L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})) = D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}).$$

Las 1-formas $\Theta_{L_d}^+$ y $\Theta_{L_d}^-$ son llamadas **1-formas discretas lagrangianas** y en coordenadas tienen la forma

$$\Theta_{L_d}^+(q_0, q_1) = D_2L_d(q_0, q_1)dq_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1^i} dq_1^i,$$

$$\Theta_{L_d}^-(q_0, q_1) = -D_1L_d(q_0, q_1)dq_0 = \frac{\partial L}{\partial q_0^i} dq_0^i.$$

Demostración

Calculamos las derivadas de la acción discreta

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}_d(q_d)\delta q_d &= \sum_{k=0}^{N-1} D_1L_d(q_k, q_{k+1})\delta q_k + D_2L_d(q_k, q_{k+1})\delta q_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} D_1L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2L_d(q_{k-1}, q_k)\delta q_k + D_1L_d(q_0, q_1)\delta q_0 + D_2L_d(q_{N-1}, q_N)\delta q_N \end{aligned}$$

usando integración discreta por partes (reordenando la suma).

Luego identificando los términos con el operador de Euler-Lagrange y las 1-formas discretas lagrangianas, se tiene el resultado requerido. ■

A diferencia del caso continuo, en el caso discreto tenemos dos 1-formas que surgen de los términos de borde. Observar que $dL_d = \Theta_{L_d}^+ - \Theta_{L_d}^-$ y usando que $d^2 = 0$ obtenemos que

$$d\Theta_{L_d}^+ = d\Theta_{L_d}^-.$$

Esto se refleja a continuación en el hecho de que sólo hay una única 2-forma discreta, que es la misma que en el caso continuo y muy importante para resolver problemas de simplecticidad.

Operador evolución discreto y flujos

Un **operador de evolución** X juega el rol de un campo vectorial en el caso continuo y se define como cualquier función $X : Q \times Q \rightarrow (Q \times Q) \times (Q \times Q)$ que satisface $\pi \circ X = id$. Se define también el **flujo discreto** F , donde $F : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$, dado por $F = \sigma \circ X$. En coordenadas, si $X : (q_0, q_1) \rightarrow (q_0, q_1, q_1, q_2)$ entonces, $F : (q_0, q_1) \rightarrow (q_1, q_2)$. Ahora consideramos el caso particular de un sistema lagrangiano discreto.

El **operador de evolución lagrangiano discreto** X_{L_d} es un operador de evolución discreto de segundo orden satisfaciendo

$$D_{DEL}L_d \circ X_{L_d} = 0$$

y el **flujo lagrangiano discreto**

$$F_{L_d} : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$$

se define como

$$F_{L_d} = \sigma \circ X_{L_d}.$$

Un camino discreto $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$ se dice **solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange** si

$$D_{DEL}L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})) \cdot \delta q_k = 0$$

para toda variación $\delta q_d \in T_{q_d}\mathcal{C}_d(Q)$. Esto significa que los puntos q_k satisfagan que

$$F_{L_d}(q_{k-1}, q_k) = (q_k, q_{k+1})$$

o equivalentemente, que se satisfagan las **ecuaciones de Euler-Lagrange discretas**

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}) = 0 \forall k = 1, \dots, N-1.$$

Simplecticidad

Definimos el **espacio de soluciones discretas** $\mathcal{C}_{L_d}(Q) \subset \mathcal{C}_d(Q)$ como el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas. Dado que un elemento $q_d \in \mathcal{C}_{L_d}(Q)$ es formado por iteraciones de la función F_{L_d} , esta está determinada de manera única por las condiciones iniciales $(q_0, q_1) \in Q \times Q$. Entonces podemos identificar a $\mathcal{C}_{L_d}(Q)$ con el espacio de condiciones iniciales $Q \times Q$

Definimos también la **acción restringida** $\widehat{\mathcal{J}}_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ como $\widehat{\mathcal{J}}_d(q_0, q_1) = \mathcal{J}_d(q_d)$; $q_d \in \mathcal{C}_{L_d}(Q)$ y $(q_d(t_0), q_d(t_1)) = (q_0, q_1)$.

Vemos que a partir del teorema anterior, se puede deducir que

$$\begin{aligned} d\widehat{\mathcal{J}}_d(v_d) \cdot w_{v_d} &= \Theta_{L_d}^+(F_{L_d}^{N-1}(v_d))(F_{L_d}^{N-1})_*(w_{v_d}) - \Theta_L^-(v_d)(w_{v_d}) \\ &= ((F_{L_d}^{N-1})^*(\Theta_L^+))(v_d)(w_{v_d}) - \Theta_L^-(v_d)(w_{v_d}) \end{aligned}$$

para todo $w_{v_d} \in T_{v_d}(Q \times Q)$ y $v_d = (q_0, q_1) \in Q \times Q$.

Derivando nuevamente en la expresión del teorema y usando y usando que $d^2\widehat{\mathcal{J}}_d = 0$ obtenemos que

$$(F_{L_d}^{N-1})^*(\Omega_{L_d}) = \Omega_{L_d}$$

dónde $\Omega_{L_d} = d\Theta_{L_d}^+ = d\Theta_{L_d}^-$ es la **forma simpléctica lagrangiana discreta**, cuya expresión en coordenadas es

$$\Omega_{L_d}(q_0, q_1) = \frac{\partial^2 L_d}{\partial q_0^i \partial q_1^j} dq_0^i \wedge dq_1^j.$$

Este argumento es válido también si tomamos cualquier subintervalo de $0, \dots, N$, por lo que la afirmación es verdadera para cualquier número de pasos de F_{L_d} . Para un solo paso, tenemos que

$$(F_{L_d})^*(\Omega_{L_d}) = \Omega_{L_d}.$$

Dada una función $f : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$ decimos que es **simpléctica discreta** si

$$f^*\Omega_{L_d} = \Omega_{L_d}$$

. Los cálculos anteriores muestran que F_{L_d} es simpléctica discreta.

8.2. Mecánica variacional discreta con vínculos

Consideremos el Lagrangiano discreto $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, los vínculos holónomos $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ y la correspondiente subvariedad de vínculos $N = \phi^{-1}(0) \subset Q$. Como en el caso continuo, el hecho de que $N \times N$ es una subvariedad de $Q \times Q$, podemos restringir el Lagrangiano discreto, $L_d^{N \times N} = L_d|_{N \times N}$ obteniendo así un sistema Lagrangiano discreto en $N \times N$.

Para relacionar la dinámica de $L_d^{N \times N}$ con la de L_d , es útil introducir la notación de los caminos discretos como se definió de manera analoga en el caso continuo. Dados los tiempos $\{0, h, 2h, \dots, Nh = T\}$ y los puntos iniciales y finales $q_0, q_T \in N$ respectivamente; consideramos el conjunto $\mathcal{C}_d(Q) = \mathcal{C}_d(\{0, h, 2h, \dots, Nh\}, Q, q_0, q_T)$ de trayectorias $q_d : \{0, h, 2h, \dots, Nh\} \rightarrow Q$ satisfaciendo que $q_d(0) = q_0, q_d(T) = q_d(Nh) = q_T$; sea también, $\mathcal{C}_d(N)$ el correspondiente conjunto de caminos discretos en N .

Similarmente, notamos $\mathcal{C}_d(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_d(\{h, 2h, \dots, (N-1)h\}, \mathbb{R}^d)$ el conjunto de funciones $\lambda_d : \{h, 2h, \dots, (N-1)h\} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sin condiciones de frontera. Veremos a continuación por qué no incluimos los puntos de frontera 0 y Nh . En general $\mathcal{C}_d(P)$ es el conjunto de funciones de $\{h, 2h, \dots, Nh\}$ en la variedad diferenciable P y podemos identificar tales funciones con sus imágenes escribiendo $q_d = \{q_k\}_{k=0}^N$ y similarmente para $\lambda_d = \{\lambda_k\}_{k=0}^N$.

Principio variacional discreto con vínculos

Teorema 8.2.1. *Dado el sistema Lagrangiano discreto $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ con unclos holnomos $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$, la subvariedad $N = \phi^{-1}(0)$ y el Lagrangiano discreto restringido $L_d^{N \times N} = L_d|_{N \times N}$, son equivalentes:*

1. $q_d = \{q_k\}_{k=0}^N \in \mathcal{C}_d(N)$ extremiza $\mathcal{J}_d^N = \mathcal{J}_d|_{N \times N}$, y por lo tanto resuelve es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas para L_d^N
2. $q_d = \{q_k\}_{k=0}^N \in \mathcal{C}_d(N)$ y $\lambda_d = \{\lambda_k\}_{k=1}^{N-1} \in \mathcal{C}_d(\mathbb{R}^d)$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas con vínculos

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) = \langle \lambda_k, \nabla \phi(q_k) \rangle,$$

$$\phi(q_k) = 0;$$

3. $(q_d, \lambda_d) = \{q_k, \lambda_k\}_{k=0}^N \in \mathcal{C}(Q \times \mathbb{R}^d)$ extremiza $\tilde{\mathcal{J}}_d(q_d, \lambda_d) = \mathcal{J}_d(q_d) - \langle \lambda_d, \Phi_d(q_d) \rangle_{l^2}$ y por lo tanto es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas para cualquiera de los lagrangianos extendidos $\tilde{L}_d^+, \tilde{L}_d^- : (Q \times \mathbb{R}^d) \times (Q \times \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$\tilde{L}_d^+(q_k, \lambda_k, q_{k+1}, \lambda_{k+1}) = L_d(q_k, q_{k+1}) - \langle \lambda_{k+1}, \phi(q_{k+1}) \rangle,$$

$$\tilde{L}_d^-(q_k, \lambda_k, q_{k+1}, \lambda_{k+1}) = L_d(q_k, q_{k+1}) - \langle \lambda_k, \phi(q_k) \rangle.$$

Demostración

Para la prueba se aplica directamente la demostración ya realizada para el caso continuo. Es una consecuencia directa de este.

Para mas detalles de esta, se recomienda al lector ver [26] ■

8.2.1. Aproximación geométrica de la mecánica vakónoma discreta

En esta sección, inspirada en nuestro último enfoque geométrico de la mecánica vakónoma, desarrollaremos un integrador numérico que conserva, como se discutirá más tarde, naturalmente, ciertas estructuras asociados a este sistema.

Consideramos la variedad configuración Q de dimension n , el Lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ y los vínculos $\phi^\alpha : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq \alpha \leq m$. Sean $\mathcal{L}_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_d^\alpha : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ una discrteización del Lagrangiano y los vínculos, respectivamente.

Por lo tanto, podemos considerar el siguiente problema de optimización con vínculos que es llamado **calculo variacional con vínculos discretos o mecánica vakónoma discreta**:

$$\begin{cases} \min \mathbf{S}(q_0, q_1, \dots, q_N) & \text{con } q_0 \text{ y } q_N \text{ fijos} \\ \text{sujeto a } \phi_d^\alpha(q_k, q_{k+1}) = 0, & 1 \leq \alpha \leq m, 0 \leq k \leq N-1 \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $\mathbf{S}(q_0, q_1, \dots, q_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{L}_d(q_k, q_{k+1})$ es el **funcional acción discreto**. Observar que el sistema está sujeto a $N.m$ funciones de ligaduras.

Considerando (8.1) como un típico problema de optimización con vínculos, se define el Lagrangiano discreto extendido como, $\tilde{\mathcal{L}}_d(x, y, \lambda) = \mathcal{L}_d(x, y) + \lambda_\alpha \phi_d^\alpha(x, y)$ en $Q \times Q \times \mathbb{R}^m$ y el problema variacional discreto sin restricciones:

$$\begin{cases} \min \tilde{\mathbf{S}}(q_0, q_1, \dots, q_N, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{N-1}) & \text{con } q_0 \text{ y } q_N \text{ fijos} \\ q_k \in Q, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}^m & k = 0, \dots, N-1, \quad q_N \in Q, \end{cases} \quad (8.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}(q_0, q_1, \dots, q_N, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{N-1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathcal{L}}_d(q_k, q_{k+1}, \lambda^k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{L}_d(q_k, q_{k+1}) + \lambda_\alpha^k \phi_d^\alpha(q_k, q_{k+1})] \end{aligned}$$

donde λ^k es un m -vector con componentes $\lambda_\alpha^k, 1 \leq \alpha \leq m$. Los puntos criticos de la ecuación (8.2) serán los que anulen $\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial q_k}, k = 1, \dots, N-1$ (q_0 y q_N son fijos) y la ecuación de vínculos

$\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \lambda^k} = 0, k = 0, \dots, N-1$. Entonces, las **ecuaciones vakonómicas discretas** son:

$$\begin{cases} D_1 \mathcal{L}_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 \mathcal{L}_d(q_{k-1}, q_k) \\ \quad + \lambda_\alpha^k D_1 \phi_d^\alpha(q_k, q_{k+1}) + \lambda_\alpha^{k-1} D_2 \phi_d^\alpha(q_{k-1}, q_k) = 0, & 1 \leq k \leq N-1 \\ \phi_d^\alpha(q_k, q_{k+1}) = 0, & 1 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{cases} \quad (8.3)$$

En lo que sigue, usaremos la notación $D_{12}F$ para denotar a la matriz de $n \times n$ $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^A \partial y^B} \right)$ para toda función de clase $\mathcal{C}^2 F : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Si la matriz,

$$\begin{pmatrix} D_{12} \mathcal{L}_d + \lambda_\alpha D_{12} \phi_d^\alpha & \frac{\partial \phi_d^\alpha}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial \phi_d^\alpha}{\partial y} \right)^T & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n+m) \times (n+m)}(\mathbb{R})$$

es invertible, entonces localmente existe

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_d \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathcal{M}_d \times \mathbb{R}^m \\ (x, y, \lambda) &\longmapsto (y, v, \Lambda) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}_d = \{(q_0, q_1) \in Q \times Q \mid \phi^\alpha(q_0, q_1) = 0\}$. Así, a lo largo de las soluciones $(q_0, q_1, \dots, q_N, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{N-1})$ de las ecuaciones (8.3) obtenemos que:

$$\Phi(q_{k-1}, q_k, \lambda^{k-1}) = (q_k, q_{k+1}, \lambda^k)$$

que representa el flujo discreto de nuestro problema vakonómico.

Observación 8.2.2. *En el caso de que los vínculos sean holónomos (i.e. $\phi^\alpha : Q \rightarrow \mathbb{R}$), podemos elegir (entre muchas otras) la discretización*

$$\begin{aligned} \phi_d^\alpha : Q \times Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q_0, q_1) &\longmapsto \phi^\alpha(q_0) \end{aligned}$$

y luego nuestro procedimiento conduce a las mismas ecuaciones como las propuestas en (8.3) solo para el caso holónimo.

8.3. Mecánica discreta de orden superior

Dado que ya sabemos que una discretización de TQ es $Q \times Q$ es razonable que elegir como discretización de $T^{(k)}Q$ al producto cartesiano Q^{k+1} .

El **Lagrangiano discreto de orden superior** es

$$\begin{aligned} L_d : \quad Q^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q_0, q_1, \dots, q_k) &\longmapsto L_d(q_0, \dots, q_k) \end{aligned}$$

Observación 8.3.1. Por simplicidad, usaremos la siguiente notación: $q_{(i,j)}$, $(i, j) \in (\mathcal{N}^*)^2$, $i < j$, que indica la $(j - i) + 1$ -upla

$$q_{(i,j)} = (q_i, q_{i+1}, \dots, q_{j-1}, q_j)$$

Dadas las condiciones iniciales y finales $(q_{(0,k-1)}, q_{(N-k+1,N)}) \in Q^{2k}$ con $N > 2k$, se define el conjunto de caminos admisibles con condiciones de borde $q_{(0,k-1)}$ y $q_{(N-k+1,N)}$:

$$\mathcal{C}_{(q_{(0,k-1)}, q_{(N-k+1,N)})}^N = \{\bar{q}_{(0,N)} \mid \bar{q}_{(0,k-1)} = q_{(0,k-1)}, \bar{q}_{(N-k+1,N)} = q_{(N-k+1,N)}\}$$

sobre los caminos discretos admisibles, $q_{(0,N)}$ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}L_d : \quad \mathcal{C}_{(q_{(0,k-1)}, q_{(N-k+1,N)})}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q_{(0,N)} &\longmapsto \sum_{i=0}^{N-k} L_d(q_{(i,i+k)}) \end{aligned}$$

Procediendo como en el caso continuo, se obtiene el principio de Hamilton discreto de orden superior

Definición 8.3.2. Principio de Hamilton discreto. *Un camino admisible*

$$q_{(0,N)} \in \mathcal{C}_{(q_{(0,k-1)}, q_{(N-k+1,N)})}^N$$

es solución del sistema Lagrangiano discreto determinado por $L_d : Q^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si $q_{(0,N)}$ es un punto crítico de $\mathcal{S}L_d$.

Los puntos críticos nos dan soluciones para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\sum_{j=1}^{k+1} D_j L_d(q_{(i+1-j, i+1+k-j)}) = 0, \quad k \leq i \leq N - k$$

Estas ecuaciones son llamadas **Ecuaciones de Euler-Lagrange discretas de orden superior**. Observar que este es un sistema de $(N - 2k + 1) \cdot n$ ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} D_{k+1} L_d(q_{(0,k)}) + \dots + D_1 L_d(q_{(k,2k)}) &= 0 \\ D_{k+1} L_d(q_{(1,k+1)}) + \dots + D_1 L_d(q_{(k+1,2k+1)}) &= 0 \\ \dots &= 0 \\ D_{k+1} L_d(q_{(N-2k, N-k)}) + \dots + D_1 L_d(q_{(N-k, N)}) &= 0. \end{aligned}$$

Definimos también el **operador de Euler-Lagrange discreto**:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}L_d : Q^{2k+1} &\longrightarrow T^*Q \\ q_{(i,2k+i)} &\longmapsto \sum_{j=1}^{k+1} D_j L_d(q_{(i+k+1-j, i+2k+1-j)}) \end{aligned}$$

para caracterizar las soluciones de el sistema Lagrangiano discreto determinado por $L_d : Q^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{E}L_d(q_{(i,2k+i)}) = 0, \forall 0 \leq i \leq N - 2k.$$

Formas discretas de Poincaré-Cartan de orden superior

Ahora, vamos a definir, usando el principio variacional, dos 1-formas discretas de Poincaré-Cartan y una 2-forma de Poincaré-Cartan. Para ello, no imponemos inicialmente condiciones de borde $(q_{(0,k-1)}, q_{(N-k+1,N)})$. Para ello, consideremos el espacio de caminos admisibles: $\mathcal{C}^N = \{q_{(0,N)} \in Q^{N+1}\}$. Definimos

$$\widetilde{\mathcal{S}}L_d(q_{(0,N)}) = \sum_{i=0}^{N-k} L_d(q_{(i,i+k)}) \quad (8.4)$$

entonces:

$$\begin{aligned} d\widetilde{\mathcal{S}}L_d(q_{(0,N)})(\delta q_{(0,N)}) &= \sum_{i=0}^{N-2k} \mathcal{E}L_d(q_{(i,2k+i)})\delta q_{(k+i)} \\ &\quad + [D_1 L_d(q_{(0,k)})]\delta q_0 \\ &\quad + [D_2 L_d(q_{(0,k)}) + D_1 L_d(q_{(1,k+1)})]\delta q_1 + \dots \\ &\quad + [D_k L_d(q_{(0,k)}) + \dots + D_1 L_d(q_{(k-1,2k-1)})]\delta q_{k-1} \\ &\quad + [D_2 L_d(q_{(N-k,N)}) + \dots + D_{k+1} L_d(q_{(N-2k+1,N-k+1)})]\delta q_{N-k+1} \\ &\quad + \dots + [D_k L_d(q_{(N-k,N)}) + D_{k+1} L_d(q_{(N-k+1,N-1)})]\delta q_{N-1} \\ &\quad + [D_{k+1} L_d(q_{(N-k,N)})]\delta q_N \end{aligned}$$

Las dos expresiones correspondientes a los términos de borde definen dos 1-formas que son las llamadas *1-formas de Poincaré-Cartan discretas* en Q^{2k} :

$$\begin{aligned} \Theta_{L_d}^-(q_{(0,2k-1)}) &= -[D_1 L_d(q_{(0,k)})]dq_0 - [D_2 L_d(q_{(0,k)}) + D_1 L_d(q_{(1,k+1)})]dq_1 \\ &\quad - \dots - [D_k L_d(q_{(0,k)}) + \dots + D_1 L_d(q_{(k-1,2k-1)})]dq_{k-1} \end{aligned} \quad (8.5)$$

y

$$\begin{aligned} \Theta_{L_d}^+(q_{(0,2k-1)}) &= [D_2 L_d(q_{(k-1,2k-1)}) + \dots + D_{k+1} L_d(q_{(0,k)})]dq_k \\ &\quad + \dots + [D_k L_d(q_{(k-1,2k-1)}) + D_{k+1} L_d(q_{(k-2,2k-2)})]dq_{2k-2} \\ &\quad + [D_{k+1} L_d(q_{(k-1,2k-1)})]dq_{2k-1} \end{aligned} \quad (8.6)$$

de manera tal que:

$$\begin{aligned} d\widetilde{\mathcal{S}}L_d(q_d)(\delta q_d) &= \sum_{i=0}^{N-2k} \mathcal{E}L_d(q_{(i,2k+i)})\delta q_{k+i} \\ &\quad + \Theta_{L_d}^+(q_{(N-2k+1,N)})\delta q_{(N-2k+1,N)} \\ &\quad - \Theta_{L_d}^-(q_{(0,2k-1)})\delta q_{(0,2k-1)} \end{aligned}$$

Ademas,

$$\sum_{i=0}^{k-1} dL_d(q_{(i,i+k)}) = \Theta_{L_d}^+(q_{(0,2k-1)}) - \Theta_{L_d}^-(q_{(0,2k-1)})$$

y usando que $d^2 = 0$, se tiene que existe una única 2-forma $\Omega_{L_d} = -d\Theta_{L_d}^+ = -d\Theta_{L_d}^-$, llamada la 2-forma de Poincaré-Cartan.

Flujo discreto

Si existe una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} F_d : \quad Q^{2k} &\longrightarrow Q^{2k} \\ q_{(0,2k-1)} &\longmapsto q_{(1,2k)} \end{aligned}$$

donde q_{2k} es una función que depende de $q_{(0,2k-1)}$ verificando $\mathcal{E}L_d(q_{(0,2k)}) = 0$ la llamaremos el **flujo discreto**. Si la matriz hessiana $(D_{1,k+1}L_d)$ es regular, entonces se dice que lagrangiano discreto es **regular**.

En el artículo [8] se prueba que bajo la condición de regularidad $(D_{1,k+1}L_d)$ la 2-forma Ω_{L_d} es simpléctica y el flujo es un symplectomorfismo: $F_d^*\Omega_{L_d} = \Omega_{L_d}$.

8.4. Mecánica vakónoma de orden superior

Como resultado novedoso vamos a trabajar el caso de sistemas lagrangianos de orden superior sujetos a ligaduras. Para ello utilizaremos los resultados de las dos secciones anteriores (mecánica vakónoma discreta y mecánica discreta de orden superior sin ligaduras).

Ahora supongamos que tenemos, en el caos continuo, un Lagrangiano $L : T^{(2)}Q \rightarrow \mathbb{R}$ con coordenadas (q, \dot{q}, \ddot{q}) , y los vínculos $\Phi^\alpha : T^{(2)}Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación 8.4.1. *Los resultados se pueden generalizar de un modo sencillo al caso $L : T^{(k)}Q \rightarrow \mathbb{R}$ y vínculos $\Phi^\alpha : T^{(k)}Q \rightarrow \mathbb{R}$, pero para la aplicación que vamos a realizar preferimos especializar nuestra situación para lagrangianos de orden dos.*

Discretizando el sistema obtendremos

$$L_d : Q \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi^\alpha : Q \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$$

La acción $S_d : Q^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por :

$$S_d(q_0, \dots, q_N) = \sum_{k=0}^{N-2} L_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}).$$

donde $\Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = 0$, $1 \leq k \leq N-2$.

Con lo cual tenemos el siguiente problema variacional discreto con vínculos

$$\text{mín } S_d(q_0, q_1, \dots, q_k)$$

$$\text{sujeto a } \Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Considerando este problema, definimos $\tilde{L}_d : Q \times Q \times Q \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_{\alpha,k}) = \sum_{k=0}^{N-2} (L_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) + \lambda_{\alpha,k} \Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}))$$

y nuestro problema se asocia al problema variacional discreto:

$$\begin{aligned} \text{mín } \tilde{S}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}, \lambda_{\alpha,2}) \\ q_k \in Q; \lambda_{\alpha,k} \in \mathbb{R}^m, 0 \leq k \leq N \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}, \lambda_{\alpha,2}) = & \bar{L}_d(q_0, q_1, q_2) + \bar{L}_d(q_1, q_2, q_3) + \bar{L}_d(q_2, q_3, q_4) \\ & + \lambda_{\alpha,0} \Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} \Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4). \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones vakonómas discretas son :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_d}{\partial q_2} &= D_3 \bar{L}_d(q_0, q_1, q_2) + D_2 \bar{L}_d(q_1, q_2, q_3) + D_1 \bar{L}_d(q_2, q_3, q_4) \\ &+ \lambda_{\alpha,0} D_3 \Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} D_2 \Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} D_1 \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) = 0 \\ \Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) &= 0 \\ \Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) &= 0 \\ \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) &= 0. \end{aligned}$$

Denotamos por $D_{13}f = \frac{\partial^2 f(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1 \partial q_3}$. Entonces, si

$$\det \begin{pmatrix} D_{13} \bar{L}_d(q_2, q_3, q_4) + \lambda_{\alpha,2} D_{13} \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) & D_3 \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) \\ D_1 \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

podremos garantizar regularidad, es decir, podremos despejar las coordenadas q_4 y λ_2 en funcion de las otras coordenadas.

Así, denotando por \mathcal{M}_d la subvariedad de Q^4 definida por los puntos $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in Q^4$ definidas por la anulación de las ligaduras $\Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) = 0$ y $\Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) = 0$ obtenemos el flujo discreto

$$\begin{aligned} F_d : \quad \mathcal{M}_d \times \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathcal{M}_d \times \mathbb{R}^{2m} \\ (q_0, q_1, q_2, q_3, \lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}) &\longmapsto (q_1, q_2, q_3, q_4, \lambda_{\alpha,1}, \lambda_{\alpha,2}) \end{aligned}$$

8.5. Sistemas de Control Infractuados Discretos

Consideremos el espacio de configuración $Q = Q_0 \times Q_1$ y el lagrangiano discreto $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que las fuerzas externas de control pueden ser aplicadas solamente a las primeras coordenadas (q_i^a) , donde las coordenadas generalizadas son $(q_0^a, q_0^\alpha, q_1^a, q_1^\alpha) = (q_0^A, q_1^A)$.

Las ecuaciones de control discretas están dadas por:

$$D_2^a L_d(q_k^A, q_{k+1}^A) + D_1^a L_d(q_k^A, q_{k+1}^A) = u_k^a$$

$$D_2^\alpha L_d(q_k^A, q_{k+1}^A) + D_1^\alpha L_d(q_k^A, q_{k+1}^A) = 0$$

$1 \leq A \leq n$, $1 \leq a \leq m$, $m+1 \leq \alpha \leq n$; donde $D_i^\alpha L_d$, $D_i^\alpha L_d$ representan las derivadas parciales con respecto a las coordenadas a y α , respectivamente.

El problema consiste en encontrar un camino discreto (q_k^A) , $k = 0, \dots, N$ y (u_j^a) , $J = 0, \dots, N-1$, minimizar el funcional costo discreto $S_d = \sum_{k=0}^{N-1} C(q_k, q_{k+1}, u_a)$, con condiciones iniciales q_0, q_1 y finales q_{N-1}, q_N fijadas.

Cuando las variables de control aparecen explícitamente, el problema previo de control óptimo discreto es equivalente al siguiente problema variacional con vínculos discretos:

$$\widetilde{S}_d = \sum_{k=0}^{N-2} \widetilde{L}(q_k^a, q_k^\alpha, q_{k+1}^a, q_{k+1}^\alpha, q_{k+2}^a, q_{k+2}^\alpha)$$

sujeto a los vínculos discretos de segundo orden:

$$\Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = D_2^\alpha L_d(q_k^A, q_{k+1}^A) + D_1^\alpha L_d(q_{k+1}^A, q_{k+2}^A) = 0.$$

donde,

$$\widetilde{L}(q_k^a, q_k^\alpha, q_{k+1}^a, q_{k+1}^\alpha, q_{k+2}^a, q_{k+2}^\alpha) = C(q_k, q_{k+1}, D_2^\alpha L_d(q_k^A, q_{k+1}^A) + D_1^\alpha L_d(q_{k+1}^A, q_{k+2}^A))$$

Ahora supongamos que tenemos el Lagrangiano $L : T^{(2)}Q \rightarrow \mathbb{R}$ con coordenadas (q, \dot{q}, \ddot{q}) , y los vínculos $\Phi^\alpha : T^{(2)}Q \rightarrow \mathbb{R}$.

Discretizamos el sistema y obtenemos

$$L_d : Q \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi^\alpha : Q \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$$

La acción $S_d : Q^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por :

$$S_d(q_0, \dots, q_N) = \sum_{k=0}^{N-2} L_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}).$$

y los vínculos discretos

$$\Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = D_2^\alpha L_d(q_0^A, q_1^A) + D_1^\alpha L_d(q_1^A, q_2^A) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-2.$$

Con lo cual tenemos el siguiente problema variacional discreto con vínculos

$$\text{mín } S_d(q_0, q_1, \dots, q_k)$$

sujeto a

$$\Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Considerando este problema, definimos $\widetilde{L}_d : Q \times Q \times Q \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\widetilde{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_{\alpha,k}) = \sum_{k=0}^{N-2} (\widetilde{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) + \lambda_{\alpha,k} \Phi^\alpha(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}))$$

y nuestro problema se asocia al problema variacional discreto:

$$\begin{aligned} \min \tilde{S}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}, \lambda_{\alpha,2}) \\ q_k \in Q; \lambda_{\alpha,k} \in \mathbb{R}^m, 0 \leq k \leq N \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}, \lambda_{\alpha,2}) = \\ \bar{L}_d(q_0, q_1, q_2) + \bar{L}_d(q_1, q_2, q_3) + \bar{L}_d(q_2, q_3, q_4) + \lambda_{\alpha,0} \Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} \Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4). \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones vakonómicas discretas son :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_d}{\partial q_2} &= D_3 \bar{L}_d(q_0, q_1, q_2) + D_2 \bar{L}_d(q_1, q_2, q_3) + D_1 \bar{L}_d(q_2, q_3, q_4) + \\ &\lambda_{\alpha,0} D_3 \Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} D_2 \Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} D_1 \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) = 0 \\ \Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) &= 0 \\ \Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) &= 0 \\ \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) &= 0 \end{aligned}$$

Denotamos por $D_{13}f = \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_3}$. Entonces, si

$$\det \begin{pmatrix} D_{13} \bar{L}_d + \lambda_{\alpha,2} D_{13} \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) & D_3 \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) \\ D_1 \Phi^\alpha(q_2, q_3, q_4) & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

podremos garantizar regularidad, es decir, podremos despejar las coordenadas q_4 y λ_2 en funcion de las otras coordenadas.

8.6. Ejemplo: EL Pendulo Invertido

Retomemos el ejemplo de la sección anterior, el péndulo invertido. Este consistia en un péndulo rígido o varilla de masa m que se mueve en un plano vertical, sólo puede moverse a lo largo de una recta horizontal, esta última contenida en el plano antedicho y habiamos comentado que en la práctica esta se logra montando el péndulo a un carro.

El espacio de configuración del sistema es $Q = \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$. Las coordenadas generalizadas son el ángulo θ y la posición del movil x .

Un problema clásico de control óptimo es, aplicando una fuerza horizontal sobre el bloque El Lagrangiano que obtuvimos fué:

$$L(q, \dot{q}) = L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + 2\dot{x}R \cos \theta \dot{\theta} + R^2 \dot{\theta}^2) - mg(R \cos \theta + h).$$

y las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} (m_c + m) \ddot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta}^2 + mR \cos \theta \ddot{\theta} &= u \\ mR \ddot{x} \cos \theta + mR^2 \ddot{\theta} - mgR \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Discretizamos este sistema tomando la discretización canónica $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ donde $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$

$$L_d(x_{k-1}, \theta_{k-1}, x_k, \theta_k) = \frac{1}{2}M \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{h} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{h} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{h} \right) l \cos \left(\frac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{h} \right) + l^2 \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{h} \right)^2 \right] - mgl \cos \left(\frac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2} \right) - mg\tilde{h}$$

donde \tilde{h} es la altura del carro.

Las ecuaciones de movimiento son

$$(2x_{k+1} - x_k - x_{k+2}) \left(\frac{M+m}{h^2} \right) + \frac{ml}{h^2} \left[\cos \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) (\theta_{k+1} - \theta_k) - \cos \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) (\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) \right] = u_k$$

$$\frac{l^2 m}{h^2} (2\theta_{k+1} - \theta_k - \theta_{k+2}) + \frac{lm}{h^2} \left[(x_{k+1} - x_k) \cos \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) - (x_{k+2} - x_{k+1}) \cos \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) \right] + \frac{lmg}{2} \left[\sin \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) \right] -$$

$$\frac{lm}{2h^2} \left[(x_{k+1} - x_k)(\theta_{k+1} - \theta_k) \sin \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) + (x_{k+2} - x_{k+1})(\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) \sin \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) \right] = 0.$$

El problema de control óptimo discreto consiste en encontrar un camino (q_k, q_{k+1}, u_k) y minimizar el funcional de coste discreto

$$\mathcal{A}_d = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2.$$

Sabemos que este problema es equivalente al siguiente problema variacional con vínculos

$$\text{mín } \tilde{\mathcal{A}}_d = \sum_{k=0}^3 \tilde{L}(x_k, \theta_k, x_{k+1}, \theta_{k+1}, x_{k+2}, \theta_{k+2})$$

sujeto a las ligaduras

$$\Phi_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = \frac{l^2 m}{h^2} (2\theta_{k+1} - \theta_k - \theta_{k+2}) + lm \left[(x_{k+1} - x_k) \cos \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) - (x_{k+2} - x_{k+1}) \cos \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) \right] + \frac{lmg h^2}{2} \left[\sin \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) \right] - \frac{lm}{2} \left[(x_{k+1} - x_k)(\theta_{k+1} - \theta_k) \sin \left(\frac{\theta_{k+1} + \theta_k}{2} \right) + (x_{k+2} - x_{k+1})(\theta_{k+2} - \theta_{k+1}) \sin \left(\frac{\theta_{k+2} + \theta_{k+1}}{2} \right) \right] = 0,$$

con $k = 1, 2, 3$ donde $\tilde{L}_d : Q \times Q \times Q \rightarrow$ esta dado por

$$\tilde{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) = \frac{1}{2}u_k^2 =$$

$$\frac{(M+m)^2}{2h^4}(2x_{k+1}-x_k-x_{k+2})^2 + \frac{(ml)^2}{2h^4} \left[\cos\left(\frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2}\right)(\theta_{k+1}-\theta_k) - \cos\left(\frac{\theta_{k+2}+\theta_{k+1}}{2}\right)(\theta_{k+2}-\theta_{k+1}) \right]^2$$

Definimos $\bar{L}_d : Q \times Q \times Q \times^m \rightarrow$ dado por

$$\bar{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \lambda_k) = \tilde{L}_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}) + \lambda_k \Phi_d(q_k, q_{k+1}, q_{k+2}).$$

Ahora, buscamos las ecuaciones vakónomas discretas para el sistema. Definimos la acción discreta extendida,

$$\bar{\mathcal{A}}_d(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$$

$$\tilde{L}_d(q_0, q_1, q_2) + \tilde{L}_d(q_1, q_2, q_3) + \tilde{L}_d(q_2, q_3, q_4) + \lambda_{\alpha,0} \Phi_d(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} \Phi_d(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} \Phi_d(q_2, q_3, q_4).$$

Entonces las ecuaciones vakónomas discretas estan dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= D_3^x \tilde{L}_d(q_0, q_1, q_2) + D_2^x \tilde{L}_d(q_1, q_2, q_3) + D_1^x \tilde{L}_d(q_2, q_3, q_4) \\ &\quad + \lambda_{\alpha,0} D_3^x \Phi_d(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} D_2^x \Phi_d(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} D_1^x \Phi_d(q_2, q_3, q_4), \\ 0 &= D_3^\theta \tilde{L}_d(q_0, q_1, q_2) + D_2^\theta \tilde{L}_d(q_1, q_2, q_3) + D_1^\theta \tilde{L}_d(q_2, q_3, q_4) \\ &\quad + \lambda_{\alpha,0} D_3^\theta \Phi_d(q_0, q_1, q_2) + \lambda_{\alpha,1} D_2^\theta \Phi_d(q_1, q_2, q_3) + \lambda_{\alpha,2} D_1^\theta \Phi_d(q_2, q_3, q_4), \\ 0 &= \Phi_d(q_0, q_1, q_2), \\ 0 &= \Phi_d(q_1, q_2, q_3), \\ 0 &= \Phi_d(q_2, q_3, q_4). \end{aligned}$$

Luego de efectuar algunos cálculos se puede ver que,

$$\begin{aligned} D_{13}^x \tilde{L}_d(q_2, q_3, q_4) &= \frac{(M+m)^2}{h^4}, \\ D_{13}^\theta \tilde{L}_d(q_2, q_3, q_4) &= -\frac{(ml)^2}{2h^4} \left[\text{sen}\left(\frac{\theta_4+\theta_3}{2}\right)(\theta_4-\theta_3) - 2\cos\left(\frac{\theta_4+\theta_3}{2}\right) \right] \times \\ &\quad \left[\text{sen}\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right)\left(\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right) \right], \\ D_{13}^x \Phi_d(q_2, q_3, q_4) &= 0, \\ D_{13}^\theta \Phi_d(q_2, q_3, q_4) &= 0, \\ D_1^x \Phi_d(q_2, q_3, q_4) &= \frac{ml}{2}(\theta_3-\theta_2)\text{sen}\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right) - ml\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right), \\ D_3^x \Phi_d(q_2, q_3, q_4) &= -ml\cos\left(\frac{\theta_4+\theta_3}{2}\right) - \frac{ml}{2}(\theta_4-\theta_3)\text{sen}\left(\frac{\theta_4+\theta_3}{2}\right), \\ D_1^\theta \Phi_d(q_2, q_3, q_4) &= \frac{mglh^2}{4}\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right) - ml^2 - \frac{ml}{4}(x_3-x_2)(\theta_3-\theta_2)\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_2}{2}\right), \\ D_3^\theta \Phi_d(q_2, q_3, q_4) &= \frac{mglh^2}{4}\cos\left(\frac{\theta_4+\theta_3}{2}\right) - ml^2 - \frac{ml}{4}(x_4-x_3)(\theta_4-\theta_3)\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right). \end{aligned}$$

Entonces, si $D_1^x \Phi_d(q_2, q_3, q_4) D_3^x \Phi_d(q_2, q_3, q_4) D_1^\theta \Phi_d(q_2, q_3, q_4) D_3^\theta \Phi_d(q_2, q_3, q_4) \neq 0$ podemos despejar localmente las coordenadas q_4 y λ_2 en función de las otras coordenadas.

Denotamos por \mathcal{M}_d la subvariedad de Q^4 donde $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ esta definida por los puntos $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in Q^4$ y la anulaci3n de los v3nculos $\Phi^\alpha(q_0, q_1, q_2) = 0$ y $\Phi^\alpha(q_1, q_2, q_3) = 0$ obteniendo as3 el integrador vak3nomo discreto para nuestro problema

$$F_d : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_d \times \mathbb{R}^{2m} & \longrightarrow & \mathcal{M}_d \times \mathbb{R}^{2m} \\ (q_0, q_1, q_2, q_3, \lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}) & \longmapsto & (q_1, q_2, q_3, q_4, \lambda_{\alpha,1}, \lambda_{\alpha,2}) \end{array}$$

Capítulo 9

Conclusiones y Futuros Trabajos

Si nuestro objetivo es minimizar (o maximizar) una función de coste, es decir, estamos tratando un sistema mecánico de control óptimo, bajo ciertas circunstancias es posible determinar los controles en función de las variables cinemáticas. Finalmente el sistema se reduce a un sistema lagrangiano de orden superior, posiblemente sujeto a ligaduras también de orden superior. Aquí parece adecuado adaptar al orden superior el algoritmo que ya se había diseñado en [16] y fue tratado con detalle en este trabajo, y generalizando el resultado que se obtuvo en [7] para vínculos no-lineales en las velocidades.

El principal objetivo, cumplido, fué obtener el marco geométrico para sistemas lagrangianos de orden superior (tanto noholónimo, como variacional) que se han empezado a estudiar en [14], [16] y encontrar su versión discreta con la motivación de encontrar integradores simplécticos preservando momento para estas familias de problemas de control óptimo.

Actualmente se seguimos trabajando en la simulación numerica para explotar las propiedades de el integrador obtenido en la última sección de este trabajo

El principal objetivo en el cual trabajar a partir de esta tesina sería el estudio de sistemas lagrangianos controlados en algebroides y grupoides de Lie. Investigaciones recientes han encontrado un marco unificador para la mecánica clásica, cubriendo la mayor parte de las situaciones interesantes, siendo la estructura subyacente la de algebroides de Lie (como sustituto de espacio de fases de velocidades). Esta idea fue introducida originalmente por A. Weinstein [28] y desarrollada por diferentes grupos, encontrando un formalismo lagrangiano y hamiltoniano suficientemente general para que cubriese los diferentes tipos de ecuaciones (Euler-Lagrange, Euler-Poincaré, Lagrange-Poincaré...).

En muchos de los ejemplo de interés en aplicaciones prácticas (robótica, astrodinámica) los sistemas de control aparecen reducidos siendo su espacio de fases un álgebra de Lie, el cociente de un fibrado tangente por la acción de un grupo de Lie, en vez de un fibrado tangente usual. Esto hace de gran interés extender las ideas expuestas en los párrafos anteriores al caso de espacios de fases modelados en algebroides de Lie.

Se formalizará el marco geométrico de orden superior para algebroides de Lie (estudiando, tanto el formalismo lagrangiano como el hamiltoniano). donde se podrán observar objetos globales asociados a estas estructuras de orden superior, con vistas a un posible construcción de integradores geométricos.

La derivación del correspondiente formalismo discreto nos dará un resultado final de gran interés en aplicaciones, pues permitiría la obtención de métodos numéricos simplécticos para problemas de control óptimo reducido.

Como casos particulares de interés a estudiar surgen varias aplicaciones al control óptimo de sistemas noholónomos y a simulaciones numéricas en problemas de control. Entre los problemas concretos a tratar se encuentran la planificación eficiente de trayectorias, controlabilidad y optimización local de sistemas posiblemente no diferenciables y controlables no linealmente. Los ejemplos incluyen un amplio número de sistemas tales como satélites, manipuladores robóticos con articulaciones pasivas y vehículos acuáticos.

Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, volume 75 of Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, New York, 2 edition, 1988.
- [2] R. Abraham, J.E. Marsden: *Foundations of Mechanics*, 2nd. edition, Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts (1978).
- [3] V.I. Arnold: *Dynamical Systems, Vol. III*, Springer-Verlag, New York- Heidelberg-Berlin (1998).
- [4] P. Balseiro, *Geometry of generalized nonholonomic mechanical systems*, PhD. Thesis.
- [5] P. Balseiro, *Principio de Hamilton para sistemas con restricciones afines*, Trabajo de iniciación a la investigación, (2003).
- [6] R. Benito, D. Martín de Diego: *Discrete vakonomic Mechanics*. Journal of Mathematical Physics 46 (8).
- [7] R. Benito, D. Martín de Diego: *Hidden symplecticity in Hamilton's principle algorithms*, Proc. Conf. Prague, August 30 - September 3, 2004. Charles University, Prague (Czech Republic), 2005 411 - 419.
- [8] R. Benito, M. de León, D. Martín de Diego: *Higher order discrete Lagrangian mechanics*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 3, No. 3 (2006), 421-436
- [9] A.M. Bloch: *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics Series, 24, Springer-Verlag, New York (2003).
- [10] A.M. Bloch and P.E. Crouch, *Nonholonomic and vakonomic control systems on Riemannian manifolds*, in *Dynamics and Control of Mechanical Systems*, Michael J. Enos, ed., Fields Inst. Commun. 1, AMS, Providence, RI, 1993, pp. 2552.
- [11] A.M. Bloch, P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden, R.M. Murray: *Nonholonomic mechanical systems with symmetry*, Arch. Rational Mech. Anal., 136 (1996), 2199.
- [12] F. Bullo, A.D. Lewis: *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems*. Texts in Applied Mathematics, Springer Verlag, New York (2005).

- [13] Cano B., Lewis H. R. 2001, *A comparasion of symplectic and Hamilton's principle algorithms for autonomus and non-autonomus systems of ordinary differential equations*, *Applies Numerical Mathematics* 39, 289-306.
- [14] H. Cendra, A. Ibort, M. de León, D. Martín de Diego: *A generalization of Chetaev's principle for a class of higher order nonholonomic constraints*. *J. Math. Phys.* 45 (7), 2785-2801, (2004).
- [15] J. Cortés: *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*, *Lec. Notes in Math.*, 1793, Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [16] J. Cortés, M. de León, D. Martín de Diego, S. Martínez: *Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics. Comparison of solutions*, *SIAM J. Control Optim.*, 41 (2002), 1389-1412.
- [17] M.J. Gotay, J.M. Nester: *Presymplectic Lagrangian systems I: the constraint algorithm and the equivalence theorem*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, A* 30 (1979), 129-142.
- [18] D. Iglesias, J.C. Marrero, D. Martín de Diego, D. Sosa: *Singular lagrangian systems and variational constrained mechanics on Lie algebroids*, *Dynamical Systems: an International Journal*, 2008.
- [19] W.S. Koon, J.E. Marsden: *Optimal control for holonomic and nonholonomic mechanical systems with symmetry and Lagrangian reduction*, *SIAM J. Control Optim.*, 35 (1997), 901-929.
- [20] Lagrange J.L., *Mechanique Analytique*. Chez la Venue Desaint (1788)
- [21] A. D. Lewis, R. M. Murray, *variational principles for constrained systems: theory and experiments*. *International Journal of Nonlinear Mechanics* 30 (6) 1995, 793-815.
- [22] Martínez, J. Cortés, and M. de León, *Symmetries in vakonomic dynamics: Applications to optimal control*, *J. Geom. Phys.*, 38 (2001), pp. 343365.
- [23] M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: *Mechanical systems with nonlinear constraints*, *Int. J. Teor. Phys.*, 36 (4) (1997), 973-989.
- [24] M. de León; de Diego, David M. *On the geometry of non-holonomic Lagrangian systems*. *J. Math. Phys.* 37 (1996), no. 7, 3389-3414
- [25] J. Marsden and T. Ratiu, *Symmetry and mechanics*. Springer-Verlag (1999).
- [26] J.E. Marsden, M. West: *Discrete mechanics and variational integrators*, *Acta Numerica*, 10 (2001), 357-514.
- [27] R. Skinner, R. Rusk: *Generalized Hamiltonian dynamics I. Formulation on $T^*Q \oplus TQ$* , *J. Math. Phys.*, 24 (11) (1983), 2589-2594.
- [28] A. Weinstein: *Lagrangian Mechanics and groupoids*, In *Mechanics day* (Waterloo, ON, 1992), *Fields Institute Communications* 7, American Mathematical Society, 1996, pp. 207-231.